ГЕОДЕЗИЯ / GEODESY

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.74

УРАВНИВАНИЕ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННО ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ С МИНИМАЛЬНОЙ НОРМОЙ

Научная статья

Шарапов А.А.[1], Барлиани А.Г.[2, *], Бугаков П.Ю.[3]
[3] ORCID : 0000-0001-7386-5484;
[1, 2, 3] Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (agbarliani[at]mail.ru)

Аннотация

В статье рассмотрены возможности решения плохо обусловленных систем нормальных уравнений в процессе уравнивания инженерно-геодезических сетей специального назначения, создаваемых при строительстве сложных инженерных сооружений. В подобных системах уравнений определитель системы близок к нулю и оценки параметров, полученные в процессе уравнивания по методу наименьших квадратов (МНК), оказываются сильно искаженными. Более корректное решение возможно получить путем применения предлагаемого алгоритма для решения, плохо обусловленных систем нормальных уравнений. Алгоритм основан на вычислении обобщенно обратной матрицы, что приводит к оптимальному решению подобных задач. Обобщеннообратный метод уравнивания кардинально отличается от традиционного способа уравнивания по методу наименьших квадратов, так как он значительно упрощает процедуры уравнивания и оценки точности результатов обработки геодезических построений. Приведена рекуррентная методика последовательного формирования обобщеннообратной матрицы параметрических уравнений поправок, что позволяет миновать трудоемкий вычислительный процесс составления и решения нормальных уравнений и получить ковариационную матрицу параметров уравнивания с минимальной нормой. В работе для сравнительного анализа выполнена уравнивание и оценка точности модели инженерно-геодезической сети методом обобщенного решения и методом наименьших квадратов. Анализ конечных результатов обработки двумя конкурирующими методами показали, что метод обобщенного решения позволяет получить уравненные координаты примерно в 6 раза точнее, чем по методу наименьших квадратов. Более того, уравненные значения координат определяемых пунктов, полученных по методу обобщенного решения, примерно в 2 раза ближе подходят к теоретическим (модельным) координатам соответствующих пунктов.

Ключевые слова: инженерно-геодезические сети, плохо обусловленная система, псевдо-обратная матрица, обобщенно обратная матрица, Евклидова норма вектора, ковариационная матрица.

EQUALIZATION AND ACCURACY EVALUATION OF SPECIAL-PURPOSE ENGINEERING GEODETIC NETWORK ON THE BASIS OF GENERALIZED INVERSE MATRIX WITH MINIMUM NORM

Research article

Sharapov A.A.[1], Barliani A.G.[2, *], Bugakov P.Y.[3]
[3] ORCID : 0000-0001-7386-5484;
[1, 2, 3] Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation

* Corresponding author (agbarliani[at]mail.ru)

Abstract

The article examines the possibilities of solving ill-conditioned systems of normal equations in the process of equating special-purpose engineering geodetic networks created during the construction of complex engineering structures. In such systems of equations, the determinant of the system is close to zero and the parameter estimates obtained in the process of equating by the least squares method (LSM) are highly distorted. A more correct solution can be obtained by applying the proposed algorithm to solve ill-conditioned systems of normal equations. The algorithm is based on the computation of the generalized inverse matrix, which leads to the optimal solution of such problems. The generalised-inverse method of equating is fundamentally different from the traditional method of equating by the least squares method, as it greatly simplifies the procedures of equating and evaluating the accuracy of the results of processing geodetic constructions. The recurrent technique of sequential formation of the generalized inverse matrix of parametric equations of corrections is given, which allows to bypass the time-consuming computational process of drawing up and solving normal equations and to obtain the covariance matrix of equating parameters with minimum norm. In this work, for comparative analysis, the equating and accuracy evaluation of the engineering geodetic network model by the generalized solution method and the least squares method were performed. The analysis of the final results of processing by two competing methods showed that the generalized solution method allows to obtain the equated coordinates about 6 times more accurately than the least squares method. Moreover, the equated coordinate values of the determined points obtained by the generalized solution method are about 2 times closer to the theoretical (model) coordinates of the corresponding points.

Keywords: engineering geodetic networks, ill-conditioned system, pseudo-inverse matrix, generalized inverse matrix, Euclidean norm of vector, covariance matrix.

Введение

Как известно, для уравнивания и оценки точности геодезических построений в основном используется МНК в двух версиях – коррелатной и параметрической. В настоящее время широко стали применяться методы псевдонормальной оптимизации в аналогичных версиях.

Опорные инженерно-геодезические сети, создаваемые для строительства и изучения деформационных процессов крупных гидротехнических сооружений, имеют свою специфику в силу топографических, градостроительных и других условий. Это приводит к нарушениям ряда геометрических требований в сети, предъявляемых при их построении и развитии. Например, таких как наличие в фигурах сети острых углов и сторон, существенно различающихся между собой по длине. Этот факт приводит к тому, что в системе нормальных уравнений параметров матрица коэффициентов становится плохо обусловленной, но не вырожденной. Поэтому применение параметрического способа по методу наименьших квадратов [3], [8], [9] приводит к искаженным конечным результатам уравнивания и оценки точности.

