ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА / DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.53

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Научная статья

Лесев В.Н.[1], Бжеумихова О.И.[2,] *, Желдашева А.О.[3], Этуев Н.Х.[4]
[2] ORCID : 0000-0001-6730-9203;
[1, 2, 3, 4] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (bzhoksana[at]gmail.com)

Аннотация

В настоящей работе впервые поставлена и исследована разрешимость классической краевой задачи для вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с инволютивным отклонением аргумента вида (-x) в прямоугольной области. Для исследуемой задачи доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения. Установлены некоторые условия на коэффициенты, при выполнении которых задача имеет единственное решение. Вопрос разрешимости задачи в требуемом классе функций методом разделения переменных редуцирован к разрешимости соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения с инволютивным отклонением аргумента, решение которого построено методом дифференцирования.

Ключевые слова: уравнение с инволюцией, единственность, существование, краевая задача, метод дифференцирования.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MODEL DIFFERENTIAL EQUATION WITH INVOLUTION IN A RECTANGULAR DOMAIN

Research article

Lesev V.N.[1], Bzheumikhova O.I.[2,] *, Zheldasheva A.O.[3], Etuev N.K.[4]
[2] ORCID : 0000-0001-6730-9203;
[1, 2, 3, 4] Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russian Federation

* Corresponding author (bzhoksana[at]gmail.com)

Abstract

In the present work, the solvability of a classical boundary value problem for a degenerate partial differential equation of the second order with an involutive deviation of the argument of the form (-x) in a rectangular domain is first established and studied. The existence and uniqueness theorems of the regular solution are proved for the studied problem. Some conditions on the coefficients, when fulfilling which the problem has a singular solution, are set. The question of solvability of the problem in the required class of functions by the method of separation of variables is reduced to the solvability of the corresponding ordinary differential equation with involutive deviation of the argument, the solution of which is constructed by the method of differentiation.

Keywords: equation with involution, singularity, existence, boundary value problem, differentiation method.

Введение

В последнее время у специалистов в области дифференциальных уравнений все больший интерес вызывают задачи для уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом. Такое внимание обусловлено как теоретическими потребностями в обобщении классических результатов, так и прикладной значимостью краевых задач для уравнений с отклоняющимся аргументом.

Наиболее важные вопросы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и их приложения изучены в работах [1], [2]. Теории разрешимости уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом и их приложениям посвящена работа [3]. В работе [4] исследуется задача о параболическом уравнении с инволюцией и установлены оценки устойчивости для решения этой задачи. Исследованию спектральных свойств классических операторов Дирака и операторов с инволюцией в однородных функциональных пространствах посвящена работа [5]. В работах [6], [7], [8] методом разделения переменных получено решение смешанных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволютивным отклонением аргумента в производной и в самой функции. Исследованию разрешимости в пространствах Соболева краевых задач для эллиптических и параболических уравнений с переменными коэффициентами и с инволюцией в старших производных, как в невырожденном, так и в вырожденном случаях посвящена работа [9].

Среди дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами особое место занимают уравнения с инволютивным отклонением аргумента.

Определенная на некотором числовом множестве E функция $\alpha(x)$ называется инволюцией на этом множестве, если при $x \in E$ выполняется $\alpha(\alpha(x)) = x$. Наиболее распространенными простейшими примерами инволюции, являются следующие виды:

1) $\alpha(x) = -x,\ x \in R$ – это инволюция, известная как отражение;

2) $\alpha(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$ – инволюция инверсии;

3) Пусть $a, b, c \in R,\ a(cb + a) > 0$,

$$\alpha(x) = \frac{a(b-x)}{cx+a},$$

- дробно-линейная инволюция (при $c=0$ – линейная инволюция).

Обыкновенные дифференциальные уравнения с инволютивным отклонением аргумента впервые встречаются в работе, опубликованной в 1816 году Ч. Баббеджом [10]. Отметим, что к дифференциальным уравнениям, содержащим инволютивное отклонение аргумента сводятся некоторые геометрические задачи [11], задачи теории фильтрации [12, С. 61], задачи исследования субгармонических колебаний, описываемых уравнениями без диссипации [13, С. 271].

В настоящей работе впервые поставлена и исследована однозначная разрешимость краевой задачи для уравнения в частных производных второго порядка с инволютивным отклонением аргумента в прямоугольной области. Подобное уравнение с общей инволюцией в старших производных изучалось в работе [9].

