

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.133.59>**ОЦЕНКА ДОСТОВЕРНОСТИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО РЕШЕНИЯ В АНАЛИЗЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ С U-ОБРАЗНЫМИ ВЫРЕЗАМИ**

Научная статья

Зеньков Е.В.^{1,*}¹ORCID : 0000-0003-4414-0307;¹Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Российская Федерация¹Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (jovanny1[at]yandex.ru)

Аннотация

В статье представлена расчетная система тестов, включающая анализ сходимости численного решения модельной задачи и соответствующих вычислительных погрешностей, с целью выявления оптимального варианта КЭ-разбивки по критерию точности для области конструкции, имеющей конструктивные неоднородности в виде вырезов U-образной формы. В качестве модельной задачи рассмотрена задача теории упругости о растяжении бесконечной пластины с эллиптическим вырезом вдоль малой полуоси этого выреза (задача Нейбера). Рассматривались расчетные варианты с равномерной разбивкой КЭ-сетки области конструкции и варианты КЭ-разбивок, размеры интервалов в которых изменялись по закону геометрической прогрессии. Анализ вычислительных экспериментов показал, что относительная погрешность сходимости и относительная погрешность получаемых значений напряжений для рассмотренных вариантов разбивок КЭ-сетки закономерно связаны между собой и их отличие друг от друга не превышает 2%.

Ключевые слова: погрешность сходимости, напряженно-деформированное состояние, концентраторы напряжений, модельная задача, метод конечных элементов.

AN EVALUATION OF RELIABILITY OF FINITE-ELEMENT SOLUTION IN ANALYSING STRESS-STRAIN STATE OF STRUCTURES WITH U-SHAPED CUTOUTS

Research article

Zenkov E. V.^{1,*}¹ORCID : 0000-0003-4414-0307;¹Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation¹Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation

* Corresponding author (jovanny1[at]yandex.ru)

Abstract

The article presents a calculation test system, including the analysis of convergence of the numerical solution of the model problem and the corresponding calculated errors, in order to identify the optimal variant of FE breakdown according to the accuracy criterion for a structural region with structural inhomogeneities in the form of U-shaped cutouts. As a model problem, the problem of elasticity theory about the tensile behaviour of an infinite plate with an elliptical cutout along the small semi-axis of this cutout (the Neuber problem) was considered. Computational variants with uniform breakdown of the FE-network of the structure area and variants of FE-network breakdowns with interval sizes varying according to the law of geometric progression were examined. The analysis of computational experiments showed that the relative error of convergence and the relative error of the obtained stress values for the considered variants of FE-grid breakdowns are related to each other and their difference from each other does not exceed 2%.

Keywords: convergence error, stress-strain state, stress concentrators, modelling problem, finite element method.

Введение

В области транспортного и нефтяного машиностроения широко применяются детали и элементы конструкций с концентраторами напряжений различной конфигурации. В указанных концентраторах напряжений зачастую имеет место объемное напряженно-деформированное состояние (НДС), уровень и вид которого определяет ресурс работы рассматриваемых конструкций при их статическом и циклическом деформировании [1].

Бурное развитие и применение технологий инженерного анализа, построенных на численном методе конечных элементов (МКЭ), в решении различных технических задач механики и прочности деформированного твердого тела обусловило создание математических моделей с необходимой степенью их конечно-элементной (КЭ) дискретизации [1], [2], [3]. При этом эффективность указанной дискретизации должна обеспечивать не только приемлемую инженерную точность, достигаемую за счет подбора определенного количества и размера конечных элементов в КЭ модели, но и минимизацию требований к используемым вычислительным ресурсам ЭВМ. Последнее, в частности, может достигаться за счет использования различных алгоритмов разбиения КЭ-сетки – с равномерной КЭ разбивкой или разбивкой с использованием геометрической прогрессии.