Во многих работах для уравнивания и оценки точности, как свободных, так и несвободных геодезических сетей предлагается коррелатная версия классического МНК [4], [7], [16], [23]. Отметим, что коррелатная версия классического метода наименьших квадратов успешно решает задачу уравнивания свободных и несвободных сетей с хорошо и плохо обусловленными матрицами систем нормальных уравнений коррелат. Однако в настоящее время эта версия МНК практически не применяется в связи со сложностью и громоздкостью исходных уравнений связи и функций для оценки точности, а также из-за сложности реализации алгоритма на компьютере [11].

В работе [12] предлагается рекуррентный способ уравнивания геодезических сетей, позволяющий получить решение на основе псевдообратной матрицы. Отметим, что в трудах [17], [18], [21] описываются модифицированные алгоритмы, основанные на рекуррентном способе уравнивания профессора Ю. И. Маркузе. Все анализируемые способы эффективны для построений, приводящих к вырожденным матрицам коэффициентов нормальных уравнений. Но при применении этих методов для сетей специального назначения с почти вырожденными матрицами коэффициентов нормальных уравнений возникают дополнительные трудности, связанные с выбором начальной матрицы для рекуррентного процесса. Это ограничивает применение описанных алгоритмов.

В последнее время появились публикации, предлагающие использовать в корреальной версии МНК алгоритм, основанный на построении псевдообратных матриц. Это, прежде всего, рекурсивный метод решения условных уравнений коррелат [2], позволяющий получить псевдообратную матрицу коэффициентов условных уравнений и метод [6], основанный на рекуррентном обращение матрицы нормальных уравнений коррелат, и вычислении главной псевдообратной матрицы условных уравнений коррелат. Для этого используют формулу (1).

$$B^{+} = P^{0,5} B^{T} (BP^{(-1)} B^{T})^{(-1)} \qquad (1)$$

где B^{+}– псевдообратная матрица коэффициентов условных уравнений B, P – весовая матрица результатов геодезических измерений. Необходимо отметить, что обратную матрицу $(BP^{(-1)}B^{T})^{(-1)}$ нормальных уравнений коррелат, авторы этой статьи получают по рекуррентному алгоритму профессора Ю. И. Маркузе [10]. При этом для начала рекуррентного процесса вычисления обратной матрицы, необходимо тем или иным способом подобрать начальную матрицу, что вводит искусственно искажения в исходную информацию и в конечном итоге отразится на интерпретации конечных результатов обработки. По нашему мнению, здесь предпочтение можно отдать алгоритму, приведенному в работе [2]. Однако эти методы неэффективны в случае уравнивания и оценки точности инженерно-геодезических построений с плохо обусловленными системами нормальных уравнений.

Для уравнивания результатов наблюдений за деформациями инженерных сооружений и современными движениями земной коры в работах [5], [13], [14], [15] предлагается применять метод уравнивания, основанный на использование псевдообратной матрицы нормальных уравнений.

Совсем другой подход к решению задачи применительно к свободным геодезическим сетям предлагается в работах [12], [25], [26]. Здесь используются различные методики построения псевдообратной матрицы коэффициентов нормальных параметрических уравнений. При этом необходимо подчеркнуть, что анализируемые методы различаются между собой в основном по алгоритмам построения псевдообратных матриц. Однако, применение представленных методов ограничивается плохой обусловленностью матриц коэффициентов нормальных уравнений, имеющих место в инженерно-геодезических сетях. Поэтому для корректного решения задачи можно отказаться от поиска решения этими методами в пользу метода обобщенного решения с использованием обобщенной обратной матрицы.

Материалы и методы

Целью данной работы является разработка алгоритма уравнивания инженерно-геодезических сетей с плохо обусловленной системой уравнений, который позволяет получить оптимальные оценки конечных параметров уравнивания. Основная задача исследования состоит в проведении сравнительного анализа на модели инженерно-геодезической сети, уравнивания и оценки точности между предлагаемым методом обобщенного решения и методом наименьших квадратов.

Рассмотрим на конкретном примере процесс уравнивания подобной несвободной инженерно-геодезической сети.

Пусть уравнивается инженерно-геодезическая сеть с плохо обусловленной системой нормальных уравнений. Запишем для такой сети матричную систему параметрических уравнений (2).

$$A\hat{\Delta} + l = V \qquad (2)$$

Этой системе соответствует система нормальных уравнений (3).

$$R\hat{\Delta} + b = 0 \qquad (3)$$

Из-за вышеперечисленных условий матрица R в (3) плохо обусловлена, поэтому решение по МНК приводит к искаженным результатам.