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx}(x,t) + t \cdot u_{tt}(x,t) + au(-x,t) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,t) : -x_0 < x < x_0, 0 < t < t_0\}$, где $a = const,\ x_0,\ t_0$ – заданные положительные числа.

Задача D **.** *Найти в области* Ω *функцию* $u(x,t)$ *, удовлетворяющую условиям*

$$u(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2\left(\Omega\right), \tag{2}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(-x_0,t) = u(x_0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le t_0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u(x,t_0) = \psi(x), \qquad -x_0 \le x \le x_0, \tag{5}$$

где $\varphi(x),\ \psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

В случае $a \equiv 0$ краевая задача (2)-(5) достаточно хорошо изучена (см., например, [14]). Если же a не является тождественно нулевой, то в этом случае настоящая задача раннее не изучалась.

Исследование однозначной разрешимости задачи

Покажем, что однородная задача D ($u(x,0) = u(x,t_0) = 0$) имеет только нулевое решение.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть коэффициент* a *уравнения (1) удовлетворяет следующему условию:*

$$|a| < \frac{2}{x_0^2\pi} + \frac{8}{t_0^2\pi},$$

тогда если решение задачи D *в области* Ω *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Действительно, умножим уравнение (1) на $-u(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω полученное равенство:

$$\begin{gathered}0 = \int\limits_\Omega uLu\,dxdt = -\int\limits_\Omega \left[u_{xx}(x,t) + t \cdot u_{tt}(x,t) + au(-x,t)\right]u(x,t)\,dxdt = \\ = \int\limits_\Omega u_x^2(x,t)\,dxdt + \int\limits_\Omega tu_t^2(x,t)\,dxdt - \int\limits_\Omega au(-x,t)u(x,t)\,dxdt.\end{gathered} \tag{6}$$

Оценим последнее слагаемое в полученном равенстве (6) применив неравенство Гёльдера и выполнив замену $z=-x$:

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_\Omega au(-x,t)u(x,t)\,dxdt\right| \le |a|\left(\int\limits_{-x_0}^{x_0}\int\limits_0^{t_0} u^2(-x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{-x_0}^{x_0}\int\limits_0^{t_0} u^2(x,t)dxdt\right)^{\frac{1}{2}} = \\ = |a|\int\limits_{-x_0}^{x_0}\int\limits_0^{t_0} u^2(x,t)dxdt.\end{gathered} \tag{7}$$

Принимая во внимание неравенства [15, С. 150]

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0}\int\limits_0^{t_0} u_x^2(x,t)dxdt \ge \frac{2}{x_0^2\pi}\int\limits_{-x_0}^{x_0}\int\limits_0^{t_0} u^2(x,t)dxdt,$$

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0}\int\limits_0^{t_0} u_t^2(x,t)dxdt \ge \frac{8}{t_0^2\pi}\int\limits_{-x_0}^{x_0}\int\limits_0^{t_0} u^2(x,t)dxdt,$$

а также из (6) и (7) получим

$$\left(\frac{2}{x_0^2\pi} + \frac{8}{t_0^2\pi} - |a|\right)\int\limits_{-x_0}^{x_0}\int\limits_0^{t_0} u^2(x,t)dxdt \le 0.$$

Следовательно, с учетом условия теоремы 1 $|a| < \frac{2}{x_0^2\pi} + \frac{8}{t_0^2\pi}$ неравенство будет справедливо лишь в случае $u(x,t) \equiv 0$ и решение задачи D единственно.

Теорема доказана.

Перейдем теперь к доказательству существования решения.

Решение задачи (2)-(5) будем искать методом Фурье в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{X''(x)+aX(-x)}{X(x)} = -\frac{t \cdot T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{9}$$

где $\lambda = const$.

Отсюда, с учетом (4), будем иметь

$$X''(x) + aX(-x) + \lambda X(x) = 0, \tag{10}$$

$$X(-x_0) = X(x_0) = 0. \tag{11}$$

Введем следующие обозначения, обозначим через μ_n и δ_m числа $\mu_n = \left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}\right)^2 - a$ и $\delta_m = \frac{\pi^2 m^2}{x_0^2} + a$, где $n, m \in \mathrm{N}$.