Актуальность предлагаемого исследования объясняется тем, что точность МКЭ для конструкций, имеющих конструктивные неоднородности в виде U-образных вырезов, будет зависеть от степени КЭ дискретизации этих вырезов [2], [3], [4], [5]. Это обстоятельство будет определять достоверность НДС разработанных численных моделей

деформирования. Целью настоящей работы является установление достаточной (оптимальной) степени КЭ дискретизации области конструкции с U-образными вырезами на основе проведения вычислительных экспериментов и осуществления оценки сходимости получаемых результатов расчётного моделирования, а также оценки погрешности расчётного моделирования с использованием решений, полученных на модельных задачах теории упругости, имеющих аналитическое решение.

Методы и принципы исследования

В данной работе описывается методика анализа сходимостей численного решения для деформируемых конструкций, имеющих конструктивные неоднородности в виде U-образных вырезов. Обсуждению и моделированию подвергались следующие задачи:

- растяжение пластины с U-образным вырезом [6];
- растяжение бесконечной плоской пластины с центральным эллиптическим вырезом (задача Нейбера), аналитическое решение которой приведено в [5], [6].

Согласно [6] применение КЭ разбивок для U-образного выреза в растягиваемой пластине, снижающих погрешность определения в нем уровня максимальных напряжений до 5%, обеспечивается определённым количеством КЭ разбивок этого выреза. Как установлено в [6], для достижения точности моделирования, не превышающей 5%, дискретная модель исследуемой конструкции в зонах концентрации напряжений должна иметь на дуге, равной четверти окружности, не менее 15-ти КЭ.

Выбор оптимального варианта дискретизации U-образного выреза основан на выполненной расчетной оценке сходимости решения задачи о бесконечной пластине с эллиптическим вырезом, растягиваемой в направлении малой его полуоси, с анализом получаемых вычислительных погрешностей [7].

Аналізу подвергалась относительная погрешность сходимости получаемых значений напряжений, выражаемая соотношением

$$\varepsilon_{\text{сход}} = \frac{|\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n|}{\sigma_i^{n+1}} \quad (1)$$

и относительная погрешность получаемых значений напряжений ε

$$\varepsilon = \frac{|\sigma_i^n - \sigma_i|}{\sigma_i^n} \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) n – номер разбивки, σ_i – значение расчетной интенсивности напряжений в исследуемой зоне конструкции.

Решение задачи Нейбера строилось для двух вариантов разбивок КЭ сетки прямоугольной бесконечной пластины с эллиптическим вырезом. Первый вариант разбивки предусматривал создание КЭ сетки с равномерной разбивкой на конечные элементы, второй вариант – КЭ сетку с разбивкой её на конечные элементы, размер которых изменялся по закону геометрической прогрессии [9]. При этом размеры КЭ уменьшались по мере приближения к вершине эллиптического выреза за счет использования закона геометрической прогрессии.

На рис. 1 представлена пластина с эллиптическим вырезом, для которой далее рассматривается решение.

