ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА / COMPUTATIONAL MATHEMATICS

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.5

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Научная статья

Барабаш О.П.[1, *]
[1] Воронежский Государственный Университет, Воронеж, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (navys9[at]yandex.ru)

Аннотация

Работа посвящена построению приближенного решения параболического дифференциального уравнения с оператором Бесселя. Решение задачи ищется в виде линейной комбинации кусочно-непрерывных базисных функций, имеющих компактный носитель. Построение решения осуществляется в два этапа. Первоначально проводится аппроксимация по пространственной переменной с использованием проекционно-сеточного метода Бубнова-Галеркина. Затем ввиду простоты области изменения временной переменной, представляющей собой отрезок [0,T], проводится приближение по t с помощью конечно-разностного метода. Для этого используется неявная схема. Возникающая при этом система уравнений имеет трехдиагональную матрицу и решается методом прогонки.

Ключевые слова: оператор Бесселя, метод Бубнова-Галеркина, финитные функции, проекционно-сеточный метод, конечно-разностный метод.

APPLICATION OF THE PROJECTION-GRID METHOD TO SOLVE A NON-STATIONARY PROBLEM

Research article

Barabash O.P.[1, *]
[1] Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

* Corresponding author (navys9[at]yandex.ru)

Abstract

The work is dedicated to the construction of an approximate solution of a parabolic differential equation with a Bessel operator. The solution of the problem is sought in the form of a linear combination of piecewise continuous basis functions having a compact carrier. The construction of the solution is carried out in two stages. Initially, approximation on the spatial variable is carried out using the Bubnov-Galerkin projection-grid method. Then, due to the simplicity of the time variable domain, which is the interval [0,T], an approximation on t is conducted using the finite-difference method. For this purpose, an implicit scheme is used. The resulting system of equations has a tridiagonal matrix and is solved by the run method.

Keywords: Bessel operator, Bubnov-Galerkin method, finite functions, projective-grid method, finite-difference method.

Введение

Проекционно-сеточные методы в настоящее время являются чрезвычайно действенными инструментами решения задач математической физики: теплообмена, гидродинамики, электродинамики, механики твердого деформируемого тела и топологической оптимизации.

Общая теория разностных методов разработана А.А. Самарским [1]. Различные приближенные методы решения краевых задач изложены в монографии Г.И. Марчука [2], также классический вариационный подход описан в книге С.Г. Михлина [3]. Наиболее обширные результаты, полученные при численном решении, относятся к регулярным краевым задачам, порождаемым невырожденными уравнениями с гладкими коэффициентами. Эти исследования опираются на теорию аппроксимаций в функциональных пространствах. Гораздо меньше изучены подобные вопросы для сингулярных уравнений.

В этой связи необходимо отметить работу [4], в которой рассмотрено уравнение

$$-\frac{d}{dx}\left(x^k p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x)$$

для $0\le k\le \frac{5}{2}, p(x)>0$. В ней указан порядок аппроксимации в энергетическом пространстве, зависящий от k и гладкости функции f.

В работе [5] В.В. Катраховым и А.А. Катраховой изучена сходимость метода Галеркина для краевой задачи:

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+qu=f(x,y),$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}=0, \left.u\right|_{\Gamma^+}=0,$$

где $\Gamma^+=\partial\Omega^+\backslash\{(x,y):x=0\}, \Omega^+\subset R_+^2$.

Ю.Л. Гусманом и А.А. Оганесяном [6] был развит вариационно-разностный подход для двумерного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+qu=f(x,y),$$

где $0\le\mu<1$. Получены точные по порядку оценки погрешности метода.

Начало изучения вырождающихся уравнений с оператором Бесселя было положено в работах И.А. Киприянова [7], Я.И. Житомирского [8], и получило развитие в работах учеников Киприянова: С.М. Ситника [9], [10], И.П. Половинкина [11], А.Б. Муравника [12], [13], Л.Н. Ляхова [14].

Несмотря на то, что проекционно-разностные методы для нестационарных уравнений были разработаны в трудах В.В. Катрахова и А.А. Катраховой, перенесение их на нестационарные случаи не произошло. В теории приближенных методов решения таких задач на протяжении многих лет появлялись лишь разрозненные результаты. Между тем эта задача ждет своего решения, поскольку методы точного решения и методы исследования качественных свойств решений развиваются уже достаточно бурно.

В настоящей статье на основе вариационного подхода устанавливается разрешимость сингулярного параболического уравнения, в котором по одной из переменных действует оператор Бесселя. Приводятся оценки погрешности аппроксимации точного решения методом Бубнова-Галеркина.

Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{du}{dt} + Lu = f, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_{(0)}, \tag{2}$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = 0, u(1) = 0. \tag{3}$$

где $f = f(x,t) \in H = L_{2,\gamma}(\Omega) \forall t, x \in \Omega = (0,1), t \in [0,T], u_{(0)} = u_{(0)}(x)$.

Оператор L имеет вид:

$$Lu = -x^{-\gamma}\frac{d}{dx}\left(x^{\gamma}p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u,$$

$$D(L) = \left\{v : v \in L_{2,\gamma}, Lv \in L_{2,\gamma}, \tfrac{dv}{dx} \in L_{2,\gamma}, \tfrac{dv}{dx}(0) = v(1) = 0\right\}.$$

Скалярное произведение и норма в $L_{2,\gamma}(0,1)$ задаются следующим образом:

$$(u,v)_{L_{2,\gamma}(0,1)} = \int_0^1 x^{\gamma}u(x)v(x)dx,$$

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(0,1)} = \left(\int_0^1 x^{\gamma}f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Функции $p(x) \in C^1[0,1]$ и $q(x) \in C[0,1]$, $p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \geq 0, p_0 = const$.

Параметр $\gamma > 0, \gamma \neq 1$.

Энергетическое пространство, соответствующее оператору L , будем обозначать H_L . Скалярное произведение в H_L имеет вид

$$[u,v] = \int_0^1 x^{\gamma}\left(p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + quv\right). \tag{4}$$

Весовые пространства $H_{\gamma}^{m}(0,1)$ (пространства И.А. Киприянова) определяются как замыкание класса $C_{\text{чет}}^{\infty}([0,1]) \subset C^{\infty}([0,1])$, состоящего из четных функций по норме

$$\|f\|_{m,\gamma} = \left(\sum_{\substack{0\leq i_1+2i_2\leq m\\ i_1=0,1}}\int_0^1 x^{\gamma}\left|D_x^{i_1}B_x^{i_2}f(x)\right|^2\right)^{1/2} dx,$$

где $D_x = \dfrac{d}{dx}, B_x = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{\gamma}{x}\dfrac{d}{dx}$ - оператор Бесселя.

Произвольно выберем функцию $v(x,t)$ из пространства $H_{\gamma}^{1}((0,1)\times\Omega)$, такую что $v(x,T) = 0$. Умножим (1) на $x^{\gamma}v$ и проинтегрируем по области $(0,T)\times\Omega$:

$$\int_0^T\left[\int_0^1 x^{\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}v dx - \int_0^1\left(x^{\gamma}x^{-\gamma}\frac{d}{dx}\left(x^{\gamma}p(x)\frac{du}{dx}\right)v + x^{\gamma}q(x)uv - x^{\gamma}fv\right)dx\right]dt = 0.$$

После применения интегрирования по частям получим:

$$\int_0^T\left[-\left(u,\frac{\partial v}{\partial t}\right) + [u,v] - (f,v)\right]dt = (u_{(0)}, v(x,0)), \tag{5}$$

где $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L_{2,\gamma}(\Omega)}$.

Будем называть обобщенным решением задачи (1)-(3) такую функцию $u \in L_{2,\gamma}((0,T)\times\Omega)$, которая имеет производную $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L_{2,\gamma}((0,T)\times\Omega)$ и удовлетворяющую уравнению (5) для любой функции $v \in H^1_\gamma((0,T)\times\Omega)$, такой что $\dfrac{\partial v(0,t)}{\partial x} = v(1,t) = 0$ и $v(x,T) = 0$.

Приближение решения при такой постановке можно производить как по переменной x , так и по переменной t в виде рядов с базисными функциями $\phi_i(x), \phi_j(t)$.

В этом случае по временной переменной получаются, как правило, неявные схемы, и затруднено использование удобных на практике разностных схем для аппроксимации производной по t .

Пусть такое решение существует и $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_{2,\gamma}((0,T)\times\Omega)$.

Примем $v(x,t) = w(x)\Psi(t)$, где $w(x) \in H^1_\gamma(\Omega), w(0) = 0, \dfrac{d\Psi}{dt} \in L_{2,\gamma}(0,T), \Psi(T) = 0$.