Исследуем задачу (10), (11). Дважды дифференцируя (10), а также учитывая равенства

$$X''(-x) = -aX(x) - \lambda X(-x),$$

$$X(-x) = -\frac{1}{a}\left[X''(x) + \lambda X(x)\right], \tag{12}$$

приходим к соотношению [16]:

$$X^{IV}(x) + 2\lambda X''(x) + \left[\lambda^2 - a^2\right] X(x) = 0. \tag{13}$$

Кроме того, из (10) и (11) вытекают условия

$$X''(-x_0) = X''(x_0) = 0. \tag{14}$$

Для функции $\mathrm{X}(\mathrm{x})$, чисел λ и a должны выполняться равенства (13), (11), (14), а также (12).

Рассмотрев различные представления общего решения уравнения (13) при различных значениях λ получим, что при $\lambda = \mu_n$ и $\lambda = \delta_m$ однородная краевая задача (10), (11) имеет ненулевые решения $X_n(x) = C_{1n} \cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right)$ и $X_m(x) = C_{2m} \sin\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right)$ соответственно. Системы собственных функций $\left\{\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{\sin\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ образуют базис в $L_2[-x_0; x_0]$.

Подставляя $\lambda = \mu_n$ в (9) приходим к соотношению

$$t \cdot T''(t) - \mu_n T(t) = 0. \tag{15}$$

Общее решение уравнения (15) будет иметь вид

$$T_n(t) = p_n\sqrt{t} I_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right) + q_n\sqrt{t} K_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right),$$

где p_n, q_n – произвольные постоянные, $I_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)$ и $K_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)$ – модифицированные функции Бесселя I и III рода соответственно [17, С. 317].

Тогда из (8) получим

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sqrt{t} I_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right) + B_n\sqrt{t} K_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right). \tag{16}$$

где $A_n,\ B_n$ – постоянные нуждающиеся в определении.

Для нахождения неизвестных постоянных $A_n,\ B_n$ удовлетворим построенное решение (16) граничным условиям (5). Учитывая поведение модифицированных функций Бесселя при $t \to 0$ [18, С. 519, С. 549], получим

$$I_1(2\sqrt{\mu_n t}) \approx \sqrt{\mu_n t}, \quad K_1(2\sqrt{\mu_n t}) \approx \frac{1}{2\sqrt{\mu_n t}}. \tag{17}$$

Удовлетворим решение (16) краевому условию (5), используя оценки (17) для функции $I_1(2\sqrt{\mu_n t})$ и $K_1(2\sqrt{\mu_n t})$, будем иметь

$$A_n = \frac{\psi_n - 2\sqrt{\mu_n t_0}\varphi_n K_1\left(2\sqrt{\mu_n t_0}\right)}{\sqrt{t_0} I_1\left(2\sqrt{\mu_n t_0}\right)}, \qquad B_n = 2\sqrt{\mu_n}\varphi_n, \tag{18}$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}\varphi(x)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right)dx, \quad \psi_n = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}\psi(x)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right)dx. \tag{19}$$

Подставляя (18) в (16), получим:

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\psi_n - 2\sqrt{\mu_n t_0}\varphi_n K_1\left(2\sqrt{\mu_n t_0}\right)}{\sqrt{t_0}I_1\left(2\sqrt{\mu_n t_0}\right)}I_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\sqrt{t} + 2\sqrt{\mu_n t}\varphi_n K_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right). \qquad (20)$$

Аналогично общее решение уравнения (9) при $\lambda = \delta_m$ определяется формулой:

$$T_m(t) = c_m\sqrt{t}I_1\left(2\sqrt{\delta_m t}\right) + d_m\sqrt{t}K_1\left(2\sqrt{\delta_m t}\right),$$

где c_m, d_m – произвольные постоянные, $I_1\left(2\sqrt{\delta_m t}\right)$ и $K_1\left(2\sqrt{\delta_m t}\right)$ – модифицированные функции Бесселя I и III рода соответственно.

Тогда из (8) будем иметь

$$u_2(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[C_m\sqrt{t}I_1\left(2\sqrt{\delta_m t}\right) + D_m\sqrt{t}K_1\left(2\sqrt{\delta_m t}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right). \qquad (21)$$

где $C_m,\ D_m$ – постоянные нуждающиеся в определении.

