

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.9>**НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРИНУДИТЕЛЬНЫЕ ТАНЦЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КРЫШКИ, АРМИРОВАННОЙ СТЕРЖНЯМИ**

Научная статья

**Салманов О.Ш.<sup>1,\*</sup>**<sup>1</sup> Азербайджанский архитектурно-строительный университет, Баку, Азербайджан

\* Корреспондирующий автор (salmanov.oktay[at]inbox.ru)

**Аннотация**

В данной работе исследуются задача о несимметричных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженные осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной жидкостью. С помощью логарифмического суммирования функции Бесселя исследовано влияние физических и геометрических параметров, характеризующих систему, на эти параметры. Используя определенные частоты спереди, цилиндрическое тело, укрепленное стержнями, на которое воздействовала твердая сила, подвергалось несимметричным вынужденным движениям под действием внешней силы, изменяющейся гармонически с жидкостью. Получены аналитические выражения для смещения точек цилиндрического тела и установлены характеристические кривые в частотно-смещенном уровне путем расчета простым методом.

**Ключевые слова:** прочность на сжатие, армированный стержнями, цилиндрический корпус, танцы.**ASYMMETRICAL FORCED DANCES OF THE CYLINDRICAL LID REINFORCED WITH RODS**

Research article

**Salmanov O.S.<sup>1,\*</sup>**<sup>1</sup> Azerbaijan Architecture and Construction University, Baku, Azerbaijan

\* Corresponding author (salmanov.oktay[at]inbox.ru)

**Abstract**

In this work, the problem of asymmetric oscillations of a cylindrical shell filled with fluid and reinforced by a crossed ribbing system and loaded by axial compressive forces is studied. Using logarithmic summation of the Bessel function, the influence of physical and geometrical parameters characterizing the system on these parameters is examined. Using certain frequencies from the front, a cylindrical body reinforced with rods, which was subjected to a solid force, was subjected to asymmetric forced motions under the action of an external force varying harmonically with the fluid. Analytical expressions for the displacement of the points of the cylindrical body were obtained and characteristic curves in the frequency-displacement level were established by calculation using a simple method.

**Keywords:** compressive strength, rod-reinforced, cylindrical body, dances.**Введение**

Известно, что одной из наиболее актуальных проблем механики деформируемого твердого тела являются аналитические выражения для расчета искомых в исследуемых вопросах величин. В данной работе одна из характеристик динамической жесткости цилиндрического пласта, на который действует сжимающая сила в направлении оси, армирована стержнями и контактирует с жидкостью — удельные частоты горных пород и это получение аналитических выражений для расчета частот, исследование вынужденных движений, вызванных воздействием внешней силы, гармонически изменяющейся во времени, еще раз подтверждает актуальность темы получения аналитических выражений для расчета смещений точек цилиндрического тела.

Когда мы говорим о цилиндрической юрте, армированной стержнями, имеется в виду сочетание цилиндрической юрты с противоположно деформированными цилиндрическими стержнями. Таким образом, используются два метода исследования состояния смещения-деформирования такой конструкции под действием статических и динамических сил. Первый метод заключается в моделировании конструкции как конструктивно-ортотропной страны. Сущность второго метода состоит в том, что система уравнений, характеризующих процесс деформирования конструкции, рассчитывается с учетом дискретного расположения стержней. В частном случае из этой системы можно получить систему уравнений, характеризующую процесс деформирования конструктивно-ортотропного цилиндрического тела путем перехода к пределу, когда число колец увеличивается бесконечно.

Изучаемая нами система состоит из цилиндрической оболочки, укрепленной стержнями и жидкости, полностью заполняющей ее внутреннюю часть. Поэтому для исследования динамики такой системы воспользуемся системой уравнений движения жидкости и добавленными к ним контактными условиями.

В.З. Власов [4] заложил основы теории деформирования стержней, армированных стержнями. Когда мы говорим о цилиндрической раме, закрепленной стержнями, то имеют в виду цилиндрическую раму и систему, состоящую из стержней, жестко закрепленных на ней по координатным линиям (рис. 1).