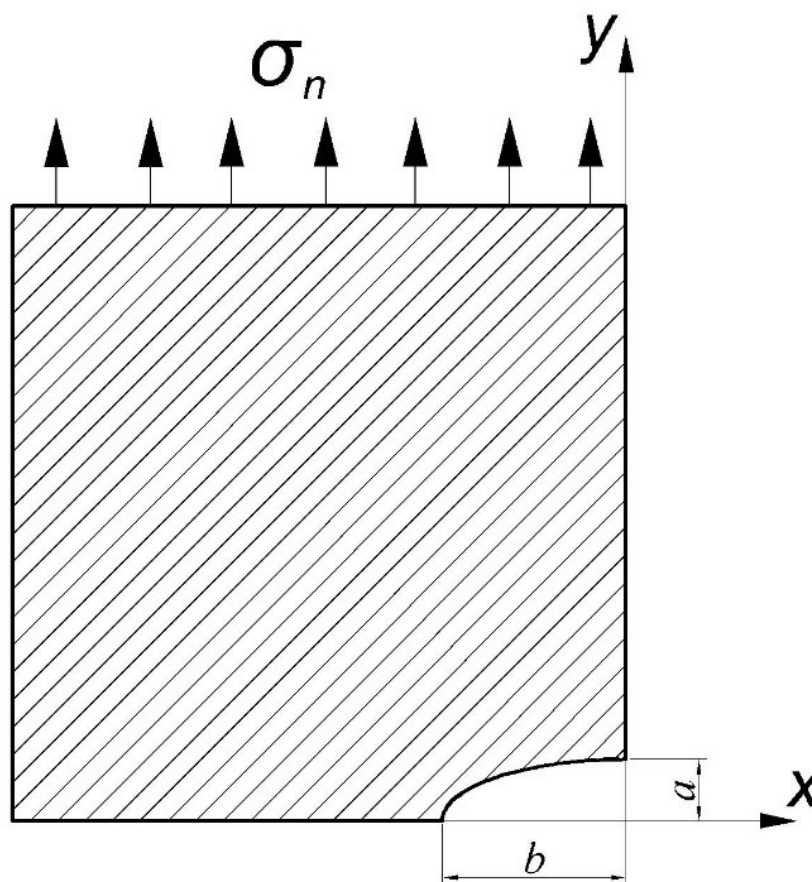


Рисунок 1 - Расчётная схема бесконечной пластины с эллиптическим вырезом

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.133.59.1>

Эллиптический вырез имел соотношение полуосей $a/b=1/3$. Оценка погрешности численного решения осуществлялась на основе использования значения коэффициента концентрации интенсивности напряжений K_σ , выражаемого соотношением

$$K = \sigma_m / \sigma_n \quad (3)$$

где σ_n – нормальные напряжения на оси y , возникающие вдали от эллиптического выреза; σ_m – нормальные напряжения на краю эллиптического выреза по оси Ox (рис. 1). В соответствии с [7], [8] для рассматриваемого соотношения полуосей эллиптического выреза значение K_σ равно 7.

Численное КЭ решение задачи Нейбера строилось с применением объемных КЭ – изопараметрического гексаэдра первого порядка аппроксимации. Моделировалась четверть пластины ввиду ее симметрии относительно центральных осей с учетом соответствующих условий кинематического закрепления. В расчете материал пластины принимался упругим, однородным и изотропным. Решались трехмерные уравнения теории упругости, реализованные в комплексе Femap [10], [11], [12]. Геометрическая модель пластины построена таким образом, что её высота и ширина более чем в 10 раз больше длины полуоси b , а толщина пластины равна единице (рис. 2).

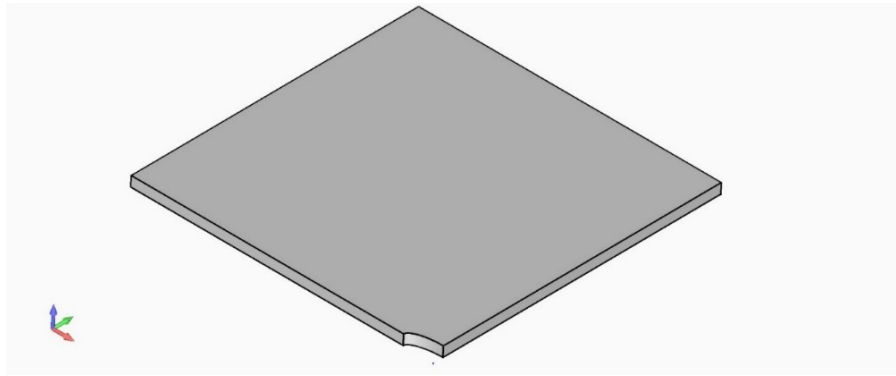


Рисунок 2 - Геометрическая модель пластины с эллиптическим вырезом
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.133.59.2>

В расчете было создано шесть КЭ моделей пластины с эллиптическим вырезом с применением равномерной КЭ разбивки (рис. 3, а-е).