Решение (21), удовлетворив граничным условиям (5) с учетом (17), найдем:

$$C_m = \frac{\tau_m - 2\sqrt{\delta_m t_0}\rho_n K_1\left(2\sqrt{\delta_m t_0}\right)}{\sqrt{t_0}I_1\left(2\sqrt{\delta_m t_0}\right)}, \qquad D_m = 2\sqrt{\delta_m}\rho_m, \qquad (22)$$

где

$$\rho_m = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right)dx, \quad \tau_m = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}\psi(x)\sin\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right)dx. \qquad (23)$$

Затем, подставим (22) в (21), тогда решение при $\lambda = \delta_m$ представляется в виде:

$$u_2(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\tau_m - 2\sqrt{\delta_m t_0}\rho_m K_1\left(2\sqrt{\delta_m t_0}\right)}{\sqrt{t_0}I_1\left(2\sqrt{\delta_m t_0}\right)}I_1\left(2\sqrt{\delta_m t}\right)\sqrt{t} + 2\sqrt{\delta_m t}\rho_m K_1\left(2\sqrt{\delta_m t}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right). \qquad (24)$$

Лемма 1. *Если* $\varphi(x),\psi(x) \in C^3[-x_0,x_0]$ *и выполнены следующие условия:* $\varphi(0) = \varphi(x_0) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(x_0) = 0$, $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$, $\psi(0) = \psi(x_0) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(x_0) = 0$ *, то справедливы оценки:*

$$|\varphi_n| \le \frac{M_1|p_n|}{n^3}, \quad |\psi_n| \le \frac{M_2|q_n|}{n^3}, \quad |\rho_m| \le \frac{M_3|s_m|}{m^3}, \quad |\tau_m| \le \frac{M_4|r_m|}{m^3},$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}q_n^2 < +\infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty}s_m^2 < +\infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty}r_m^2 < +\infty, \quad M_i = const, i = \overline{1,4}.$$

Доказательство. Проинтегрировав по частям три раза в интегралах (19), (23) с учётом условий леммы получим

$$\varphi_n = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}\varphi(x)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right)dx = -\frac{2}{x_0}\frac{2x_0}{\pi+2\pi n}\int_0^{x_0}\varphi'(x)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{x_0}\left(\frac{2x_0}{\pi+2\pi n}\right)^2\int_0^{x_0}\varphi''(x)\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{x_0}\left(\frac{2x_0}{\pi+2\pi n}\right)^3\int_0^{x_0}\varphi'''(x)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right)dx = \frac{p_n}{\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}\right)^3},$$

где

$$p_n = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}\varphi'''(x)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right)dx.$$

Функция $\varphi'''(x)$ непрерывна на $[-x_0,x_0]$, то из теории рядов Фурье в силу неравенства Бесселя следующий ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n^2 \le \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}[\varphi'''(x)]^2dx.$$

Интегрируя три раза по частям в первом интеграле (23), имеем

$$\rho_m = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right)dx = \frac{2}{x_0}\frac{x_0}{\pi m}\int_0^{x_0}\varphi'(x)\cos\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{x_0}\left(\frac{x_0}{\pi m}\right)^2\int_0^{x_0}\varphi''(x)\sin\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{x_0}\left(\frac{x_0}{\pi m}\right)^3\int_0^{x_0}\varphi'''(x)\cos\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right)dx = -\frac{s_m}{\left(\frac{\pi m}{x_0}\right)^3},$$

где

$$s_m = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}\varphi'''(x)\cos\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right)dx.$$

В силу неравенства Бесселя и непрерывности функции $\varphi'''(x)$ на $[-x_0,x_0]$ будет сходиться ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} s_m^2 \le \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} [\varphi'''(x)]^2\,dx.$$

Аналогично устанавливается справедливость остальных оценок

$$|\psi_n| \le \frac{M_2|q_n|}{n^3}, \qquad |\tau_m| \le \frac{M_4|r_m|}{m^3},$$

где

$$q_n = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} \psi'''(x)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right)dx, \qquad r_m = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} \psi'''(x)\cos\left(\frac{\pi m}{x_0}x\right)dx.$$

Лемма полностью доказана.

