ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА / PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.4

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ АРТИЛЛЕРИЙСКОЙ КОНТРБАТАРЕЙНОЙ БОРЬБЫ В ВИДЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ

Научная статья

Погодин И.Е.[1], *, Удовиченко А.С.[2]
[1] Военно-морской политехнический институт, Санкт-Петербург, Российская Федерация
[2] Балтийский государственный технический университет «Военмех», Санкт-Петербург, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (iepogodin[at]mail.ru)

Аннотация

При ведении современных боевых действий обеим сторонам целесообразно иметь объективные оценки степени успешности в достижении своих целей и оптимизировать их.

Такая ситуация ближе всех к математической модели матричных игр с нулевой суммой, когда в любом случае один участник должен проиграть не больше гарантированной величины, а другой – выиграть не больше той же величины. Эти условия служат основой проделанного исследования.

Найдены оптимальные стратегии для каждой из сторон, показывающие с какой вероятностью они должны неожиданным для противника образом предпринимать различные действия.

Предложенная модель достаточна адекватна рассматриваемой задаче и позволяет при определенных предположениях получить количественные рекомендации по оптимизации действий участников артиллерийской дуэли.

Ключевые слова: матричная игра, оптимальная стратегия, обстреливающая и перехватывающая батареи, настильная и навесная траектории.

ON THE STUDY OF ARTILLERY COUNTERBATTERY COMBAT IN THE FORM OF A MATRIX GAME

Research article

Pogodin I.E.[1], *, Udovichenko A.S.[2]
[1] Naval Polytechnic Institute, Saint-Petersburg, Russian Federation
[2] Baltic State Technical University "Voenmekh", Saint-Petersburg, Russian Federation

* Corresponding author (iepogodin[at]mail.ru)

Abstract

In modern warfare, it is useful for both sides to have objective evaluations of the degree of success in achieving their objectives and to optimize them.

This situation is closest to the mathematical model of zero-sum matrix games, when in any case one participant should lose no more than the guaranteed value and the other should win no more than the same value. These conditions serve as the basis for the conducted research.

The optimal strategies for each side are found, showing the probability with which they should take different actions in an unexpected way for the opponent.

The proposed model is sufficiently adequate to the studied problem and allows, under certain assumptions, to obtain quantitative recommendations for optimizing the actions of the participants of an artillery duel.

Keywords: matrix game, optimal strategy, firing and intercepting batteries, level and high trajectories.

Введение

Очевидно, что во избежание длительных и дорогостоящих поисков решения многих серьезных задач «наощупь», «по здравому смыслу», «волевым образом» и т.д. необходим научный анализ. Это в первую очередь относится к военным и экономическим задачам, для решения которых еще до второй мировой войны, как указывали Морз Ф.М. и Кимбел Д.Е. [1, С. 10-22] стало зарождаться направление, называемое теперь исследованием операций. Уже тогда в вооруженных силах США и Англии были сформированы специальные научные группы для подготовки решений по способам организации и обеспечения боевых действий [1, С. 229-263].

Упоминания примеров такого рода можно найти, в частности, в ставшей классической работе Вентцель Е.С. [5, С. 347-356], когда одна сторона планирует оптимальную для нее организацию авианалета, а другая заботится об уменьшении возможного ущерба от налета. Рассматриваемые в этих задачах операции являются управляемыми с обеих сторон, причем согласовать их деятельность как совместную и свести, например, к поиску экстремума функции нескольких переменных невозможно.

Однако возможно найти некий «стихийный» компромисс, при котором выигрыш одной и проигрыш другой стороны ограничены одной величиной «цены игры» и при многократном повторении могут быть достигнуты статистически в виде некоторой наиболее вероятной «седловой точки» поверхности показателя эффективности. При этом рассчитываются обоюдно-оптимальные распределения выбираемых действий, а сами действия каждый раз должны осуществляться каждой из сторон неожиданно для другой.

Обязательным условием модели матричных игр, входящей в раздел теории операций является дискретность арсенала возможностей обеих сторон. В то же время встречаются весьма актуальные задачи, в которых это условие выполняется лишь для одной стороны. В качестве такого практического примера здесь предлагается артиллерийская дуэль, в которой лишь одна сторона может дискретно выбирать вид траектории для обстрела.

Общих способов построения математических моделей не существует. В каждом конкретном случае модель строится, исходя из целевой направленности операции и задачи исследования, с учетом требуемой точности решения, а также точности, с какой могут быть известны исходные данные (Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. [2, С. 8-12]).