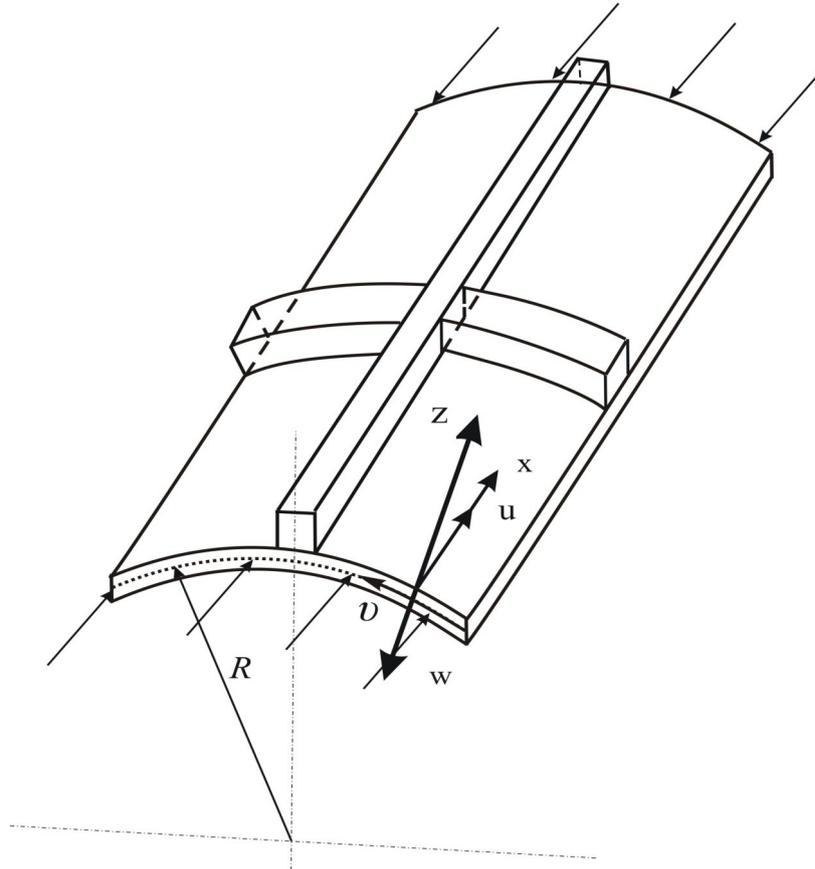


Рисунок 1 - Соприкасающаяся со средой цилиндрическая оболочка, подкрепленная стержнями, нагруженными к действию сжимающей силы

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.9.1>

Предполагается, что оси координат совпадают с основными линиями разреза ложа и вдоль этих линий стержни находятся в жестком контакте с ложем. Работа [5] была посвящена нахождению удельных частот вращения продольных и круговых стержневых армированных катушек. В [6] с помощью численных методов были найдены удельные частоты качания стержней, армированных стержнями. Система уравнений равновесия со стержнями на поверхности в произвольном положении была получена в работах [7]. Следует отметить, что характеристические и вынужденные движения гладких цилиндрических подшипников, контактирующих с окружающей средой, изучались в работах [8], [9], [10]. В работах [11], [12] исследовались вынужденные трещины гладких цилиндрических подшипников, контактирующих с окружающей средой.

### Постановка задачи

Предположим, что на цилиндрическое тело действует гармоническая сила

$$q_{zz} = q_z^{(0)} \cos n\theta \sin kx \sin \omega_1 t_1 \quad (1)$$

В выражении (1)  $q_z^{(0)}$  – амплитуда силы  $\omega_1$  – скорость изменения во времени,  $n$ ,  $k$  – соответственно, являются волновое число в направлении оси круга и цилиндра.

Если он находится под действием градиента давления, его потенциальная энергия определяется следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \Xi = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)^2 + 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\theta + \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)R^2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right] \right\} d\xi d\theta + \\ & + \frac{E_s}{2R} \sum_{j=1}^{k_1} \int_0^{2\pi} \left[ F_s \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - w - \frac{h_s}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{I_{xs}}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right)^2 + \frac{G_s}{R^2 E_s} I_{kp.s} \times \right. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \Big|_{\xi=\xi_j} d\theta - \frac{\sigma_x h}{2} \int_0^{\xi_j} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\theta - \frac{\sigma_x F_c}{2R} \sum_{i=1}^k \int_0^{\xi_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \Big|_{\theta=\theta_i} d\xi + \\ & + \frac{E_c}{2R} \sum_{i=1}^{k_2} \int_0^{\xi_1} \left[ F_c \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{h_c}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{I_{yc}}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{G_c}{E_c} I_{kp.c} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right] \Big|_{\theta=\theta_1} d\xi \end{aligned}$$

Кинетическая энергия армированной балки равна:

$$\begin{aligned} K &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t_1} \right)^2 \right] d\xi d\theta + \\ & + \frac{\bar{\rho}_c E_c F_c}{2R(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^{k_2} \int_0^{\xi_1} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t_1} \right)^2 \right] \Big|_{\theta=\theta_j} d\xi + \\ & + \frac{\bar{\rho}_s E_s F_s}{2R(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^{k_1} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial t_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t_1} \right)^2 \right] \Big|_{\xi=\xi_j} d\theta \end{aligned} \quad (3)$$