После подстановки $v(x,t)$ в (5) и интегрирования по частям:

$$\int_0^T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w\right) + [u,w] - (f,w)\right]\Psi(t)dt + \Psi(0)\left(u(x,0) - u_{(0)}, w\right) = 0.$$

Учтем произвольность $\Psi(t)$, тогда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w\right)(t) + [u,w](t) = (f,w)(t), \tag{6}$$

$$(u(x,0), w) = (u_{(0)}, w). \tag{7}$$

Будем называть обобщенным решением задачи (1)-(3) функцию $u(x,t)$, которая почти при каждом $t \in (0,T)$ принадлежит энергетическому пространству H_L со скалярным произведением вида (4), имеет производную $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_{2,\gamma}((0,T)\times\Omega)$ и почти всюду на $(0,T)$ удовлетворяющую равенствам (6)-(7) при любом выборе $w(x) \in H_L$.

Второе определение обобщенного решения требует наличия $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_{2,\gamma}((0,T)\times\Omega)$, однако при такой постановке переменную t можно рассматривать как параметр.

Построение проекционно-разностной схемы

Наличие временной переменной t будет сказываться на форме применения проекционно-сеточного метода. Для приближенного решения задачи (1)–(3) будем использовать второе определение обобщенного решения. В первую очередь выполним аппроксимацию по пространственной переменной с помощью проекционно-сеточного метода, а затем приближение по времени t с использованием конечно-разностных методов.

Введем на $[0,1]$ равномерную сетку $0 = x_0 < x_1 < .. < x_{n-1} < x_n = 1, i = 1,..,n, h = x_i - x_{i-1}$. В качестве базисных функций $\{\phi_i\}$ выберем финитные функции из предположения, что $-x^{-\gamma}\dfrac{d}{dx}\left(x^\gamma \dfrac{d\phi}{dx}\right) = 0$. Значит, для случая, когда $\gamma \neq 1$, имеем

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma} - x_{i-1}^{1-\gamma}}{x_i^{1-\gamma} - x_{i-1}^{1-\gamma}}, x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1}^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}}{x_{i+1}^{1-\gamma} - x_i^{1-\gamma}}, x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), i = 1,..,n-1. \end{cases} \tag{8}$$

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1, x \in (x_0, x_1), \\ \frac{x_2^{1-\gamma} - x^{1-\gamma}}{x_2^{1-\gamma} - x_1^{1-\gamma}}, x \in (x_1, x_2). \end{cases} \qquad \phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma} - x_{n-1}^{1-\gamma}}{x_n^{1-\gamma} - x_{n-1}^{1-\gamma}}, x \in (x_{n-1}, x_n), \\ 0, x \notin (x_{n-1}, x_n). \end{cases} \tag{9}$$

Приближенное решение задачи будем искать в виде $u_h = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i(t)\phi_i(x)$.

Тогда коэффициенты, являющиеся функциями от $t \in (0,T)$, будем искать из системы ОДУ, полученной с помощью метода Бубнова-Галеркина из (6)–(7):

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \phi_i\right)(t) + [u_h, \phi_i](t) = (f, \phi_i)(t), \tag{10}$$

$$(u_h(x,0) - u_{(0)}, \phi_i), i = 1,..,n-1. \tag{11}$$

Уравнения (10)–(11) могут быть записаны в матричном виде

$$\widehat{B}\frac{da}{dt}+\widehat{A}a=F(t), \tag{12}$$

$$\widehat{B}a(0)=a_{(0)}, \tag{13}$$

$$a(t)=\left(a_1(t),\ldots,a_{n-1}(t)\right)^T, F(t)=\left(F_1(t),\ldots,F_{n-1}(t)\right)^T, F_i(t)=(f,\phi_i)(t),$$

$$a_{(0)}=\left(a_{(0),1},\ldots,a_{(0),n-1}\right)^T, a_{(0),i}=(u_{(0)},\phi_i), \widehat{B}=\left(B_{ij}\right), \widehat{A}=\left(A_{ij}\right)$$

$$A_{ij}=A_{ji}=\left[\phi_i,\phi_j\right]=\int_{\Omega_{ij}}x^\gamma\left(p\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}+q\phi_i\phi_j\right)dx, j=1,\ldots,n-1. \quad B_{ij}=B_{ji}=\left(\phi_i,\phi_j\right)=\int_{\Omega_{ij}}x^\gamma\phi_i\phi_j dx.$$

$$\Omega_{ij}=(0,1)\cap supp\phi_i\cap supp\phi_j, \Omega_j=(0,1)\cap supp\phi_j.$$

$$F_i=\int\limits_{\Omega_j}x^\gamma f(x,t)\phi_i dx, i=1,..,n-1.$$

Нахождение вида матриц

Для заданных базисных функций (8)–(9) найдем вид матриц, входящих в уравнения (12)–(13).