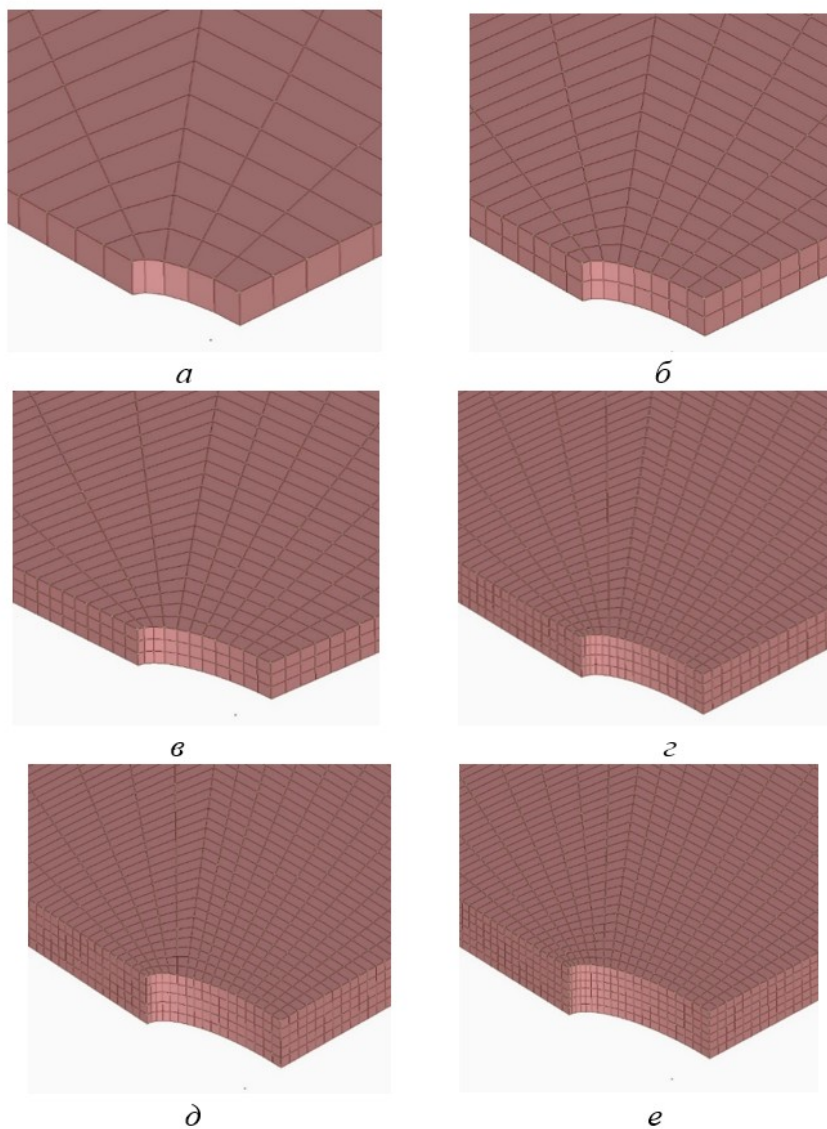


Рисунок 3 - Варианты дискретизации пластины, имеющей эллиптический вырез, на КЭ при равномерной разбивки
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.133.59.3>

Примечание: а) 5 элементов, б) 8 элементов, в) 11 элементов, г) 16 элементов, д) 18 элементов, е) 21 элемент

Приведенные на рис. 3 варианты дискретизации КЭ моделей пластины содержат разное число КЭ на четверти дуги выреза в порядке возрастания: 5, 8, 11, 16, 18 и 21. При этом по толщине пластина была разбита с 1 по 6 конечных элементов в зависимости от варианта дискретизации. КЭ модели были построены так, что конфигурация КЭ вблизи эллиптического выреза была правильной, что позволило исключить из результатов расчетов искажения, обусловленных неправильной формой КЭ.

На рис. 4 приведены варианты дискретизации КЭ модели пластины на КЭ, сгущающиеся по закону геометрической прогрессии. Создание КЭ сетки сопровождалось принятием знаменателя прогрессии $q = 2$ при числе КЭ в направлении, нормальном вырезу, равного 20.