Для получения более корректного решения рассмотрим метод решения с использованием обобщенно обратной матрицы, представленный в работе [1]. Обобщенное решение системы параметрических уравнений (2) запишем в виде выражения (4).

$$\hat{\Delta} = -A^{\sim} l \tag{4}$$

где $A^{\sim}$ – обобщенно обратная матрица к исходной матрице *A* и удовлетворяющая условиям (5).

$$\left.\begin{array}{l} A^{\sim}AA^{\sim} = A^{\sim} \\ (A^{\sim}A)^T = A^{\sim}A \end{array}\right\} \tag{5}$$

Необходимо отметить, что обобщенно обратную матрицу $A^{\sim}$, удовлетворя-ющую условиям (5), назовем g-обратной, которая дает вектор с минимальной нормой [1]. Отметим также, что вектор $\tilde{\Delta}$ поправок, вычисленный по формуле (4), позволяет получить уравненные координаты определяемых пунктов как наиболее приближенные к их истинным значениям, что и будет доказано в дальнейшем с использованием модели инженерно-геодезической сети.

Произведем уравнивание сети методом обобщенного решения с исполь-зованием (4). Тогда основная проблема сводится к вычислению обобщенно обратной матрицы $A^{\sim}$.

Исследования, представленные в работах [1], [2], показали, что наиболее эффективным способом вычисления обобщенно обратной матрицы является рекурсивный алгоритм, согласно которому матрица параметрических урав-нений поправок представляется в блочном виде [1] (формула 6):

$$A = |a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}, a_k| \tag{6}$$

где a_j – вектор-столбец (7).

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}^T \tag{7}$$

Тогда рекурсивный алгоритм вычисления псевдообратной матрицы будет записан в виде (8).

$$A_j^{\sim} = \begin{pmatrix} A_{j-1}^{\sim} - A_{j-1}^{\sim} a_j \beta_j \\ \beta_j \end{pmatrix} \tag{8}$$

В (8) вектор β_j для первых k-d столбцов определяется так (9):

$$\beta_j = \frac{C_j^T}{||C_j||^2} \tag{9}$$

а для последних *d* столбцов матрицы (6) вектор β_j – по формуле (10).

$$\beta_j = \frac{d_j^T A_{j-1}^{\sim}}{1+||d_j||^2} \tag{10}$$

где

$$d_j = A_{j-1}^{\sim} a_j \tag{11}$$

$$C_j = a_j - A_{j-1} d_j \tag{12}$$

Легко понять, что после каждой рекурсии матрица A_{j-1} будет расширяться на один вектор-столбец.

Отметим, что при уравнивании сети с хорошо обусловленной системой нормальных уравнений, вектор β_j всегда будет вычисляться по формуле (9). Тогда вместо обобщенно обратной мы получаем псевдообратную матрицу получаем и псевдонормальное решение. В этих условиях псевдорешение совпадает с решением по МНК (13):

$$\tilde{\Delta} = -A^{+} l \tag{13}$$

где A^+ – псевдообратная матрица к исходной матрице A и которая удовле-творяет условиям вида:

Вектор уравненных параметров $\tilde{x}$ можно выразить через вектор-столбец приближенных параметров x^0 и вектор-столбец поправок $\hat{\Delta}$ так (14).

$$\hat{x} = x^0 + \hat{\Delta} \tag{14}$$

Как известно, следующая задача уравнительных вычислений – оценка точности результатов. Для этого воспользуемся ковариационной матрицей (15) из [1].

$$K_{\hat{x}} = K_{\hat{\Delta}} = \mu^2 A^{\sim} A^{\sim T} \tag{15}$$

где μ – ср. кв. ошибка единицы веса, получаемая по формуле (16) [1], [19]:

$$\mu = \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{V^T V}{n-k+d}} \tag{16}$$

Для последующего уравнивания несвободной геодезической сети примем в формуле (14) значение d=1.

Чтобы оценить уравненные значения измеренных величин, известным образом находим их ковариационную матрицу (17) [1], [11], [22], [24]:

$$K_{\hat{y}} = AK_{\hat{x}}A^T = \begin{pmatrix} m_1^2 & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & m_2^2 & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & m_2^2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

где m_i – среднеквадратическая ошибка уравненных измерений, K_{12} коэффициент ковариации, характеризующий связь между уравненными измерениями *i* и *j*.

Таким образом, предлагается производить уравнивание и оценку точности инженерно-геодезических построений по описанному алгоритму.

Основные результаты

Реализуем этот алгоритм на модели инженерно-геодезической сети, представленной на рис. 1 виде жесткой фигуры – геодезический четырехугольник с двумя диагоналями и одной базисной стороной.

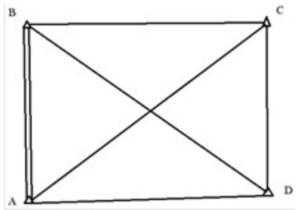

Рисунок 1 - Модель инженерно-геодезической сети
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.74.1

Примечание: составлено авторами

В представленной сети исходными являются пункты *A* и *B*. Теоретические значения координат исходных и определяемых пунктов *C* и *D* модели сети представлены в таблице 1.

Таблица 1 - Теоретические значения координат пунктов для выбранной модели инженерно-геодезической сети

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.74.2

Пункты сети	*X* (м)	*Y* (м)
A	13568,3490	16454,4444
B	16183,1854	19481,4282
C	19655,7043	26751,5689
D	17447,0184	25671,5982

Примечание: составлено авторами

С использованием теоретических значений координат исходных пунктов были вычислены значения длин сторон и их дирекционные углы, значения которых представлены в таблице 2.