Используя решающее условие удара Остроградского-Гамильтона, по выражениям (2) и (3) можно получить выражение поведения стержневого армированного грунта:

$$\delta W = \delta(\Theta + K) = 0 \quad (4)$$

$W = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L} dt$  – эффект Гамильтона,  $\tilde{L} = K - \Pi$  является функцией Лагранжа. В уравнении (4) если провести работу вариатора и  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ , считая вариации произвольными и независимыми, получаем следующую систему уравнений движения:

$$\begin{cases} L_x(u, v, w) + q_x = 0 \\ L_y(u, v, w) + q_y = 0 \\ L_z(u, v, w) - (q_z - q_{zz}) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Получаем систему уравнений движения при перемещениях конструктивного ортотропного цилиндрического тела:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( 1 + \gamma_c^{(1)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi \partial \theta} - \left( \nu \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right) w - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = \\ & = - \frac{R^2 (1-\nu^2)}{Eh} q_x \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[ 1 + \left( 1 - \frac{h_s}{R} \right)^2 \gamma_s^{(2)} \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \vartheta + \\ & + \left\{ - \left[ 1 + \left( 1 - \frac{h_s}{R} \right) \gamma_s^{(2)} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} + (2-\nu) a^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \left[ a^2 - \left( 1 - \frac{h_s}{R} \right) \delta_s^{(2)} \right] \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right\} w - \rho_2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t_1^2} = \\ & = - \frac{R^2 (1-\nu^2)}{Eh} q_y \\ & - \left( \nu \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right) u + \left\{ - \left[ 1 + \left( 1 - \frac{h_s}{R} \right) \gamma_s^{(2)} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} + (2-\nu) a^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \right. \\ & + \left. \left[ a^2 - \left( 1 - \frac{h_s}{R} \right) \delta_s^{(2)} \right] \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right\} v + \left[ 1 + \gamma_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)} + 2 \left( \delta_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a^2 \Delta \Delta + \\ & + \left( \eta_{s1}^{(2)} + \eta_{s2}^{(2)} \right) \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \eta_c^{(1)} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \bar{p} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Big] w + \rho_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = \frac{R^2 (1-\nu^2)}{Eh} q_z \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\rho_1 = 1 + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c^{(1)}$ ,  $\rho_2 = 1 + \bar{\rho}_s \bar{\gamma}_s^{(2)}$ ,  $\rho_3 = 1 + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c^{(1)} + \bar{\rho}_s \bar{\gamma}_s^{(2)}$ .

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости выражается следующим уравнением:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

Здесь  $\Phi$  – потенциал жидкости,  $a$  – скорость диффузии вещества в жидкости. В гармоническом случае преобразуем уравнение (7) в уравнение Хельмольца:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\omega^2}{a^2} \Phi = 0 \quad (8)$$

Когда жидкость несжимаемая, поскольку  $a^2 \rightarrow \infty$ , (8) преобразуется в уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (9)$$

Если жидкость представляет собой идеальную жидкость с двухфазными пузырьками, то распространение малых скачков напряжения в такой жидкости определяется следующим уравнением [2]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{2\rho_{jo}R}{Eh} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $a^2 = \frac{1}{a_{20}(1-a_{20})} \left( \frac{\rho_{10}}{\rho_{10}-\rho_{20}} \right) \frac{p_0}{p_{10}^0}$ ;  $\rho_{10}, \rho_{20}$  – фактическая плотность нефти и газа;  $p_0$  – статическое давление;  $\rho_{jo}$  – плотность смеси;  $a_{20}$  – объем пузырьков газа; значения параметров в равновесии соответствуют нулевому показателю;  $\rho_{jo} = (1 - \alpha_{20}) \rho_{10} + \alpha_{20} \rho_{20}$ .

В систему уравнений движения (6), уравнений движения жидкости (7) и (10) добавляются контактные условия. Предполагается, что нормальные составляющие скорости и давления на поверхности контакта с жидкостью равны, а тангенциальные перемещения равны нулю:

$$\vartheta_r = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad q_z = -p, \quad q_x = q_y = 0 \quad (r = R) \quad (11)$$

Здесь  $q_x, q_y, q_z$  являются составляющими силы давления, оказываемой жидкостью на тело.

### Решение задачи

Найти  $\Phi$  потенциал, входящий в выражение (8), можно следующим образом:

$$\Phi = R(r) \sin kx \cos \omega t \quad (12)$$

Это выражение можно записать в виде (8) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left( \gamma^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (13)$$

Здесь  $\gamma^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2}$

Общее решение уравнения (13) с помощью двух функций Бесселя можно записать следующим образом:

$$R(r) = A_n Z_n^{(1)}(\gamma r) + B_n Z_n^{(2)}(\gamma r) \quad (14)$$

$Z_n(\gamma r)$  зависит от значений параметра  $\gamma$ . Параметр  $\gamma$  напишем следующим образом:

$$\gamma = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{\omega}{a} - k\right) \left(\frac{\omega}{a} + k\right)}, & \frac{\omega}{a} > k \\ i\sqrt{\left(k - \frac{\omega}{a}\right) \left(k + \frac{\omega}{a}\right)} = i\tilde{\gamma}, & \frac{\omega}{a} < k \end{cases}$$

$\gamma = i\tilde{\gamma}$  когда (13) попадает в следующий порядок:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \left( \tilde{\gamma}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) R(r) = 0$$

Решения последнего уравнения функции Бесселя  $I_n(\tilde{\gamma}r)$  и  $K_n(\tilde{\gamma}r)$ . Поскольку жидкость заполняет внутреннюю часть цилиндрического тела, она будет поступать в область решения задачи с направлением  $p = 0$ . В этот момент, поскольку функция неограничена, решение уравнения Бесселя выглядит следующим образом:

$$\Phi = A_n I_n(\tilde{\gamma}r) \sin kx \sin n\varphi \cos \omega t \quad (15)$$