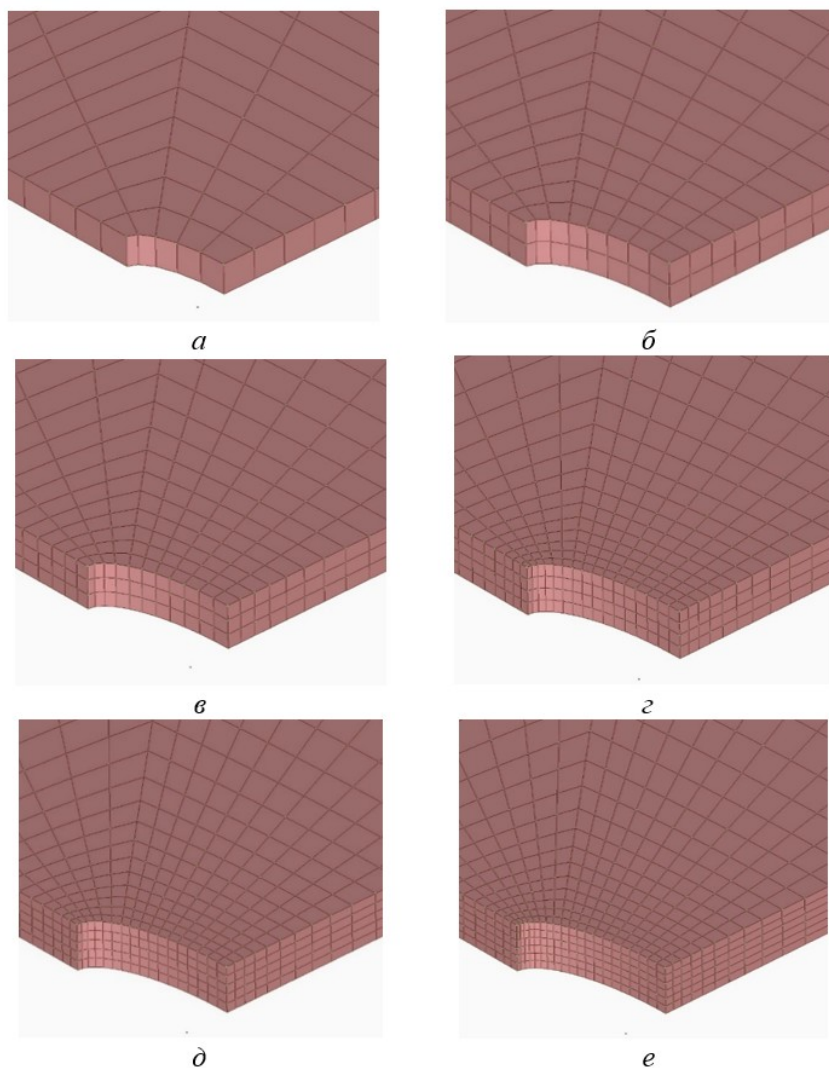


Рисунок 4 - Варианты дискретизации пластины, имеющей эллиптический вырез, на КЭ при разбивке, сгущающейся по закону прогрессии

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.133.59.4>

Примечание: а) 5 элементов, б) 8 элементов, в) 11 элементов, г) 16 элементов, д) 18 элементов, е) 21 элемент

Граничные условия кинематического закрепления пластины представлены на рис. 5. Во избежание сингулярности в матрице жесткости расчетной модели один из её узлов закреплен в осевом направлении.