Теорема 2. *Если выполнены условия леммы 1, то для любого* $t \in [0, t_0]$ *при больших* n *и* m *справедливы оценки:*

$$|u_1(x,t)| \le \frac{P_1(|p_n|+|q_n|)}{n^3}, \quad |u_{1t}(x,t)| \le P_2\left(\frac{|p_n|}{n}+\frac{|q_n|}{n^2}\right), \quad |u_{1x}(x,t)| \le \frac{P_3(|p_n|+|q_n|)}{n^2},$$

$$|u_{1xx}(x,t)| \le \frac{P_4(|p_n|+|q_n|)}{n}, \qquad |u_{1xt}(x,t)| \le P_5\left(|p_n|+\frac{|q_n|}{n}\right), \qquad |u_{1tt}(x,t)| \le P_6\left(\frac{|p_n|+|q_n|}{n}+\frac{|p_n|+|q_n|}{n^3}\right),$$

$$|u_2(x,t)| \le \frac{P_7(|s_m|+|r_m|)}{m^3}, \qquad |u_{2t}(x,t)| \le \frac{P_8(|s_m|+|r_m|)}{m^2},$$

$$|u_{2tt}(x,t)| \le P_9\left(\frac{|s_m|+|r_m|}{m}+\frac{|s_m|+|r_m|}{m^3}\right), \quad |u_{2x}(x,t)| \le \frac{P_{10}(|p_n|+|q_n|)}{n^2}, \quad |u_{2xx}(x,t)| \le \frac{P_{11}(|p_n|+|q_n|)}{n},$$

где $P_j = const,\ j = \overline{1, 11}$.

Доказательство. Пусть $0 \le t < \varepsilon$, где ε – достаточно малое число, $-x_0 \le x \le x_0$. Тогда пользуясь асимптотическими формулами (17) для модифицированных функций Бесселя в окрестности точки $t = 0$, оценим $u_1(x,t)$, заданную по формуле (20):

$$|u_1(x,t)| \le Q_1\,|\varphi_n|,$$

где Q_i – здесь и далее положительные постоянные.

Если положить $0 < \varepsilon \le t \le t_0$, то на основании асимптотических формул модифицированных функций Бесселя в окрестности бесконечно-удалённой точки [18, С. 520, С. 550]:

$$I_\nu(x) \approx (2\pi x)^{-\frac{1}{2}}\,e^{x}, \quad K_\nu(x) \approx \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \tag{25}$$

оценим функцию $u_1(x,t)$:

$$|u_1(x,t)| \le |\psi_n| + 2\sqrt{\mu_n t_0}\,|\varphi_n|\left(\frac{4}{\pi}\sqrt{\mu_n t_0}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{\mu_n t_0}} + 2\sqrt{\mu_n t}\,|\varphi_n|\left(\frac{4}{\pi}\sqrt{\mu_n t}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{\mu_n t}} \le$$

$$\le |\psi_n| + Q_2\,|\varphi_n|\left(\sqrt{\mu_n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{\mu_n t_0}} + Q_3(\varepsilon)\,|\varphi_n|\left(\sqrt{\mu_n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{\mu_n \varepsilon}} \le Q_4\,|\psi_n|.$$

Тогда при любом $t \in [0, t_0]$ для $n \gg 1$ справедлива оценка

$$|u_1(x,t)| \le Q_5\,(|\varphi_n| + |\psi_n|).$$

Отсюда в силу леммы 1, получим

$$|u_1(x,t)| \le \frac{P_1(|p_n|+|q_n|)}{n^3}.$$

Воспользовавшись формулами дифференцирования модифицированных функций Бесселя [18, С. 521, С. 552]

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu I_\nu(x)\right] = x^\nu I_{\nu-1}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[x^\nu K_\nu(x)\right] = -x^\nu K_{\nu-1}(x),$$

найдем производную функции $u_{1t}(x,t)$:

$$u_{1t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sqrt{\mu_n}I_0\left(2\sqrt{\mu_n t}\right) - B_n\sqrt{\mu_n}K_0\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi+2\pi n}{2x_0}x\right). \tag{26}$$

Пусть $0 \le t < \varepsilon$. В силу асимптотических формул для модифицированных функций Бесселя в в окрестности точки t=0 [1, С. 520, С. 549]

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad K_0(x) \approx \ln\frac{2}{x},$$