Поскольку скалярное произведение базисных функций в пространстве $L_{2,\gamma}(\Omega)$ отлично от 0 только для соседних функций, то для матрицы $\widehat{A}$ требуется найти только элементы $A_{j-1,j}, A_{j,j}, A_{j+1,j}$. Запишем их вид:

$$\begin{aligned}A_{j-1,j}&=\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}x^\gamma p\frac{d\phi_{j-1}}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx+\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}x^\gamma q\phi_{j-1}\phi_j dx=\frac{p_{j-1/2}(\gamma-1)}{x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}}+\\&+\frac{q_{j-1/2}}{\left(x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{(x_j^{3-\gamma}-x_{j-1}^{3-\gamma})(1-\gamma)}{2(3-\gamma)}+\frac{(\gamma-1)(x_j^2x_{j-1}^{1-\gamma}-x_{j-1}^2x_j^{1-\gamma})}{2(\gamma+1)}\right),\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}A_{j,j}&=\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}x^\gamma p\frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx+\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}x^\gamma q\phi_j\phi_j dx+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}x^\gamma p\frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}x^\gamma q\phi_j\phi_j dx=\\&=\frac{p_{j-1/2}(1-\gamma)}{x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}}+\frac{q_{j-1/2}}{\left(x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{x_j^{3-\gamma}}{3-\gamma}-\frac{x_{j-1}^{3-\gamma}(\gamma-1)^2}{(3-\gamma)(\gamma+1)}-x_{j-1}^{1-\gamma}x_j^2+\frac{x_{j-1}^{2-2\gamma}x_j^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right)+\\&+\frac{p_{j+1/2}(1-\gamma)}{x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}}+\frac{q_{j+1/2}}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{x_{j+1}^{3-\gamma}(1-\gamma)^2}{(3-\gamma)(\gamma+1)}-\frac{x_j^{3-\gamma}}{3-\gamma}+x_{j+1}^{1-\gamma}x_j^2-\frac{x_j^{1+\gamma}x_{j+1}^{2-2\gamma}}{\gamma+1}\right),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}A_{j+1,j}&=\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}x^\gamma p\frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_{j+1}}{dx}dx+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}x^\gamma q\phi_{j+1}\phi_j dx=\frac{p_{j+1/2}(\gamma-1)}{x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}}+\\&+\frac{q_{j+1/2}}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{(x_{j+1}^{3-\gamma}-x_j^{3-\gamma})(1-\gamma)}{2(3-\gamma)}+\frac{(\gamma-1)(x_{j+1}^2x_j^{1-\gamma}-x_j^2x_{j+1}^{1-\gamma})}{2(\gamma+1)}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

На основе приведенных вычислений запишем вид матрицы $\widehat{A}$

$$A_{n-1\times n-1}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&&&\\A_{21}&A_{22}&A_{23}&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&&A_{n-2,n-1}\\&&&A_{n-1,n-2}&A_{n-1,n-1}\end{bmatrix}$$

Аналогично для матрицы $\widehat{B}$ выпишем вид элементов $B_{ji}=\left(\phi_i,\phi_j\right)=\int_{\Omega_{ij}}x^\gamma\phi_i\phi_j dx$:

$$B_{j-1,j}=\frac{1}{\left(x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{(x_j^{3-\gamma}-x_{j-1}^{3-\gamma})(1-\gamma)}{2(3-\gamma)}+\frac{(\gamma-1)(x_j^2x_{j-1}^{1-\gamma}-x_{j-1}^2x_j^{1-\gamma})}{2(\gamma+1)}\right), \tag{17}$$

$$B_{j,j} = \frac{1}{\left(x_j^{1-\gamma} - x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{x_j^{3-\gamma}}{3-\gamma} - \frac{x_{j-1}^{3-\gamma}(\gamma-1)^2}{(3-\gamma)(\gamma+1)} - x_{j-1}^{1-\gamma}x_j^2 + \frac{x_{j-1}^{2-2\gamma}x_j^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma} - x_j^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{x_{j+1}^{3-\gamma}(1-\gamma)^2}{(3-\gamma)(\gamma+1)} - \frac{x_j^{3-\gamma}}{3-\gamma} + x_{j+1}^{1-\gamma}x_j^2 - \frac{x_j^{1+\gamma}x_{j+1}^{2-2\gamma}}{\gamma+1}\right), \tag{18}$$

$$B_{j+1,j} = \frac{1}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma} - x_j^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{(x_{j+1}^{3-\gamma} - x_j^{3-\gamma})(1-\gamma)}{2(3-\gamma)} + \frac{(\gamma-1)(x_{j+1}^2 x_j^{1-\gamma} - x_j^2 x_{j+1}^{1-\gamma})}{2(\gamma+1)}\right). \tag{19}$$

$$B_{n-1\times n-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & & & \\ B_{21} & B_{22} & A_{23} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & B_{n-2,n-1} \\ & & & B_{n-1,n-2} & B_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что полученные матрицы являются положительно определенными и симметричными.