Моделирование измеренных направлений выполнялось для случая, когда стандартная ошибка измеряемых направлений.

Все расчеты, связанные с моделированием элементов сети, уравниванием и оценкой точности выполнялись в среде Mathcad 15.

Смоделированные значения дирекционных улов и направлений приведены в таблице 2.

Таблица 2 - Модельные значения элементов инженерно-геодезической сети

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.74.3

Направления	Смоделированные направления
A-B *A-C* *A-D*	00˚00'00,00" 10˚13'53,34" 17˚59'59,02"
B-C *B-D* *B-A*	00˚00'00,00" 13˚59' 29,74" 164˚42'33,53"

C-D *C-A* *C- B*	00˚00'00,00" 33˚21'09,31" 38˚24'42,60"
D-A *D-B* *D-C*	00˚00'00,00" 11˚16'57,48" 138˚52'44,06"

Примечание: составлено авторами

Задавшись координатами пунктов *A* и *B*, длиной стороны S_{AB} и на основании данных таблицы 2, получены приближенные значения координат определяемых пунктов:

$X_C^0 = 19655,7011$ м; $Y_C^0 = 26751,5441$ м ,

$X_D^0 = 17446,9958$ м; $Y_D^0 = 25671,4108$ м .

С использованием значений координат исходных пунктов и вычисленных приближенных значений координат определяемых пунктов были рассчитаны приближенные значения дирекционных углов, длины сторон и наконец вектор свободных членов параметрических уравнений поправок, который представлен в транспонированной форме (18).

$$l^T = (0,047 - 0,003 - 0,043 \quad 0,003 \quad 0,113 - 0,1177,65 - 3,83 - 3,82 - 4,167 - 4,1378,303) \qquad (18)$$

Для дальнейших расчетов известным образом для всей анализируемой сети была сформирована матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок (19).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -0,014844 & 0,008775 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,019012 & 0,008001 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -0,023101 & 0,011034 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,031989 & 0,006531 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -0,036855 & 0,075364 & 0,036855 & -0,075364 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -0,014844 & 0,008775 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -0,023101 & 0,011034 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,019012 & 0,008001 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,031989 & 0,006531 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0,036855 & 0,075364 & 0,036855 & -0,075364 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Вследствие того, что для данной модели сети в треугольниках присутствуют острые углы (меньше 10˚), а стороны сильно различаются между собой по длине, то можно ожидать, что матрица коэффициентов нормальных уравнений $R=A^TA$ окажется плохо обусловленной. Для проверки высказанного предположения в среде Mathcad был вычислен определитель для этой матрицы (20).

$$\det(R) = 3,59730195 \cdot 10^{-12} \qquad (20)$$

Так как определитель матрицы нормальных уравнений (20) оказался близок к нулю, то уравнивание и оценку точности для данной сети выполним методом обобщенного решения и для сравнения – с использованием метода наименьших квадратов.

Для нахождения обобщенного решения по вышеприведенному алгоритму найдем обобщенно обратную матрицу параметрических уравнений поправок и представим ее в транспонированной форме (21).

$$A^{\sim T} = \begin{pmatrix} -0,5007 & -0,2591 & -0,3220 & -0,3222 & 13,6258 & -6,1704 & 11,7685 & -2,7448 \\ -0,2319 & 0,1442 & 0,2703 & 0,1063 & -15,2552 & 1,8057 & -0,5841 & 6,3746 \\ -0,2674 & 0,1149 & 0,0516 & 0,2160 & 1,6298 & 4,3656 & -11,1842 & -3,6290 \\ 0,1447 & -0,1321 & 0,4008 & 0,1152 & -24,0314 & 1,7942 & 1,3048 & 10,7997 \\ 0,1239 & -0,1194 & 0,1139 & 0,3952 & 1,9237 & 7,9667 & -19,962 & -6,1437 \\ -0,2686 & -0,7486 & -0,5147 & -0,5104 & 22,1077 & -9,7609 & 18,6572 & -4,6561 \\ -0,0143 & -0,0033 & -0,2532 & 0,2257 & 8,9347 & 4,7635 & -6,3739 & -9,1578 \\ -0,0651 & -0,1050 & -0,5350 & -0,2113 & 4,1619 & -4,1709 & 5,6869 & 1,4109 \\ 0,0794 & 0,1082 & -0,2118 & -0,0143 & -13,0963 & -0,5920 & 0,6871 & 7,7473 \\ -0,0818 & -0,1288 & -0,2518 & -0,5649 & 6,7668 & -4,5218 & 5,7091 & 0,3897 \\ 0,0774 & 0,1265 & 0,0032 & -0,1975 & -1,4212 & 2,6697 & -9,9574 & -0,2137 \\ 0,0045 & 0,0023 & 0,2487 & -0,2376 & -5,3453 & 1,8528 & 4,2484 & -0,1754 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Далее с использованием выражения (4) определим вектор столбец к приближенным координатам (22).