зная выражение  $\Phi$  потенциала, можно определить давление  $p$  жидкости и радиальную скорость  $\vartheta_r$  ее узлов [3]:

$$P = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \vartheta_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (16)$$

Используя выражения (15) и (16), получаем:

$$\begin{aligned} P &= A_n \rho_0 \omega I_n(\tilde{\gamma}r) \sin kx \cos n\varphi \sin \omega t \\ \vartheta_r &= A_n \tilde{\gamma} I_n'(\tilde{\gamma}r) \sin kx \cos n\varphi \cos \omega t \end{aligned} \quad (17)$$

Решение системы динамики движения (5) ищется следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= A \cos n\varphi \cos kx \sin \omega t \\ v &= B \sin n\varphi \sin kx \sin \omega t \\ w &= C \cos n\varphi \sin kx \sin \omega t \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $A, B, C$  – константы,  $n$  – число волн в круговом направлении,  $\pi/k$  – число полуволн вдоль центра цилиндра,  $\omega$  – круговая частота.

Если использовать первое из выражений (11), решения (17) и (18), то константу  $A_n$  можно выразить через  $C$ :

$$A_n = \frac{\omega}{\tilde{\gamma} I_n'(\tilde{\gamma}R)} C$$

Мы можем записать это выражение в (17):

$$P = \frac{\rho_0 \omega^2 I_n(\bar{y}r)}{\bar{y} I_n'(\bar{y}R)} C \sin kx \cos n\varphi \sin \omega t$$

Если записать в это уравнение  $r = R$ , то получим для значения давления на контакте:

$$P = \frac{\rho_0 \omega^2 I_n(\bar{y}R)}{\bar{y} I_n'(\bar{y}R)} C \sin kx \cos n\varphi \sin \omega t \quad (19)$$

Системы уравнений движения грунта и жидкости, армированные стержнями (7)-(10), совместно с контактными условиями (11) позволяют решить задачу о свободных движениях конструктивно-ортотропной системы грунт-флюид. Другими словами, исследование свободных движений ортотропного цилиндрического основания, контактирующего с твердой средой и жидкостью, сводится к интегрированию системы уравнений конструктивно-ортотропного основания и уравнения движения жидкости в условиях контакта. Если принять в (6) системе уравнений величины с индексом «с» равными нулю, то получим систему уравнений движения для перемещений цилиндрических оболочек, на которую действует сжимающая сила вдоль оси и внутренняя область заполнена жидкостью, укреплена только продольными стержнями:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( 1 + \bar{y}_c^{(1)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] u + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi \partial \theta} - \left( \nu \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right) w - \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = 0 \\ & \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left[ \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \vartheta - \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t_1^2} = 0, \\ & - \left( \nu \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_c^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right) u - \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left[ 1 + a^2 \Delta \Delta + \eta_c^{(1)} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \bar{p} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] w + \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = \\ & \quad + \frac{R^2 (1 - \nu^2)}{Eh} (q_z + q_{zz}) \end{aligned} \quad (20)$$

Используя систему уравнений движения (20) и их решения (18), выражение (19) давления цилиндра на землю жидкостью и выражение (20), получим систему неоднородных линейных уравнений относительно констант  $A, B, C$ :

$$\begin{cases} a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C = 0 \\ a_{21}A + a_{22}B + a_{23}C = 0 \\ a_{31}A + a_{32}B + a_{33}C = \frac{(1 - \nu^2)R^2}{Eh} q_z^{(0)} = \tilde{q}_z^{(0)} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (21)$$

(21) представляет собой систему неоднородных линейных уравнений, обусловленную  $A, B, C$  константами системы. Мы можем легко определить константы  $A, B, C$  из этой системы:

$$A = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{\Delta} \tilde{q}_z^{(0)}; \quad B = \frac{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}}{\Delta} \tilde{q}_z^{(0)}; \quad C = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{\Delta} \tilde{q}_z^{(0)}$$

Здесь  $\Delta = a_1(\lambda)\lambda^3 + a_2(\lambda)\lambda^2 + a_3(\lambda)\lambda + a_4(\lambda)$ .

$a_i(\lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots, 4$ ) константы следующие:

$$a_1(\lambda) = \varphi_1 \rho_1; \quad a_2(\lambda) = \varphi_1 (\tilde{a}_{11} + \rho_1 \tilde{a}_{22}) - \rho_1 (\tilde{a}_{33} - \chi^2 \bar{p});$$

$$a_3(\lambda) = - (\tilde{a}_{33} - \chi^2 \bar{p}) (\tilde{a}_{11} + \rho_1 \tilde{a}_{22}) + \varphi_1 \tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} + a_{13} a_{31} + \rho_1 a_{32} a_{23} - \varphi_1 a_{21} a_{12};$$

$$a_4(\lambda) = (\tilde{a}_{33} - \chi^2 \bar{p}) (a_{21} a_{12} - \tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22}) - a_{21} a_{32} a_{13} - a_{12} a_{23} a_{31} + a_{31} a_{13} \tilde{a}_{22} + a_{32} a_{23} \tilde{a}_{11}.$$