имеем:

$$I_0(2\sqrt{\mu_n t}) \approx 1, \quad K_0(2\sqrt{\mu_n t}) \approx \ln\frac{1}{\sqrt{\mu_n t}}. \tag{27}$$

Тогда с учетом (27) оценим функцию (26):

$$|u_{1t}(x,t)| \le |A_n|\sqrt{\mu_n} + |B_n|\sqrt{\mu_n}\ln\frac{1}{\sqrt{\mu_n t}} \le Q_6\,|A_n|\sqrt{\mu_n} + |B_n|\,Q_7\sqrt{\mu_n}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n\varepsilon}} - 1\right). \tag{28}$$

Поскольку при больших n

$$|A_n| \le Q_8\,|\psi_n|\left(\sqrt{\mu_n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{\mu_n t_0}}, \quad |B_n| \le Q_9\,|\varphi_n|\sqrt{\mu_n}. \tag{29}$$

то из (28) и (29) следует, что

$$|u_{1t}(x,t)| \le Q_{10}\,|\varphi_n|\,n^2. \tag{30}$$

Когда $0 < \varepsilon \le t \le t_0$, то из (25) и (26) будем иметь

$$|u_{1t}(x,t)| \le |A_n| \sqrt{\mu_n} \left(4\pi \sqrt{\mu_n t}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{2\sqrt{\mu_n t}} + |B_n| \sqrt{\mu_n} \left(\frac{4\sqrt{\mu_n t}}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{\mu_n t}} \le$$
$$\le Q_{11} |A_n| \left(\sqrt{\mu_n}\right)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{4}} e^{2\sqrt{\mu_n t}} + Q_{12} |B_n| \left(\sqrt{\mu_n}\right)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{\mu_n t}}.$$

Отсюда с учётом (29) имеем

$$|u_{1t}(x,t)| \le Q_{13} |\psi_n| n. \qquad (31)$$

Тогда из (31) и (30) вытекает, что при $n \gg 1$ и $t \in [0, t_0]$, справедлива следующие оценка

$$|u_{1t}(x,t)| \le Q_{14} \left(|\varphi_n| n^2 + |\psi_n| n\right)$$

или с учётом леммы 1:

$$|u_{1t}(x,t)| \le P_2 \left(\frac{|p_n|}{n} + \frac{|q_n|}{n^2}\right).$$

Найдем производные $u_{1x}(x,t)$, $u_{1xx}(x,t)$ и $u_{1xt}(x,t)$, получим:

$$u_{1x}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_n - 2\sqrt{\mu_n t_0}\varphi_n K_1\left(2\sqrt{\mu_n t_0}\right)}{\sqrt{t_0} I_1\left(2\sqrt{\mu_n t_0}\right)} I_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\sqrt{t} + 2\sqrt{\mu_n t}\varphi_n K_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\right] \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right) \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right),$$

$$u_{1xt}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sqrt{\mu_n} I_0\left(2\sqrt{\mu_n t}\right) - B_n \sqrt{\mu_n} K_0\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\right] \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right) \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right),$$

$$u_{1xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_n - 2\sqrt{\mu_n t_0}\varphi_n K_1\left(2\sqrt{\mu_n t_0}\right)}{\sqrt{t_0} I_1\left(2\sqrt{\mu_n t_0}\right)} I_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\sqrt{t} + 2\sqrt{\mu_n t}\varphi_n K_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\right] \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right).$$

Из оценки для функций $u_1(x,t)$ и $u_{1t}(x,t)$ вытекают следующие оценки:

$$|u_{1x}(x)| \le \frac{P_3(|p_n| + |q_n|)}{n^2}, \qquad |u_{1xx}(x,t)| \le \frac{P_4(|p_n| + |q_n|)}{n}, \qquad |u_{1xt}(x,t)| \le P_5\left(|p_n| + \frac{|q_n|}{n}\right),$$

Из уравнений (1) с учётом оценок из леммы 1 для функций $u_1(x,t)$ и $u_{1xx}(x,t)$, получим:

$$|u_{1tt}(x,t)| \le t^{-1} |u_{1xx}(x,t)| + a t^{-1} |u_1(-x,t)| \le P_6\left(\frac{|p_n| + |q_n|}{n} + \frac{|p_n| + |q_n|}{n^3}\right).$$

Аналогичные оценки справедливы и для функции $u_2(x,t)$ и ее производных $u_{2t}(x,t)$, $u_{2tt}(x,t)$, $u_{2x}(x,t)$, $u_{2xt}(x,t)$ и $u_{2xx}(x,t)$.