$$\hat{\Delta}^T = -(A^{\sim}l)^T = (0,07 - 0,05 - 4,08 - 3,87 - 0,0339 - 0,07940,02390,1074) \text{ м} \quad (22)$$

Для сравнительного анализа предварительно найдем псевдообратную матрицу, которую для удобства представим в транспонированной форме (23).

$$A^{+\gamma} = \begin{pmatrix} -0,7139 & -0,2569 & -0,4639 & -0,4954 & -44,0800 & -130,3268 & -11,0273 & -107,7605 \\ -0,2246 & 0,1441 & 0,2752 & 0,1122 & -13,2911 & 6,0315 & 0,1918 & 9,9489 \\ -0,0614 & 0,1128 & 0,1887 & 0,3832 & 57,3711 & 124,2953 & 10,8355 & 97,8116 \\ 0,1628 & -0,1323 & 0,4129 & 0,1299 & -19,1268 & 12,3468 & 3,2423 & 19,7255 \\ 0,0941 & -0,1191 & 0,0941 & 0,3710 & -6,1368 & -9,3759 & -23,1462 & -20,8126 \\ -0,2569 & -0,7487 & -0,5069 & -0,5009 & 25,2636 & -2,9708 & 19,9039 & 1,0872 \\ 0,0187 & -0,0036 & -0,2313 & 0,2524 & 17,8525 & 23,9506 & -2,8511 & 7,0713 \\ 0,0255 & -0,1059 & -0,4748 & -0,1378 & 28,6634 & 48,5451 & 15,3659 & 45,9999 \\ -0,0441 & 0,1095 & -0,2939 & -0,1146 & -46,5159 & -72,4956 & -12,5148 & -53,0712 \\ 0,1571 & -0,1312 & -0,0928 & -0,3709 & 71,4416 & 134,6285 & 31,2579 & 118,0877 \\ -0,1443 & 0,1287 & -0,1443 & -0,3775 & -61,4100 & -126,3987 & -33,6551 & -109,3841 \\ -0,0128 & 0,0025 & 0,2371 & -0,2517 & -10,0316 & -8,2298 & 0,3972 & -8,7036 \end{pmatrix} \quad (23)$$

На основании матрицы (23) по формуле (13) найдем псевдорешение, которое соответствует решению по методу наименьших квадратов (24).

$$\tilde{\Delta}^T = -(A^{+}l)^T = (-0,06 - 0,05 - 4,16 - 3,97 - 0,0693 - 0,15560,00990,0429) \text{ м} \quad (24)$$

Для оценки точности параметров на основе обобщенно обратной матрицы (21) рассчитаем блок ковариационной матрицы уравненных координат (25).

$$K_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 155,159520 & -30,374609 & 40,693960 & -58,173168 \\ -30,374609 & 24,828303 & -47,350756 & -2,388942 \\ 40,693960 & -47,350756 & 104,403594 & 10,964971 \\ -58,173168 & -2,388942 & 10,964971 & 32,408759 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Аналогичным образом представим блок ковариационной матрицы уравненных координат, вычисленной на основе псевдообратной матрицы (23) с использованием метода наименьших квадратов (26).

$$K_{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 1612,002055 & 3028,721689 & 96,825958 & 2509,453773 \\ 3028,721689 & 6460,440700 & 1119,584252 & 5399,190188 \\ 596,825958 & 1119,584252 & 318,207048 & 991,320400 \\ 2509,453773 & 399,190188 & 991,320400 & 4566,815574 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Все это нам дает возможность произвести уравнивание и оценку точности координат пунктов. Результаты этой процедуры представлены в таблице 3.

Таблица 3 - Таблица результатов уравнивания и оценки параметров для двух конкурирующих методов

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.74.4

Пункты		Метод обобщенного решения				МНК		
		x^0, м	$\hat{\Delta}$, м	$\hat{x}$, м	СКО, см	$\tilde{\Delta}$, м	$\tilde{x}$, м	СКО, см
C	X	19655,7011	-0,0339	19655,6672	1,24	-0,0693	19655,6318	4,02
	Y	26751,5441	-0,0794	26751,4647	0,50	-0,1555	26751,3885	8,04
D	X	17446,9958	0,0239	17447,0197	1,02	0,0099	17447,0057	1,79
	Y	25671,4108	0,1074	25671,5181	0,57	0,0429	25671,4537	6,76

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод о том, что точность уравненных координат геодезической сети значительно повышаются с применением предложенного метода по сравнению с методом наименьших квадратов.

Для последующего анализа вычислим обобщенные ср. кв. ошибки положения пунктов исследуемой сети, полученные по двум рассмотренным методам. С этой целью воспользуемся следующими формулами (27) и (28).

$$M_{o1} = \sqrt{\frac{tr(K_{\hat{x}})}{4}} = 8,90 \quad (27)$$

$$M_{o2} = \sqrt{\frac{tr(K_{x})}{4}} = 56,92 \quad (28)$$

где $tr(K_{\hat{x}})$ и $tr(K_{\tilde{x}})$ – след ковариационных матриц (24) и (25).