Если записать выражения констант  $A, B, C$  в (18), то можно найти перемещения точек цилиндрической опоры, на которую действует осевая сила и внутренняя область которой заполнена жидкостью, армированной стержнями:

$$\begin{aligned} u &= \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{\Delta} \tilde{q}_z^{(0)} \cos n\theta \cos \chi \xi \sin \omega_1 t_1 \\ v &= \frac{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}}{\Delta} \tilde{q}_z^{(0)} \sin n\theta \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1 \\ w &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{\Delta} \tilde{q}_z^{(0)} \cos n\theta \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1 = w^{(0)} \cos n\theta \sin \chi \xi \sin \omega_1 t_1 \end{aligned} \quad (22)$$

Когда жидкость не сжата:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-\frac{1-\nu}{2} \chi n^2 + n^2 \delta_c^{(1)} \chi^3 - \omega_1^2 \left( \nu \chi + \delta_c^{(1)} \chi^3 \right)}{\tilde{a}_1 \lambda^3 + \tilde{a}_2 \lambda^2 + \tilde{a}_3 \lambda + \tilde{a}_4} \tilde{q}_z^{(0)} \cos n\theta \cos \chi \xi \sin \omega_1 t_1 \\ v &= \frac{\frac{1-\nu}{2} n^3 + \left( 1 + \gamma_c^{(1)} - \frac{(1+\nu)\nu}{2} \right) n \chi^2 - n \rho_1 \omega_1^2 - \frac{1+\nu}{2} \delta_c^{(1)} n \chi^4}{\tilde{a}_1 \lambda^3 + \tilde{a}_2 \lambda^2 + \tilde{a}_3 \lambda + \tilde{a}_4} 0 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \tilde{q}_z^{(0)} \sin n\theta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1 \\ w = & \frac{\omega_1^2 \left[ \left( -1 - \gamma_c^{(1)} + \frac{1+\nu}{2} \rho_1 \right) \chi^2 - \left( \frac{1-\nu}{2} + \rho_1 \right) n^2 \right] + \frac{1-\nu}{2} n^4 + \frac{1-\nu^2}{2} n^2 \chi^4 +}{\tilde{a}_1 \lambda^3 + \tilde{a}_2 \lambda^2 + \tilde{a}_3 \lambda + \tilde{a}_4} \dots \\ & + \frac{\left( 1 + \gamma_c^{(1)} \right) \chi^2 n^2 + 0,5 \left( 1 + \gamma_c^{(1)} \right) (1 + \nu) \chi^6}{1} \tilde{q}_z^{(0)} \cos n\theta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1 = \\ & = w^{(0)} \cos n\theta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1 \end{aligned} \quad (23)$$

При впитывании жидкости:

$$\begin{aligned} u = & \frac{-\frac{1-\nu}{2} \chi n^2 + n^2 \delta_c^{(1)} \chi^3 - \omega_1^2 \left( \nu \chi + \delta_c^{(1)} \chi^3 \right)}{\tilde{a}_{10} \lambda^4 + \tilde{a}_{11} \lambda^3 + \tilde{a}_{12} \lambda^2 + \tilde{a}_{13} \lambda + \tilde{a}_{14}} \tilde{q}_z^{(0)} \cos n\theta \cos \chi\xi \sin \omega_1 t_1 \\ v = & \frac{\frac{1-\nu}{2} n^3 + \left( 1 + \gamma_c^{(1)} - \frac{(1+\nu)\nu}{2} \right) n \chi^2 - n \rho_1 \omega_1^2 - \frac{1+\nu}{2} \delta_c^{(1)} n \chi^4}{\tilde{a}_{10} \lambda^4 + \tilde{a}_{11} \lambda^3 + \tilde{a}_{12} \lambda^2 + \tilde{a}_{13} \lambda + \tilde{a}_{14}} o \times \\ & \times \tilde{q}_z^{(0)} \sin n\theta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1 \\ w = & \frac{\omega_1^2 \left[ \left( -1 - \gamma_c^{(1)} + \frac{1+\nu}{2} \rho_1 \right) \chi^2 - \left( \frac{1-\nu}{2} + \rho_1 \right) n^2 \right] + \frac{1-\nu}{2} n^4 + \frac{1-\nu^2}{2} n^2 \chi^4 +}{\tilde{a}_{10} \lambda^4 + \tilde{a}_{11} \lambda^3 + \tilde{a}_{12} \lambda^2 + \tilde{a}_{13} \lambda + \tilde{a}_{14}} \dots \\ & + \frac{\left( 1 + \gamma_c^{(1)} \right) \chi^2 n^2 + 0,5 \left( 1 + \gamma_c^{(1)} \right) (1 + \nu) \chi^6}{1} \tilde{q}_z^{(0)} \cos n\theta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1 = \\ & = \tilde{w}^{(0)} \cos n\theta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1 \end{aligned} \quad (24)$$