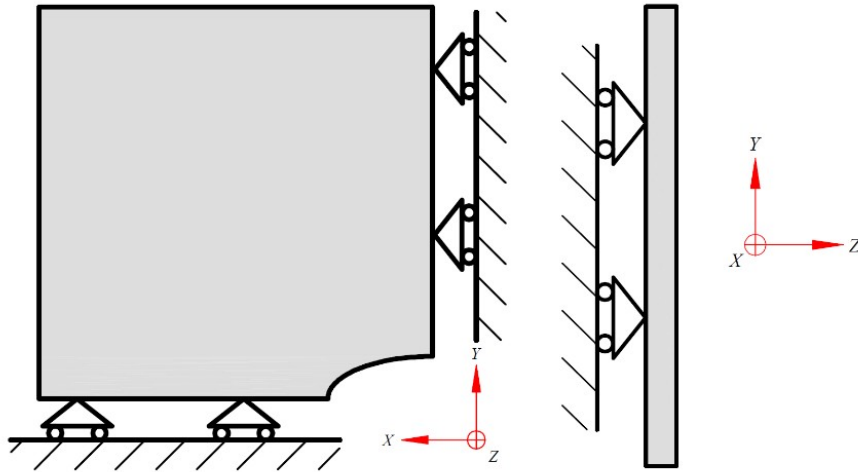


Рисунок 5 - Граничные условия кинематического закрепления пластины
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.133.59.5>

Результаты расчетного анализа

Результаты сходимостей $\varepsilon_{сход}$ конечно-элементного решения задачи Нейбера для двух случаев КЭ разбивок приведено на рис. 6. Из рис. 6 видно, что сходимость конечно-элементного решения с относительной погрешностью не более 5% достигается для четвертого расчетного варианта, когда число КЭ на дуге выреза равно 16. В численном эксперименте выявлено, что упомянутая сходимость характерна для обоих рассмотренных случаев разбивок модели на КЭ.

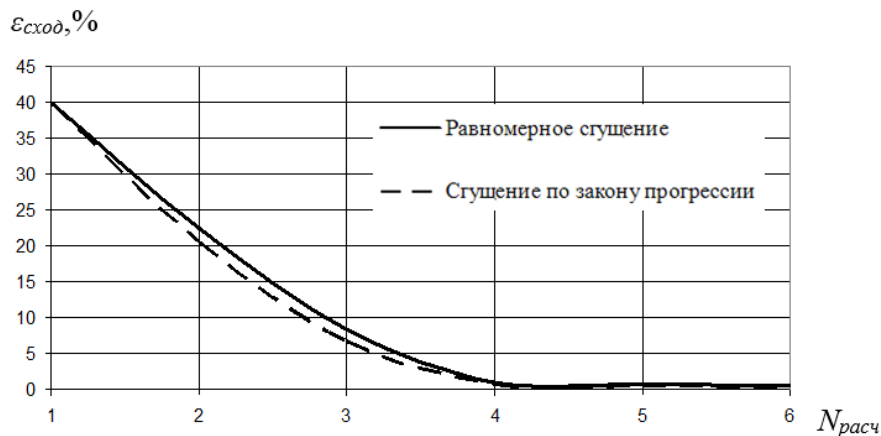


Рисунок 6 - Погрешности сходимости численного решения для рассмотренных вариантов дискретизации в задаче Нейбера
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.133.59.6>

На рис. 7 представлены результаты расчетного моделирования значений K_{σ} в области эллиптического выреза в одном из вариантов КЭ разбивки

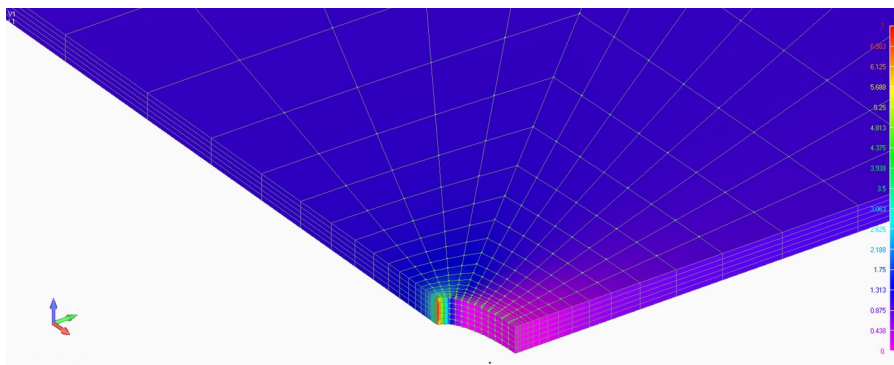


Рисунок 7 - Распределение значений коэффициента концентрации интенсивности напряжений
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.133.59.7>

На рис. 8 приведены результаты полученных в ходе КЭ расчета погрешностей напряжений ε в сравнении с эталонным решением по [7] для двух вариантов дискретизации.