Численное решение системы ОДУ

Введем на $[0,T]$ равномерную сетку $t_j = j\tau, \tau = T/J, j = 0,\ldots,J$.

Перепишем уравнения (12)–(13), используя для аппроксимации по времени неявную схему, имеющую первый порядок аппроксимации по τ

$$\widehat{B}a_0 = a(0), \tag{20}$$

$$\widehat{B}\frac{a_j - a_{j-1}}{\tau} + \widehat{A}a_j = F(t_j), j = 1,\ldots,J, \tag{21}$$

где $a_j = (a_{1,j},\ldots,a_{n-1,j})^T$.

Сгруппируем в (21) значения по временным слоям:

$$(\widehat{B} + \widehat{A}\tau)a_j = \tau F(t_j) + \widehat{B}a_{j-1}. \tag{22}$$

Матрица $\widehat{B} + \widehat{A}\tau$ имеет трехдиагональный вид и состоит из суммы элементов, рассчитанных по формулам (14)–(19).

Обозначим через f вектор-столбец, стоящий в правой части уравнения (22), тогда рассматриваемую систему линейных алгебраических уравнений можно записать в виде

$$c_i a_{i-1,j} + d_i a_{i,j} + e_i a_{i+1,j} = f_i, i = 2,\ldots,n-2,$$
$$\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \ddots \\ a_{n-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ddots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

и применять для решения метод последовательного исключения неизвестных (метод прогонки).

Оценки сходимости

Для получения априорной оценки приближения u_h обобщенного решения умножим каждое из уравнений (10) на функцию $a_i(t)$ и просуммируем по всем $i = 1,\ldots,n-1$:

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\phi_i\right) + \left[u_h, \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\phi_i\right] = \left(f, \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\phi_i\right),$$

а затем проинтегрируем по $t' \in (0,t)$:

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h\right)dt' + \int_0^t [u_h, u_h]\,dt' = \int_0^t (f, u_h)\,dt'. \tag{23}$$

Применим интегрирование по частям

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h\right)dt' = \int_0^1\int_0^t \frac{\partial u_h}{\partial t}u_h x^\gamma dt' dx = \left(\int_0^1 u_h x^\gamma u_h dx\right)\Big|_0^1 -$$
$$-\int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h =\right)dt' = \|u_h\|^2(t) - \|u_h\|^2(0) - \int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h\right)dt'.$$

Тогда

$$2\int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h\right)dt' = \|u_h\|^2(t) - \|u_h\|^2(0).$$

Перепишем равенство (23)

$$\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t)+\int_0^t[u_h]^2(t')dt'=\int_0^t(f,u_h)\,dt'+\frac{1}{2}\|u_h\|^2(0).$$

Из начального условия $(u_h(x,0),\phi_i)=(u_{(0)},\phi_i)$, следует что $\|u_h\|(0)\le\|u_0\|$. Тогда

$$\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t)+\int_0^t[u_h]^2(t')dt'\le\left(\int_0^t\|f\|^2(t')dt'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\|u_h\|^2(t')dt'\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\|u_{(0)}\|^2. \quad (24)$$

Рассмотрим норму в энергетическом пространстве

$$[u,u]=\int_0^1x^\gamma\left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2+q(x)u^2\right]dx.$$

В последней формуле отбросим неотрицательное слагаемое $q(x)u^2$, а $p(x)$ заменим на p_0:

$$[u,u]\ge p_0\int_0^1x^\gamma\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx=p_0\|u'_x\|^2. \quad (25)$$

Покажем, что справедлива оценка

$$\|u\|^2_{L_{2,\gamma}}\le|u'\|^2_{L_{2,\gamma}}\frac{1}{2(1+\gamma)}. \quad (26)$$

Запишем с учетом $u(1)=0$:

$$u(x)=-\int_x^1u'(\xi)d\xi,$$

$$u^2(x)=\int_x^1\left(u'(\xi)\xi^{-\gamma/2}\xi^{\gamma/2}\right)^2d\xi.$$

С использованием неравенства Коши-Буняковского для $0\le x\le1$

$$u^2(x)\le\left(\int_x^1(u'(\xi))^2\xi^\gamma d\xi\right)\left(\int_x^1\xi^{-\gamma}d\xi\right)\le\left(\int_0^1(u'(\xi))^2\xi^\gamma d\xi\right)\frac{\xi^{1-\gamma}}{1-\gamma}\bigg|_x^1=\|u'\|^2_{L_{2,\gamma}}\frac{1-x^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