Если записать выражение константы  $C$  входящей в (21), в (19), получим для значения давления на контакте:

$$P = \frac{\rho_0 \omega^2 I_n(\tilde{\gamma}R) (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})}{\tilde{\gamma} I_n'(\tilde{\gamma}R) \Delta} \tilde{q}_z^{(0)} \cos n\theta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1 \quad (25)$$

По тому же правилу, если использовать логарифмическую производную функции Бесселя  $J_n$ :

$$\frac{J_n'(x)}{J_n(x)} \approx \frac{n}{x} - \frac{x}{2n}$$

с учетом соотношений

$$\eta_c^{(1)} = a^\beta, \quad \delta_c^{(1)} = a^{\beta/2}, \quad n = a^{-\mu}, \quad \bar{p} = a^{\beta_1}, \quad q_z^{(0)} = a^{\beta_2}$$

можно упростить выражение (25).

Когда жидкость не сжата:

$$\begin{aligned} P = & \frac{\rho_1 \rho_2 \omega_1^4 + \omega_1^2 \left[ \left( \left( 1 + \gamma_s^{(2)} \right) \rho_1 - \frac{1-\nu}{2} \rho_2 \right) n^2 + \left( \frac{1-\nu}{2} - \left( 1 + \gamma_c^{(1)} \right) \rho_2 \right) \chi^2 \right] +}{\tilde{c}_1 \lambda^3 + \tilde{c}_2 \lambda^2 + \tilde{c}_3 \lambda + \tilde{c}_4} \dots \\ & + \frac{\frac{1-\nu}{2} n^4 + -0,5 \left( 1 + \gamma_s^{(2)} \right) (1 - \nu) n^4}{\dots} \cdot \frac{\rho_0 \omega^2 I_n(\tilde{\gamma}R)}{\tilde{\gamma} I_n'(\tilde{\gamma}R)} \tilde{q}_z^{(0)} \cos n\theta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1 \end{aligned}$$

При впитывании жидкости:

$$\begin{aligned} P = & \frac{\rho_1 \rho_2 \omega_1^4 + \omega_1^2 \left[ \left( \left( 1 + \gamma_s^{(2)} \right) \rho_1 - \frac{1-\nu}{2} \rho_2 \right) n^2 + \left( \frac{1-\nu}{2} - \left( 1 + \gamma_c^{(1)} \right) \rho_2 \right) \chi^2 \right] +}{\tilde{c}_{10} \lambda^4 + \tilde{c}_{11} \lambda^3 + \tilde{c}_{12} \lambda^2 + \tilde{c}_{13} \lambda + \tilde{c}_{14}} \dots \\ & + \frac{\frac{1-\nu}{2} n^4 + -0,5 \left( 1 + \gamma_s^{(2)} \right) (1 - \nu) n^4}{\dots} \cdot \frac{\rho_0 \omega^2 I_n(\tilde{\gamma}R)}{\tilde{\gamma} I_n'(\tilde{\gamma}R)} \tilde{q}_z^{(0)} \cos n\theta \sin \chi\xi \sin \omega_1 t_1 \end{aligned}$$

Зависимость отношения  $w^{(0)}/q_z^{(0)}$  из  $\omega_1$  – входящего в выражения (22), рассчитывалась численным методом.

Для других физических и геометрических параметров, характеризующих систему, были приняты следующие числовые значения:

$$E_c = E = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \quad \rho = \rho_c = 0,26 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4; \quad k_2 = 6; \quad k_1 = 20; \quad R = 160 \text{ мм};$$

$$\rho/\rho_0 = 0,105; \quad \nu = 0,3; \quad h = 0,45 \text{ мм}, \quad \rho = 10^3 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4, \quad h_c = 1,39 \text{ мм}; \quad L_1 = 800 \text{ мм};$$

$$F_c = 3,4 \text{ мм}^2; \quad I_{yc} = 5,1 \text{ мм}^4; \quad I_{kp.c} = 0,23 \text{ мм}^4.$$

Результаты расчетов приведены на рис. 2.

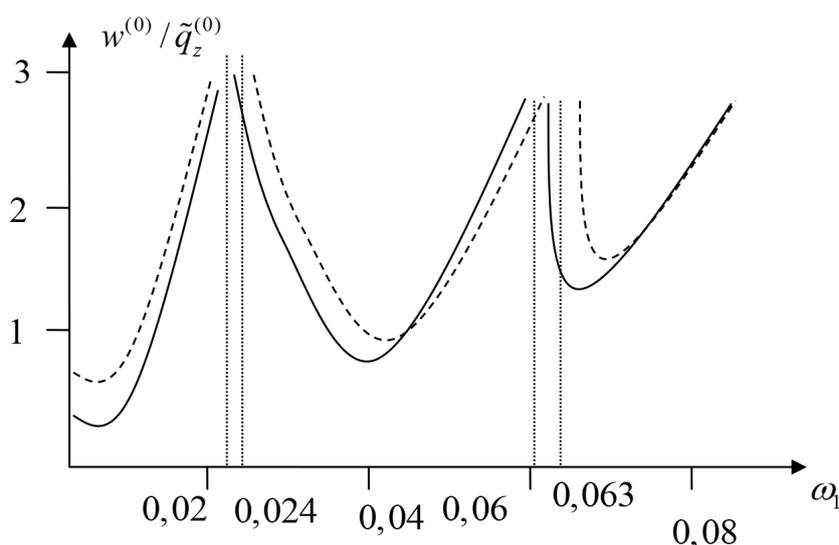


Рисунок 2 - Зависимость соотношения  $w^{(0)} / q_z^{(0)}$  от  $\omega_1$   
 DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.9.2>