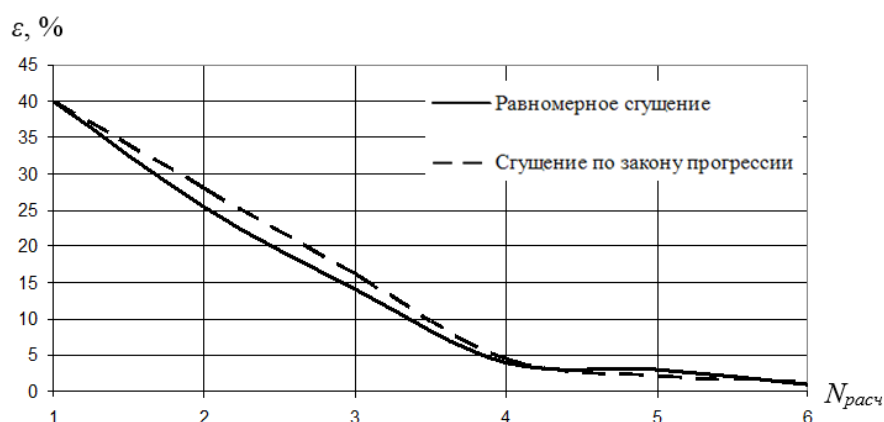


Рисунок 8 - Относительная погрешность численного решения задачи Нейбера для двух вариантов дискретизации
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.133.59.8>

Представленные выше результаты показывают, что относительная погрешность сходимости (рис. 6), выражаемая соотношением (1), и относительная погрешность численного решения (рис. 8), выражаемая соотношением (2), имеют общую тенденцию. Установлено, что применение на четверти контура 16 КЭ позволяет получить численное решение задачи о деформировании конструкций, имеющих конструктивные неоднородности в виде U-образных вырезов, с приемлемой инженерной точностью (погрешность численного решения может быть уменьшена до 2%). Следует отметить, что представленные в данной работе результаты оценки погрешностей близки к результатам исследований авторов [4], [5], [6], полученных для концентраторов напряжений в виде круговых вырезов.

Заключение

Способ дискретизации, основанный на локальном сгущении КЭ разбинок по закону геометрической прогрессии, позволяет строить вычислительно эффективные расчетные модели деформирования конструкций с U-образными вырезами. Указанное обстоятельство следует учитывать при разработке оптимальной степени КЭ дискретизации области конструкции с концентраторами напряжений в виде U-образных вырезов.