Проинтегрируем от 0 до 1 с весом x^γ

$$\|u\|^2_{L_{2,\gamma}}\le\|u'\|^2_{L_{2,\gamma}}\int_0^1\frac{x^\gamma(1-x^{1-\gamma})}{1-\gamma}dx=\|u'\|^2_{L_{2,\gamma}}\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1}-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_0^1=\|u'\|^2_{L_{2,\gamma}}\frac{1}{2(1+\gamma)}.$$

Подставим оценку (26) в неравенство (25), получим

$$[u]^2\ge2p_0(1+\gamma)\|u\|^2. \quad (27)$$

Учитывая теперь (27), перепишем (24)

$$\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t)+\int_0^t[u_h]^2(t')dt'\le\left(\int_0^t\|f\|^2(t')dt'\right)^{\frac{1}{2}}c\left(\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t)+\int_0^t[u_h]^2(t')dt'\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\|u_{(0)}\|^2,$$

где $c=2p_0(1+\gamma)$.

Для последнего соотношения применим ϵ -неравенство $|ab|\le a^2/(4\epsilon)+\epsilon b^2$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t)+\int_0^t[u_h]^2(t')dt'\le\frac{c}{4\epsilon}\int_0^t\|f\|^2(t')dt'+\\+c\epsilon\left(\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t)+\int_0^t[u_h]^2(t')dt'\right)+\frac{1}{2}\|u_{(0)}\|^2(0).\end{gathered} \quad (28)$$

Примем $\epsilon=\frac{c}{2}$.

$$(2-\frac{c^2}{2})\left(\|u_h\|^2(t)+2\int_0^t[u_h]^2(t')dt'\right)\le\left(\int_0^t\|f\|^2(t')dt'+\|u_{(0)}\|^2\right),$$

$$\begin{gathered}\|u_h\|^2(t)+\int_0^t[u_h]^2(t')dt'\le C\left(\int_0^t\|f\|^2(t')dt'+\|u_{(0)}\|^2\right),\\ \max_{t\in(0,T)}\|u_h\|^2(t)+\int_0^T[u_h]^2(t')dt'\le C\left(\int_0^T\|f\|^2(t')dt'+\|u_{(0)}\|^2\right).\end{gathered} \quad (29)$$

Таким образом, из (29) следует непрерывная зависимость приближенного решения u_h задачи от f и $u_{(0)}$.

Оценим скорость сходимости u_h к $u(x,t)$ при $h\to0$. Примем $\xi_h=u-u_h$, тогда для любой функции $v_h=\sum\limits_{i=1}^{n-1}b_i(t)\phi_i$:

$$\left(\frac{\partial\xi_h}{\partial t},v_h\right)(t)+[\xi_h,v_h](t)=\left(\frac{\partial u}{\partial t},v_h\right)(t)+[u,v_h](t)-\left(\frac{\partial u_h}{\partial t},v_h\right)(t)-[u_h,v_h](t),$$

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t},v_h\right)(t)+[u_h,v_h](t)=(f,v_h)(t),$$

$$\left(\frac{\partial\xi_h}{\partial t},v_h\right)(t)+[\xi_h,v_h](t)=\left(\frac{\partial u}{\partial t},v_h\right)(t)+[u,v_h](t)-(f,v_h)(t)=0.$$

$$(\xi_h,v_h)(0)=0.$$

Тогда $\left(\frac{\partial\xi_h}{\partial t},\xi_h\right)+[\xi_h,\xi_h]=\left(\frac{\partial\xi_h}{\partial t},u-v_h\right)+[\xi_h,u-v_h]$.

Применяя к $\left(\frac{\partial\xi_h}{\partial t},\xi_h\right)$ интегрирование по частям, получим

$$\frac{1}{2}\|\xi_h\|^2(t)+\int_0^t[\xi_h]^2dt'=\int_0^t[\xi_h,u-v_h]dt'+\int_0^t\left(\frac{\partial\xi_h}{\partial t},u-v_h\right)dt'+\frac{1}{2}\|\xi_h\|^2(0). \qquad (30)$$

Для (30) справедлива оценка

$$\frac{1}{2}\|\xi_h\|^2(t)+\int_0^t[\xi_h]^2dt'\le\int_0^t\left([\xi_h]^2dt'\right)^{1/2}\int_0^t\left([u-v_h]^2dt'\right)^{1/2}+\|\xi_h(t)\|\|u-v_h\|(t)+$$
$$+\|\xi_h(0)\|\|u_{(0)}-v_h(0)\|+\int_0^t\left(\|\xi_h\|^2dt'\right)^{1/2}\int_0^t\left(\|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial v_h}{\partial t}\|^2dt'\right)^{1/2}\frac{1}{2}\|\xi_h\|^2(0). \qquad (31)$$

Поскольку $u_h(x,0)$ является ортогональной проекцией u_0 на H_L, то $\|\xi_h(0)\|\le\|u_{(0)}-v_h(0)\|$.