*Примечание: штриховые линии соответствуют несжимаемым случаям, а сплошные линии – сжимаемым случаям*

Как видно из графика, перемещение цилиндрического стержня не ограничено на резонансных частотах. Резонансные частоты соответствуют значениям  $\omega_1 = 0,020; 0,024; 0,060; 0,063$ , отмеченным на графике, а учет сжатия жидкости приводит к уменьшению этих частот по сравнению со случаем, когда жидкость не сжата. Для расчета перемещений на резонансных частотах и вокруг них необходимо учитывать более реалистичное свойство жидкости, такое как ее вязкость.

#### **Заключение**

В статье впервые создана физико-математическая модель исследования свободных и вынужденных движений цилиндрического стержня, армированного стержнями и контактирующего с окружающей средой под действием осевой силы. Рассмотрены несимметричные случаи движений. Установлена частотная кривая системы и найдены ее кривые асимптотическим методом. Изучено влияние геометрических, физических и механических параметров, характеризующих систему, на эти частоты.

При решении данной задачи использовались уравнения теории состояний и уравнения гидродинамики. Полученное частотное уравнение системы исследовано асимптотическим методом. В процессе расчета использовалась логарифмическая сумма функции Бесселя. Трансцендентные уравнения, полученные с помощью логарифмического суммирования функции Бесселя, были объединены с алгебраическими уравнениями и найдены их корни.

Он основан на правильной постановке задачи, использовании точных решений гидродинамического уравнения, проверке точности полученных уравнений и схемы решения системы уравнений. Полученные формы сочетают в себе известные физические и математические закономерности.

Результаты, полученные в статье, могут быть использованы при исследовании характеристик динамической жесткости нефти и газопроводов, армированных стержнями, цилиндрических конструкций, контактирующих с жидкостью, применяемых в промышленности и гражданском строительстве, а также элементов конструкций.

#### **Конфликт интересов**

Не указан.

#### **Рецензия**

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

#### **Conflict of Interest**

None declared.

#### **Review**

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

#### **Список литературы / References**

1. Амензаде Р.Ю. Неосесимметричные колебания идеальной жидкости в упругой оболочке / Р.Ю. Амензаде // Доклады АНССР. — 1976. — Т. 229. — № 3. — С. 566-568.
2. Мнев Е.Н. Гидроупругость оболочек / Е.Н. Мнев, А.К. Перцев. — Л.: Судостроение, 1970. — 365 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. — М.: Наука, 1977. — 416 с.

4. Богданович А.Е. Параметрические колебания ортотропной цилиндрической оболочки с вязкоупругим наполнителем / А.Е. Богданович, В.П. Тамуж // Механика деформируемых тел и конструкций. — М., 1975. — С. 71-76.
5. Фалеева С.А. Спектр частот собственных колебания системы цилиндрической оболочки – упругий наполнитель газ / С.А. Фалеева // Исследования по теории пластин и оболочек. — 1973. — Т. 10. — С. 281-286.
6. Швец Р.Н. Осесимметричные колебания заполненных жидкостью соосных ортотропных цилиндрических оболочек / Р.Н. Швец, Р.А. Марчук // Прикладная механика. — 1985. — Т. 21. — № 8. — С. 46-51.
7. Гольденвейзер А.Л. Качественный анализ свободных колебаний упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. — 1966. — Т. 30. — Вып. I. — С. 94-108.
8. Латифов Ф.С. Асимптотический анализ задачи о свободных колебаниях системы цилиндрическая оболочка – упругая среда / Ф.С. Латифов // Известия АН Аз СССР. Серия физ.-техн. и мат. н. — 1980. — № 5. — С. 128-133.
9. Макаров Ю.Н. Собственные колебания ортотропной цилиндрической оболочки с наполнителем / Ю.Н. Макаров, Г.С. Черноглазов // Научные труды Челябинского политехн. ин-та. — 1977. — № 201. — С. 149-154.
10. Олышанская Г.Н. Собственные колебания многослойных цилиндрических оболочек / Г.Н. Олышанская, В.В. Суриков // Расчеты на прочность. — 1982. — № 4. — С. 104-110.
11. Павловский В.С. Нелинейные колебания и устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек с жидкостью при периодических воздействиях / В.С. Павловский // Прикладная механика. — 2000. — № 10. — С. 115-124.
12. Семенюк Н.П. Устойчивость и начальное закритическое поведение анизотропных цилиндрических оболочек при внешнем давлении / Н.П. Семенюк, В.М. Трач // Прикладная механика. — 2007. — № 3. — С. 86-103.