Получим отношение (29).

$$\lambda = \frac{M_{o1}}{M_o} = 6,40 \qquad (29)$$

Расчеты показывают, что метод обобщенного решения позволяет получить уравненные координаты в 6,4 раза точней, чем по МНК.

Проведем дополнительный сравнительный анализ между уравненными координатами, полученными по двум выше рассмотренным методам. С этой целью вычислим истинные уклонения уравненных координат от их теоретических (модельных) значений по формулам (30) и (31):

$$\delta = \begin{pmatrix} X_C - x_{\hat{C}} \\ Y_C - y_{\hat{C}} \\ X_D - x_{\hat{D}} \\ Y_D - y_{\hat{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0371 \\ 0,1042 \\ -0,0013 \\ 0,0801 \end{pmatrix} \qquad (30)$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} X_C - x_{\tilde{C}} \\ Y_C - y_{\tilde{C}} \\ X_D - x_{\tilde{D}} \\ Y_D - y_{\tilde{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0725 \\ 0,1804 \\ 0,0127 \\ 0,1445 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

Для обобщенной сравнимости этих показателей найдем отношения евклидовых норм этих векторов (32).

$$\gamma = \frac{\|\delta_1\|}{\|\delta\|} = 1,777 \qquad (32)$$

где ‖ ‖ – евклидова норма вектора.

Выполненные расчеты показали, что уравненные значения координат определяемых пунктов, полученных по методу обобщенного решения, в 1,78 раза ближе подходят к теоретическим (модельным) координатам соответствующих пунктов.

Предлагаемый алгоритм был апробирован на модели инженерно-геодезической сети, при этом проведение полевых геодезических измерений с использованием измерительных приборов (теодолитов, тахеометров) не предусматривалось в рамках данного исследования. В то же время разработанный алгоритм может быть полезен при обработке реальных результатов наблюдений в инженерно-геодезических сетях специального назначения.

Дискуссия

В последнее время для уравнивания и оценки точности геодезических построений различного назначения широко стали применять неклассические методы псевдонормальной оптимизации в параметрических и коррелатных версиях [1], [6], [17], [22]. Эти способы эффективны для уравнивания и оценки точности свободных сетей и несвободных геодезических сетей с хорошо обусловленными системами уравнений. Однако, применение представленных методов ограничивается плохой обусловленностью матриц коэффициентов нормальных уравнений, имеющих место в инженерно-геодезических сетях специального назначения. В этих условиях предлагаемый новый метод обобщенного решения (МОР) приводит к оптимальным оценкам параметров. Это значит, что оценки вектора поправок к параметрам и ковариационная матрица уравненных параметров будут иметь минимальные евклидовы нормы. Предлагаемый алгоритм уравнивания является новым, поэтому оценки, полученные по этому методу, будем сравнивать с аналогическими оценками, полученными по методу наименьших квадратов (МНК). Для сравнительного анализа рассчитаем евклидовы нормы векторов поправок к приближенным параметрам, полученным по методу обобщенного решения (20) и методу наименьших квадратов (22) соответственно:

$$N_{\hat{\Delta}} = \|\hat{\Delta}\| = 139,95$$
$$N_{\tilde{\Delta}} = \|\tilde{\Delta}\| = 176,08$$

Расчеты показывают, что евклидова норма вектора поправок к параметрам, полученная по МОР намного меньше евклидовой нормы аналогичного вектора, полученного по МНК.

Для дополнительного анализа вычислим евклидовы нормы ковариационных матриц (23) и (24), полученных по МОР и МНК соответственно:

$$N_{\hat{x}} = \|K_{\hat{x}}\| = 231,01$$
$$N_{\hat{x}} = \|K_{\hat{x}}\| = 12638,09$$

Сравнивая эти показатели, можно сделать вывод, что евклидова норма ковариационной матрицы уравненного вектора координат для МОР значительно меньше евклидовой нормы аналогичного вектора, полученного по МНК. Следовательно, все это говорит о том, что предлагаемый метод дает оптимальные значения уравненных координат определяемых точек минимальными среднеквадратическими ошибками.

Заключение

1. Анализ результатов уравнивания и оценки точности показывает, что величины среднеквадратических ошибок уравненных координат по методу обобщенного решения имеют существенно меньшие значения в сравнении с теми же величинами среднеквадратических ошибок уравненных координат, полученных по методу наименьших квадратов.