Используя последнюю оценку и неравенство $|ab|\le a^2/(4\epsilon)+\epsilon b^2$ с подбором значений ϵ необходимым образом, запишем

$$\|\xi_h\|^2(t)+\int_0^t[\xi_h]^2dt'\le 4\|u-v_h\|^2(t)+4\int_0^t[u-v_h]^2dt'+2c\int_0^t\|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial v_h}{\partial t}\|^2dt'+$$
$$+6\|\xi_h\|^2(0)\le 4\|u-v_h\|^2(t)+\widehat{c}\left(\int_0^t[u-v_h]^2dt'+\int_0^t\|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial v_h}{\partial t}\|^2dt'+\|u_{(0)}-v_h(0)\|^2(0)\right),$$

$$\max_{t\in(0,T)}\|\xi_h\|^2(t)+\int_0^T[\xi_h]^2dt'\le 4\max_{t\in(0,T)}\|u-v_h\|^2(t)+$$
$$+\widehat{c}\left(\int_0^T[u-v_h]^2dt'+\int_0^T\|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial v_h}{\partial t}\|^2dt'+\|u_{(0)}-v_h(0)\|^2\right). \qquad (32)$$

Пусть теперь функция v_h имеет коэффициенты $b_i=u(x_i,t)$. Тогда из (32) с учетом свойств базисных функций, получим сходимость u_h к u при $h\to 0$:

$$\max_{t\in(0,T)}\|u-u_h\|^2(t)+\int_0^T[u-u_h]^2dt'\to 0,h\to 0.$$

Заключение

Рассмотренная в работе форма применения проекционно-сеточного метода для нестационарной задачи, объединяет преимущества разностных и проекционных методов. При решении начально-краевых задач целесообразно вводить сетку по оси времени, а затем, после приближения производной по времени, применять схему аппроксимации по пространственной переменной на каждом временном слое. Использование метода Бубнова-Галеркина для аппроксимации с финитными базисными функциями приводит к простой вычислительной схеме с достаточно хорошей точностью. Для приближения по t использовалась неявная схема с первым порядком аппроксимации.

Конфликт интересов

Не указан.

Conflict of Interest

None declared.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — Москва: Наука, 1989. — 616 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. — Москва: Наука, 1977. — 231 с.
3. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. — Москва: Наука, 1966. — 432 с.
4. Михлин С.Г. Некоторые вопросы сеточной аппроксимации и их приложения к вариационно-сеточному методу / С.Г. Михлин // Вариационно-разностные методы в математической физике; — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973.

5. Катрахов В.В. Метод конечных элементов для некоторых вырождающихся эллиптических краевых задач / В.В. Катрахов, А.А. Катрахова // Доклады Академии наук СССР. — 1984. — № 4. — С. 799-802.

6. Гусман Ю.А. Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений / Ю.А. Гусман, Л.А. Оганесян // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1965. — № 2. — С. 351-357.

7. Киприянов И.А. Краевые задачи сингулярных эллиптических операторов в частных производных / И.А. Киприянов, С.М. Ситник // Доклады академии наук. — 1970. — № 1. — С. 32-35.

8. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя / Я.И. Житомирский // Математический сборник. — 1955. — № 36(78). — С. 299-310.

9. Ситник С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина. — Москва: Физматлит, 2019. — 224 с.

10. Катрахов В.В. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / В.В. Катрахов, С.М. Ситник // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2018. — № 2. — С. 211-426.

11. Polovinkin I.P. Recovery of the Solution of the Singular Heat Equation from Measurement Data / I.P. Polovinkin, M.V. Polovinkina // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. — 2023. — Vol. 29. — № 41.

12. Muravnik A.B. Fourier-Bessel Transformation of Compactly Supported Non-negative Functions and Estimates of Solutions of Singular Differential Equations / A.B. Muravnik // Functional Differential Equations. — 2001. — № 8(3-4). — P. 353-363.

13. Muravnik A.B. Functional Differential Parabolic Equations: Integral Transformations and Qualitative Properties of Solutions of the Cauchy Problem / A.B. Muravnik // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — № 216. — P. 345-496.