Теорема полностью доказана.

Таким образом, если функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и теоремы 2, то существует единственное решение задачи (2) - (5) и оно представимо в виде суммы сходящихся рядов

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_n - 2\sqrt{\mu_n t_0}\varphi_n K_1\left(2\sqrt{\mu_n t_0}\right)}{\sqrt{t_0} I_1\left(2\sqrt{\mu_n t_0}\right)} I_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\sqrt{t} + 2\sqrt{\mu_n t}\varphi_n K_1\left(2\sqrt{\mu_n t}\right)\right] \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2x_0} x\right) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\tau_n - 2\sqrt{\delta_m t_0}\rho_m K_1\left(2\sqrt{\delta_m t_0}\right)}{\sqrt{t_0} I_1\left(2\sqrt{\delta_m t_0}\right)} I_1\left(2\sqrt{\delta_m t}\right)\sqrt{t} + 2\sqrt{\delta_m t}\rho_m K_1\left(2\sqrt{\delta_m t}\right)\right] \sin\left(\frac{\pi m}{x_0} x\right),$$

где φ_n, ψ_n и ρ_m, τ_m определяются из равенств (19) и (23) соответственно.

Заключение

Основной целью настоящей работы было доказательство существования и единственности регулярных решений первой краевой задачи для модельного уравнения в частных производных с инволютивным отклонением в младших слагаемых, то есть решений имеющих все производные, входящие в соответсвующее уравнение. С использованием метода разделения переменных было доказано существование единственного решения классической первой краевой задачи. Несмотря на то, что результаты работы носят теоретический характер, они могут иметь широкое применение, как и в дальнейших исследованиях уравнений с отклоняющимся аргументом, а именно дифференциальных уравнений с инволютивным отклонением аргумента и краевых задач для них, так и в прикладных задачах.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Kuang Y. Delay Differential Equations: With Applications in Population Dynamics / Y. Kuang — New York: Academic Press, 1993. — 398 p.

2. Kolmanovski V. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations / V. Kolmanovski, A. Myshkis — Dordrecht: Springer Science & Business Media, 1999. — 648 p.

3. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / J. Wu — New York: Springer, 1996. — 429 p.

4. Ashyralyev A. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution / A. Ashyralyev, A. Sarsenbi // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2017. — 38:10. — p. 1295-1304. DOI: 10.1080/01630563.2017.1316997.

5. Baskakov A.G. Spectral Properties of Classical Dirac Operators and Operators with Involution in Homogeneous Function Spaces / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova // Differential Equations. — 2021. — 57. — p. 1273-1278. DOI: 10.1134/S0012266121100013.

6. Burlutskaya M.S. Fourier Method in an Initial-boundary Value Problem for a First-order Partial Differential Equation with Involution / M.S. Burlutskaya, A.P. Khromov // Comput. Math. Math. Phys. — 2011. — 51. — p. 2102-2114.

7. Mussirepova E. Solvability of Mixed Problems for the Wave Equation with Reflection of the Argument / E. Mussirepova, A.A. Sarsenbi, A.M. Sarsenbi // Math. Methods Appl. Sci. — 2022. — 45. — p. 11262-11271.

8. Kirane M. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivativ / M. Kirane, A.A. Sarsenbi // Fractal Fract. — 2023. — 7:131. — p. 1-12. DOI: 10.3390/fractalfract7020131.

9. Kozhanov A.I. Elliptic and Parabolic Equations with Involution and Degeneration at Higher Derivatives / A.I. Kozhanov, O.I. Bzheumikhova // Mathematics. — 2022. — 10:3325. — p. 1-10. DOI: 10.3390/ math10183325.

10. Babbage Ch. An Essay towards the Calculus of Functions / Ch. Babbage // Phil. trans. of the Royal Society of London. — 1816. — 11. — p. 179-256.

11. Lacroix S.F. Traite du calcul differentiel et du calcul integral / S.F. Lacroix. — 2 ed. — Paris, 1819. — Vol. 3, Chap. 8.