### Список литературы на английском языке / References in English

1. Amenzade R.Ju. Neosesimmetrichnye kolebanija ideal'noj zhidkosti v uprugoj obolochke [Non-axisymmetric Oscillations of an Ideal Fluid in an Elastic Shell] / R.Ju. Amenzade // Doklady ANSSR [Reports of the ASSSR]. — 1976. — Vol. 229. — № 3. — P. 566-568. [in Russian]
2. Mnev E.N. Gidrouprugost' obolochek [Hydroelasticity of Shells] / E.N. Mnev, A.K. Percev. — L.: Shipbuilding, 1970. — 365 p. [in Russian]
3. Lehnickij S.G. Teorija uprugosti anizotropnogo tela [Theory of Elasticity of Anisotropic Body] / S.G. Lehnickij. — M.: Nauka, 1977. — 416 p. [in Russian]
4. Bogdanovich A.E. Parametricheskie kolebanija ortotropnoj cilindricheskij obolochki s vjazkouprugij zapolnitelem [Parametric Vibrations of Orthotropic Cylindrical Shells with Viscoelastic Filler] / A.E. Bogdanovich, V.P. Tamuzh // Mehanika deformiruemyh tel i konstrukcij [Mechanics of deformable bodies and structures]. — M., 1975. — P. 71-76. [in Russian]
5. Faleleeva S.A. Spektr chastot sobstvennyh kolebanija sistemy cilindricheskij obolochka – uprugij zapolnitel' gaz [Frequency Spectrum of the Natural Vibrations of the Cylindrical Shell – Elastic Filler Gas System] / S.A. Faleleeva // Issledovaniya po teorii plastin i obolochek [Research on the Theory of Plates and Shells]. — 1973. — Vol. 10. — P. 281-286. [in Russian]
6. Shvec R.N. Osesimmetrichnye kolebanija zapolnennyh zhidkost'ju soosnyh ortotropnyh cilindricheskij obolochek [Axisymmetric Vibrations of Fluid-Filled Coaxial Orthotropic Cylindrical Shells Filled with Liquid] / R.N. Shvec, R.A. Marchuk // Prikladnaja mehanika [Applied Mechanics]. — 1985. — Vol. 21. — № 8. — P. 46-51. [in Russian]
7. Goldenweiser A.L. Kachestvennyj analiz svobodnyh kolebanij uprugih tonkih obolochek [Qualitative Analysis of Free Vibrations of Elastic Thin Shells] / A.L. Goldenweiser // Prikladnaja matematika i mehanika [Applied Mathematics and Mechanics]. — 1966. — Vol. 30. — Iss. I. — P. 94-108. [in Russian]
8. Latifov F.S. Asimptoticheskij analiz zadachi o svobodnyh kolebanijah sistemy cilindricheskaja obolochka – uprugaja sreda [An Asymptotic Analysis of the Problem on Free Vibrations of the Cylindrical Shell-Elastic Medium System] / F.S. Latifov // Izvesyija AN Az SSSR. Serija fiz.-tehn. i mat. n. [Proceedings of AS Az USSR. Series Physical-technical and Mathematical Sciences]. — 1980. — № 5. — P. 128-133. [in Russian]
9. Makarov Ju.N. Sobstvennye kolebanija ortotropnoj cilindricheskij obolochki s zapolnitelem [Natural Vibrations of an Orthotropic Cylindrical Shell with Filler] / Ju.N. Makarov, G.S. Chernoglazov // Nauchnye trudy Cheljabinskogo politehn. in-ta [Scientific articles of Chelyabinsk Polytechnic Institute]. — 1977. — № 201. — P. 149-154. [in Russian]
10. Ol'shanskaja G.N. Sobstvennye kolebanija mnogoslojnyh cilindricheskij obolochek [Natural Vibrations of Multilayer Cylindrical Shells] / G.N. Ol'shanskaja // Raschety na prochnost' [Strength Calculations]. — 1982. — № 4. — P. 104-110. [in Russian]
11. Pavlovskij V.S. Nelinejnye kolebanija i ustojchivost' ortotropnyh cilindricheskij obolochek s zhidkost'ju pri periodicheskij vozdejstvijah [Nonlinear Vibrations and Stability of Orthotropic Cylindrical Shells with Fluid under Periodic Actions] / V.S. Pavlovskij // Prikladnaja mehanika [Applied Mechanics]. — 2000. — № 10. — P. 115-124. [in Russian]
12. Semenjuk N.P. Ustojchivost' i nachal'noe zakriticheskoe povedenie anizotropnyh cilindricheskij obolochek pri vneshnem davlenii [Stability and Initial Transcritical Behaviour of Anisotropic Cylindrical Shells under External Pressure] / N.P. Semenjuk, V.M. Trach // Prikladnaja mehanika [Applied Mechanics]. — 2007. — № 3. — P. 86-103. [in Russian]