2. Предложенный алгоритм решения с использованием обобщенно обратной матрицы можно рекомендовать для проектирования и уравнивания инженерно-геодезических сетей специального назначения в случаях как с плохо обусловленными системами нормальных уравнений, так и хорошо обусловленными системами нормальных уравнений.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Барлиани А.Г. Методы обработки и анализа пространственных и временных данных / А.Г. Барлиани. — 2016. — С. 177
2. Барлиани А.Г. Коррелатная версия уравнивания и оценки точности геодезических сетей по методу псевдонормального решения уравнений / А.Г. Барлиани. — 2010. — С. 202-206
3. Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев. — 1977. — С. 367.
4. Герасименко М.Д. Уравнивание геодезических сетей на ЭВМ по направлениям коррелатным способом / М.Д. Герасименко. — 1979. — С. 12-16.
5. Герасименко М.Д. Современный метод наименьших квадратов с геодезическими приложениями / М.Д. Герасименко. — 1998. — С. 98
6. Грищенков А.В. Новый метод решения условных уравнений при коррелатном способе уравнивания / А.В. Грищенков. — 2012. — С.117-121
7. Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов / В.С. Губанов. — 1997. — С. 216
8. Коугия В.А. Избранные труды. Исследования по теории математической обработки результатов измерений / В.А. Коугия. — 2012. — С. 447
9. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. — 1968. — С. 438
10. Маркузе Ю.И. Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей / Ю.И. Маркузе. — 1982. — С. 191.
11. Маркузе Ю.И. Теория математической обработки геодезических измерений / Ю.И. Маркузе, В.В. Голубев. — 2010. — С. 247
12. Маркузе Ю.И. Обобщенный рекуррентный алгоритм уравнивания свободных и несвободных геодезических сетей с локализацией грубых ошибок / Ю.И. Маркузе. — 2000. — С. 3-16
13. Матвеев С.И. Программа уравнивания свободных нивелирных сетей / С.И. Матвеев. — 1978. — С. 39-42.
14. Матвеев С.И. Уравнивание повторных измерений с учетом подвижности пунктов геодезической сети / С.И. Матвеев. — 1986. — С. 20–24.
15. Матвеев С.И. Единый подход к уравниванию свободных геодезических сетей / С.И. Матвеев. — 1985. — С. 6–11.
16. Машимов М.М. Уравнивание геодезических сетей / М.М. Машимов. — 1979. — С. 367.
17. Мицкевич В.И. Применение рекуррентного способа для уравнивания геодезических сетей без исходных пунктов / В.И. Мицкевич, А.А. Скрипленок, Г.М. Двоенко [и др.] — 2006. — С. 121-123
18. Мицкевич В.И. Решение примера академика А. Н. Тихонова по обработке нивелирных сетей по программному комплексу «Россия – Беларусь» методом исключения строк из матрицы коэффициентов параметрических уравнений поправок / В.И. Мицкевич, А.О. Гурко, О.В. Давыденок [и др.] — 2012. — С. 126–131
19. Мицкевич В.И. Математические методы и модели на ЭВМ / В.И. Мицкевич. — 2007. — С. 184.
20. Тихонов А.Н. О вариационном методе регуляризации при уравнивании свободных геодезических сетей / А.Н. Тихонов. — 1980. — С. 45-53
21. Сырова Н.С. Оценка точности нуль-свободных геодезических сетей различными способами / Н.С. Сырова. — 2012. — С. 122-125.
22. Сырова Н.С. Взаимосвязь расширенной и главной псевдообратных матриц при уравнивании геодезических сетей / Н.С. Сырова. — 2012. — С. 152–155
23. Христов В.К. Расширение уравнивания по способу наименьших квадратов / В.К. Христов. — 1966.
24. Яковлев Н.В. Высшая геодезия / Н.В. Яковлев. — 1989. — С. 445.
25. Schmitt G. Optimization of Geodetic Networks / G. Schmitt. — 1983. — P. 877–884
26. Schmitt G. Spectral Analysis and Optimization of Two Dimensional Networks / G. Schmitt. — 1997. — P. 47–66

Список литературы на английском языке / References in English

1. Barliani A.G. Metody obrabotki i analiza prostranstvennyh i vremennyh dannyh [Methods of Processing and Analysing Spatial and Temporal Data] / A.G. Barliani. — 2016. — P. 177 [in Russian]
2. Barliani A.G. Korrelatnaja versija uravnivanija i ocenki tochnosti geodezicheskih setej po metodu psevdonormal'nogo reshenija uravnenij [Correlate Version of Equalization and Accuracy Assessment of Geodetic Networks by Pseudonormal Equation Solving Method] / A.G. Barliani. — 2010. — P. 202-206 [in Russian]
3. Bol'shakov V.D. Teorija matematicheskoj obrabotki geodezicheskih izmerenij [Theory of Mathematical Processing of Geodetic Measurements] / V.D. Bol'shakov, P.A. Gajdaev. — 1977. — P. 367. [in Russian]

4. Gerasimenko M.D. Uravnivanie geodezicheskih setej na JeVM po napravlenijam korrelatnym sposobom [Alignment of Geodetic Networks on the Computer on Directions by Correlate Method] / M.D. Gerasimenko. — 1979. — P. 12-16. [in Russian]

5. Gerasimenko M.D. Sovremennyj metod naimen'shih kvadratov s geodezicheskimi prilozhenijami [Modern Least Squares Method with Geodetic Applications] / M.D. Gerasimenko. — 1998. — P. 98 [in Russian]

6. Grishhenkov A.V. Novyj metod reshenija uslovnyh uravnenij pri korrelatnom sposobe uravnivanija [A New Method for Solving Conditional Equations with Correlate Equalization Method] / A.V. Grishhenkov. — 2012. — P.117-121 [in Russian]