12. Герсеванов Н.М. Итерационное исчисление и его приложения / Н.М. Герсеванов — Москва: Машстройиздат, 1950. — 69 с.

13. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний / В.А. Плисс — Москва: Наука, 1964. — 367 с.

14. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов — Москва: Наука, 1985. — 304 с.

15. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 488 с.

16. Винер И.Я. Дифференциальные уравнения с инволюциями / И.Я. Винер // Дифференциальные уравнения. — 1969. — 5:6. — с. 1131-1137.

17. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 352 с.

18. Дунаев А.С. Специальные функции / А.С. Дунаев, В.И. Шлычков — Екатеринбург: Урал, 2015. — 938 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Kuang Y. Delay Differential Equations: With Applications in Population Dynamics / Y. Kuang — New York: Academic Press, 1993. — 398 p.

2. Kolmanovski V. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations / V. Kolmanovski, A. Myshkis — Dordrecht: Springer Science & Business Media, 1999. — 648 p.

3. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations / J. Wu — New York: Springer, 1996. — 429 p.

4. Ashyralyev A. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution / A. Ashyralyev, A. Sarsenbi // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2017. — 38:10. — p. 1295-1304. DOI: 10.1080/01630563.2017.1316997.

5. Baskakov A.G. Spectral Properties of Classical Dirac Operators and Operators with Involution in Homogeneous Function Spaces / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova // Differential Equations. — 2021. — 57. — p. 1273-1278. DOI: 10.1134/S0012266121100013.

6. Burlutskaya M.S. Fourier Method in an Initial-boundary Value Problem for a First-order Partial Differential Equation with Involution / M.S. Burlutskaya, A.P. Khromov // Comput. Math. Math. Phys. — 2011. — 51. — p. 2102-2114.

7. Mussirepova E. Solvability of Mixed Problems for the Wave Equation with Reflection of the Argument / E. Mussirepova, A.A. Sarsenbi, A.M. Sarsenbi // Math. Methods Appl. Sci. — 2022. — 45. — p. 11262-11271.

8. Kirane M. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivativ / M. Kirane, A.A. Sarsenbi // Fractal Fract. — 2023. — 7:131. — p. 1-12. DOI: 10.3390/fractalfract7020131.

9. Kozhanov A.I. Elliptic and Parabolic Equations with Involution and Degeneration at Higher Derivatives / A.I. Kozhanov, O.I. Bzheumikhova // Mathematics. — 2022. — 10:3325. — p. 1-10. DOI: 10.3390/ math10183325.

10. Babbage Ch. An Essay towards the Calculus of Functions / Ch. Babbage // Phil. trans. of the Royal Society of London. — 1816. — 11. — p. 179-256.

11. Lacroix S.F. Traite du calcul differentiel et du calcul integral [Features of Differential and Integral Calculus] / S.F. Lacroix. — 2nd ed. — Paris, 1819. — Vol. 3, chapter 8. [in French]

12. Gersevanov N.M. Iteratsionnoe ischislenie i ego prilozhenija [Iterative Calculus and its Applications] / N.M. Gersevanov — Moskva: Mashstrojizdat, 1950. — 69 p. [in Russian]

13. Pliss V.A. Nelokal'nye problemy teorii kolebanij [Non-local Problems of Oscillation Theory] / V.A. Pliss — Moskva: Nauka, 1964. — 367 p. [in Russian]

14. Smirnov M.M. Uravnenija smeshannogo tipa [Mixed Type Equations] / M.M. Smirnov — Moskva: Nauka, 1985. — 304 p. [in Russian]

15. Trenogin V.A. Funktsional'nyj analiz [Functional Analysis] / V.A. Trenogin — Moskva: FIZMATLIT, 2016. — 488 p. [in Russian]

16. Viner I.Ja. Differentsial'nye uravnenija s involjutsijami [Differential Equations with Involutions] / I.Ja. Viner // Differential Equations. — 1969. — 5:6. — p. 1131-1137. [in Russian]

17. Sabitov K.B. Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of Mathematical Physics] / K.B. Sabitov — Moskva: FIZMATLIT, 2013. — 352 p. [in Russian]

18. Dunaev A.S. Spetsial'nye funktsii [Special Functions] / A.S. Dunaev, V.I. Shlychkov — Ekaterinburg: Ural, 2015. — 938 p. [in Russian]