14. Ляхов Л.Н. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин и др. // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2023. — № 7. — С. 52-65.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Samarskij A.A. Teorija raznostnyh shem [Theory of Difference Schemes] / A.A. Samarskij. — Moscow: Nauka, 1989. — 616 p. [in Russian]

2. Marchuk G.I. Metody vychislitel'noj matematiki [Methods of Computational Mathematics] / G.I. Marchuk. — Moscow: Nauka, 1977. — 231 p. [in Russian]

3. Mihlin S.G. Chislennaja realizatsija variatsionnyh metodov [Numerical Implementation of Variational Methods] / S.G. Mihlin. — Moscow: Nauka, 1966. — 432 p. [in Russian]

4. Mihlin S.G. Nekotorye voprosy setochnoj approksimatsii i ih prilozhenija k variatsionno-setochnomu metodu [Some Questions of Grid Approximation and Their Applications to the Variational Grid Method] / S.G. Mihlin // Variational-difference Methods of Mathematical Physics; — Novosibirsk: Computing Center of the Siberian Branch of the USSR AS, 1973. [in Russian]

5. Katrahov V.V. Metod konechnyh elementov dlja nekotoryh vyrozhdajuschihsja ellipticheskih kraevyh zadach [Finite Element Method for Some Degenerate Elliptic Boundary Value Problems] / V.V. Katrahov, A.A. Katrahova // Doklady Akademii nauk SSSR [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. — 1984. — № 4. — P. 799-802. [in Russian]

6. Gusman Ju.A. Otsenki shodimosti konechno-raznostnyh shem dlja vyrozhdennyh ellipticheskih uravnenij [Estimates for the Convergence of Finite Difference Schemes for Degenerate Elliptic Equations] / Ju.A. Gusman, L.A. Oganesjan // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]. — 1965. — № 2. — P. 351-357. [in Russian]

7. Kiprijanov I.A. Kraevye zadachi singuljarnyh ellipticheskih operatorov v chastnyh proizvodnyh [Boundary Value Problems of Singular Elliptic Partial Differential Operators] / I.A. Kiprijanov, S.M. Sitnik // Doklady akademii nauk [Reports of the Academy of Sciences]. — 1970. — № 1. — P. 32-35. [in Russian]

8. Zhitomirskij Ja.I. Zadacha Koshi dlja sistem linejnyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh s differentsial'nymi operatorami tipa Besselja [The Cauchy Problem for Systems of Linear Partial Differential Equations with Differential Operators of Bessel Type] / Ja.I. Zhitomirskij // Matematicheskij sbornik [Mathematical Collection]. — 1955. — № 36(78). — P. 299-310. [in Russian]

9. Sitnik S.M. Metod operatorov preobrazovanija dlja differentsial'nyh uravnenij s operatorami Besselja [Method of Transformation Operators for Differential Equations with Bessel Operators] / S.M. Sitnik, E.L. Shishkina. — Moscow: Fizmatlit, 2019. — 224 p. [in Russian]

10. Katrahov V.V. Metod operatorov preobrazovanija i kraevye zadachi dlja singuljarnyh ellipticheskih uravnenij [Transformation Operator Method and Boundary Value Problems for Singular Elliptic Equations] / V.V. Katrahov, S.M. Sitnik // Sovremennaja matematika. Fundamental'nye napravlenija [Modern Mathematics. Fundamental Directions]. — 2018. — № 2. — P. 211-426. [in Russian]

11. Polovinkin I.P. Recovery of the Solution of the Singular Heat Equation from Measurement Data / I.P. Polovinkin, M.V. Polovinkina // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. — 2023. — Vol. 29. — № 41.

12. Muravnik A.B. Fourier-Bessel Transformation of Compactly Supported Non-negative Functions and Estimates of Solutions of Singular Differential Equations / A.B. Muravnik // Functional Differential Equations. — 2001. — № 8(3-4). — P. 353-363.

13. Muravnik A.B. Functional Differential Parabolic Equations: Integral Transformations and Qualitative Properties of Solutions of the Cauchy Problem / A.B. Muravnik // Journal of Mathematical Sciences. — 2016. — № 216. — P. 345-496.

14. Ljahov L.N. Fundamental'noe reshenie singuljarnogo differentsial'nogo operatora Besselja s otritsatel'nym parametrom [Fundamental Solution of the Singular Differential Bessel Operator with a Negative Parameter] / L.N. Ljahov, Ju.N. Bulatov, S.A. Roschupkin et al. // Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika [News of Higher Educational Institutions. Mathematics]. — 2023. — № 7. — P. 52-65. [in Russian]