7. Gubanov V.S. Obobshhennyj metod naimen'shih kvadratov [Generalized Least Squares Method] / V.S. Gubanov. — 1997. — P. 216 [in Russian]

8. Kougija V.A. Izbrannye trudy. Issledovanija po teorii matematicheskoj obrabotki rezul'tatov izmerenij [Selected Works. Studies on the Theory of Mathematical Processing of Measurement Results] / V.A. Kougija. — 2012. — P. 447 [in Russian]

9. Mazmishvili A.I. Sposob naimen'shih kvadratov [Least Squares Method] / A.I. Mazmishvili. — 1968. — P. 438 [in Russian]

10. Markuze Ju.I. Uravnivanie i ocenka tochnosti planovyh geodezicheskih setej [Equalization and Accuracy Evaluation of Planned Geodetic Networks] / Ju.I. Markuze. — 1982. — P. 191. [in Russian]

11. Markuze Ju.I. Teorija matematicheskoj obrabotki geodezicheskih izmerenij [Theory of Mathematical Processing of Geodetic Measurements] / Ju.I. Markuze, V.V. Golubev. — 2010. — P. 247 [in Russian]

12. Markuze Ju.I. Obobshhennyj rekurrentnyj algoritm uravnivanija svobodnyh i nesvobodnyh geodezicheskih setej s lokalizaciej grubyh oshibok [Generalized Recurrent Algorithm for Equalization of Free and Non-Free Geodetic Networks with Gross Error Localization] / Ju.I. Markuze. — 2000. — P. 3-16 [in Russian]

13. Matveev S.I. Programma uravnivanija svobodnyh nivelirnyh setej [Free Leveling Programme] / S.I. Matveev. — 1978. — P. 39-42. [in Russian]

14. Matveev S.I. Uravnivanie povtornyh izmerenij s uchetom podvizhnosti punktov geodezicheskoj seti [Equalization of Repeated Measurements Taking into Account the Mobility of Geodetic Network Points] / S.I. Matveev. — 1986. — P. 20–24. [in Russian]

15. Matveev S.I. Edinyj podhod k uravnivaniju svobodnyh geodezicheskih setej [A Unified Approach to Equalization of Free Geodetic Networks] / S.I. Matveev. — 1985. — P. 6–11. [in Russian]

16. Mashimov M.M. Uravnivanie geodezicheskih setej [Equalization of Geodetic Networks] / M.M. Mashimov. — 1979. — P. 367. [in Russian]

17. Mickevich V.I. Primenenie rekurrentnogo sposoba dlja uravnivanija geodezicheskih setej bez ishodnyh punktov [Application of Recurrence Method for Equalization of Geodetic Networks without Reference Points] / V.I. Mickevich, A.A. Skriplenok, G.M. Dvoenko [et al.] — 2006. — P. 121-123 [in Russian]

18. Mickevich V.I. Reshenie primera akademika A. N. Tihonova po obrabotke nivelirnyh setej po programmnomu kompleksu «Rossija – Belarus'» metodom iskljuchenija strok iz matricy kojefficientov parametricheskih uravnenij popravok [Solving the Example of Academician A. N. Tikhonov on Processing of Levelling Networks by Software Complex "Russia – Belarus" by the Method of Exclusion of Rows from the Matrix of Coefficients of Parametric Equations of Corrections] / V.I. Mickevich, A.O. Gurko, O.V. Davydenok [et al.] — 2012. — P. 126–131 [in Russian]

19. Mickevich V.I. Matematicheskie metody i modeli na JeVM [Mathematical Methods and Models on Computers] / V.I. Mickevich. — 2007. — P. 184. [in Russian]

20. Tihonov A.N. O variacionnom metode reguljarizacii pri uravnivanii svobodnyh geodezicheskih setej [On Variational Regularization Method for Equalization of Free Geodetic Networks] / A.N. Tihonov. — 1980. — P. 45-53 [in Russian]

21. Syrova N.S. Ocenka tochnosti nul'-svobodnyh geodezicheskih setej razlichnymi sposobami [An Evaluation of the Accuracy of Zero-Free Geodetic Networks by Different Methods] / N.S. Syrova. — 2012. — P. 122-125. [in Russian]

22. Syrova N.S. Vzaimosvjaz' rasshirennoj i glavnoj psevdoobratnyh matric pri uravnivanii geodezicheskih setej [Interrelation of Extended and Principal Pseudo Inverse Matrices in Geodetic Grid Equalization] / N.S. Syrova. — 2012. — P. 152–155 [in Russian]

23. Hristov V.K. Rasshirenie uravnivanija po sposobu naimen'shih kvadratov [Extension of Least Squares Equalization] / V.K. Hristov. — 1966. [in Russian]

24. Jakovlev N.V. Vysshaja geodezija [Higher Geodesy] / N.V. Jakovlev. — 1989. — P. 445. [in Russian]

25. Schmitt G. Optimization of Geodetic Networks / G. Schmitt. — 1983. — P. 877–884

26. Schmitt G. Spectral Analysis and Optimization of Two Dimensional Networks / G. Schmitt. — 1997. — P. 47–66