Представленная система тестов, основанная на анализе сходимости численного решения эталонной задачи и погрешности численного решения, позволяет использовать её для анализа напряженно-деформированного состояния области конструкций с конструктивными неоднородностями с различными по форме вырезами.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Когаев В.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: Справочник / В.П. Когаев, Н.А. Махутов и др. — М.: Машиностроение, 1985. — 224 с.
2. Пыхалов А.А. Исследование точности численного решения методом конечных элементов анализа напряженно-деформированного состояния образцов из материалов с неоднородной структурой на основе данных компьютерного томографа и натурального эксперимента / А.А. Пыхалов, В.П. Пашков, В.Л. Зыонг // Вестник Иркутского государственного технического университета. — 2017. — № 4(123). — С. 47-56.
3. Зеньков Е.В. Дискретное моделирование напряженно-деформированного состояния плоскоцилиндрических образцов с концентраторами напряжений в виде канавок / Е.В. Зеньков, Л.Б. Цвик, А.А. Пыхалов // Вестник Иркутского государственного технического университета. — 2011. — № 7(54). — С. 6-11.
4. Иванютенко В.И. О критерии разрушения металлических образцов с концентраторами на основе теории средних напряжений / В.И. Иванютенко, А.А. Крицук и др. // Прикладная механика. — 1990. — № 2. — С. 113-117.
5. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Наука, 1966. — 636 с.
6. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1979. — 582 с.
7. Zenkov E.V. A Comparative Analysis of the Stress-Strain State of Disc Specimens in Assessing the Structural Strength of Materials / E.V. Zenkov, L.B. Tsvik // Engineering Solid Mechanics. — 2022. — № 1. — P. 25-34. — DOI: 10.5267/j.esm.2021.12.001
8. Цвик Л.Б. Физические основы теории упругости и метода конечных элементов / Л.Б. Цвик, Е.В. Зеньков. — Иркутск: ИрГУПС, 2022. — 116 с.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М.: Мир, 1975. — 542 с.
10. Шимкович Д.Г. Femap & Nastran. Инженерный анализ методом конечных элементов / Д.Г. Шимкович. — М.: ДМК Пресс, 2008. — 704 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Kogaev V.P. Raschety detaley mashin i konstruksiy na prochnost' i dolgovechnost': Spravochnik [Calculations of Machine Parts and Structures for Strength and Durability: handbook] / V.P. Kogaev, N.A. Makhutov et al. — M.: Mashinostroenie, 1985. — 224 p. [in Russian]
2. Pykhalov A.A. Issledovaniye tochnosti chislennoy resheniya metodom konechnykh elementov analiza napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya obraztsov iz materialov s neodnorodnoy strukturoy na osnove dannykh komp'yuternogo tomografa i naturnogo eksperimenta [Investigation of the Accuracy of a Numerical Solution by the Finite Element Analysis of the Stress-Strain State of Samples from Materials with an Inhomogeneous Structure Based on Data from a Computer Tomograph and a Full-Scale Experiment] / A.A. Pykhalov, V.P. Pashkov V.L. Zyong // Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of the Irkutsk State Technical University]. — 2017. — № 4(123). — P. 47-56. [in Russian]
3. Zenkov E.V. Diskretnoye modelirovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya ploskotsilindricheskikh obraztsov s konsentratorami napryazheniy v vide kanavok [Discrete Modeling of the Stress-Strain State of Flat-Cylindrical Specimens with Stress Concentrators in the Form of Grooves] / E.V. Zenkov, L.B. Tsvik, A.A. Pyhalov // Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of the Irkutsk State Technical University]. — 2011. — № 7(54). — P. 6-11. [in Russian]
4. Ivanyutenko V.I. O kriterii razrusheniya metallicheskih obraztsov s konsentratorami na osnove teorii srednikh napryazheniy [On the Criterion for the Destruction of Metal Samples with Concentrators Based on the Theory of Medium Stresses] / V.I. Ivanyutenko, A.A. Kritsuk et al. // Prikladnaya mekhanika [Applied Mechanics]. — 1990. — № 2. — P. 113-117. [in Russian]
5. Timoshenko S.P. Plastinki i obolochki [Plates and Shells] / S.P. Timoshenko, S. Voinovsky-Krieger. — M.: Nauka, 1966. — 636 p. [in Russian]
6. Timoshenko S.P. Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity] / S.P. Timoshenko, J. Goodier. — M.: Nauka, 1979. — 582 p. [in Russian]
7. Zenkov E.V. A Comparative Analysis of the Stress-Strain State of Disc Specimens in Assessing the Structural Strength of Materials / E.V. Zenkov, L.B. Tsvik // Engineering Solid Mechanics. — 2022. — № 1. — P. 25-34. — DOI: 10.5267/j.esm.2021.12.001
8. Tsvik L.B. Fizicheskiye osnovy teorii uprugosti i metoda konechnykh elementov [Physical Foundations of the Theory of Elasticity and the Finite Element Method] / L.B. Tsvik, E.V. Zenkov. — Irkutsk: Irkutsk State Transport University, 2022. — 116 p. [in Russian]
9. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite Element Method in Engineering] / O. Zenkevich. — M.: Mir, 1975. — 542 p. [in Russian]
10. Shimkovich D.G. Femap & Nastran. Inzhenernyy analiz metodom konechnykh elementov [Femap & Nastran. Engineering Analysis by the Finite Element Method] / D.G. Shimkovich. — M.: DМК Press, 2008. — 704 p. [in Russian]