К числу предшественников основополагающих исследований различных дуэлей Вентцель Е.С. [5], Неймана Дж. и Моргенштерна О. [9]. Морз Ф.М. и Кимбела Д.Е. [1] следует отнести прежде всего:

- дуэль двух танков в работе Зачриссона Л.Э., [4, С. 231-243], где требование «нулевой суммы» выражается постоянством суммы вероятностей поражения каждого из участников и при определенных интуитивных предположениях получено, что оптимальное поведение включает кусочно-непрерывные функции;

- дуэль бомбардировщика с истребителем в работе Кэйвуда Т.Э. и Томааса С.Дж. [3, С. 243-256], где проведен многоступенчатый анализ, включающий учет скорострельности и боекомплекта снарядов, а также привлечение большого объема сведений о тактике ведения огня, которые, как правило, неизвестны.

Саати Т.Л. [3, С. 159], рассматривал военный конфликт между двумя странами, каждая из которых должна сделать простой выбор: продолжать или не продолжать эскалацию конфликта, как игровую ситуацию. Если одна сторона проводит эскалацию, а другая нет, то первая сторона одерживает победу. Если обе стороны проводят эскалацию, то они обе терпят убытки по сравнению с политикой деэскалации.

Общее моделирование процесса нанесения огневого удара любыми видами оружия представлено Чуевым Ю.В. [11, С. 88-107]. Этот процесс можно моделировать как с целью включить его в общую модель исследования, так и с целью отыскать оптимальные способы нанесения огневого удара и анализа влияния различных факторов на его успешность (в том числе таких, как время, надежность и т.д.).

Постановка задачи

В представленной работе возникла идея – во избежание излишних усложнений и неопределенности условий – изменить задачу таким образом, чтобы с позиций модели матричной игры найти обоюдно-оптимальное поведение для обоих участников дуэли простым и наглядным графо-аналитическим способом.

Такой подход представляется достаточно оправданным, а решение конкретной задачи артиллерийской дуэли даже с некоторой долей предположений является актуальным, а его наличие и оптимальность гарантируется основами теории матричных игр (Нейман Дж. и Моргенштерн О. [9]).

Отдельная особенность любой задачи – подобрать конкретный достаточно адекватный показатель эффективности, представляющий интерес для обеих сторон. Здесь – в отличие от других подобных исследований – в качестве такого показателя выбрана вероятность перехвата снаряда, обратно пропорциональная оценкам величины ошибок встречи двух снарядов в воздухе с учетом наибольшей безопасности обороняющейся стороны.

Участники актуальной задачи артиллерийской дуэли преследуют прямо противоположные цели: стреляющая батарея – поразить батарею противника, а обороняющаяся батарея – предотвратить это, перехватив снаряд в полете. При этом первая батарея может практически всегда (за исключением стрельбы под 45°) выбирать одну из двух траекторий: настильную или навесную. Зададимся вопросом наиболее рационального (эффективного) выбора траектории первой батареи, а также выбора места перехвата снаряда второй батареей. Постановка задачи близка к модели антагонистической матричной игры с нулевой суммой. Для применения этой модели выбор места перехвата снаряда сделан также дискретным путем задания трех условных стратегий: вблизи атакующей батареи, вблизи точки наивысшего подъема снаряда и вблизи обороняющейся батареи. Эта модель решения поставленной задачи с разработанным аппаратом представляет интерес благодаря своей наглядности и глубинному соответствию сути задачи.

Задача: Найти оптимальные стратегии противников в артиллерийской дуэли двух батарей методом антагонистических матричных игр с нулевой суммой.

Поставленная задача расчета обстоятельств артиллерийской дуэли преследует двойственную цель:

– с позиций объективного критерия матричной игры получить оптимальный выбор поведения обоих участников и

– методическую: исследовать и показать применение теории матричных игр для практики простыми средствами.

Как было сказано выше, математическая модель матричной игры с нулевой суммой нацелена на поиск компромисса в выборе среди множеств возможных ходов двух участников таких «оптимальных» частот (вероятностей (p_1^* , …, p_n^*) и (q_1^* , …, q_m^*), где n и m – количество возможных ходов первого и второго участников соответственно) их применения, которые при многократном повторении игры позволят в среднем, независимо от действий противника, одному из них проиграть не больше, а другому выиграть не больше некоторой величины, называемой «ценой игры» E. Процедура реализации этой идеи в общем случае приводит к решению довольно громоздкой задачи линейного программирования. Однако, если, например, у одного из игроков имеется всего два хода, то задача легко решается графически.

Описание модели

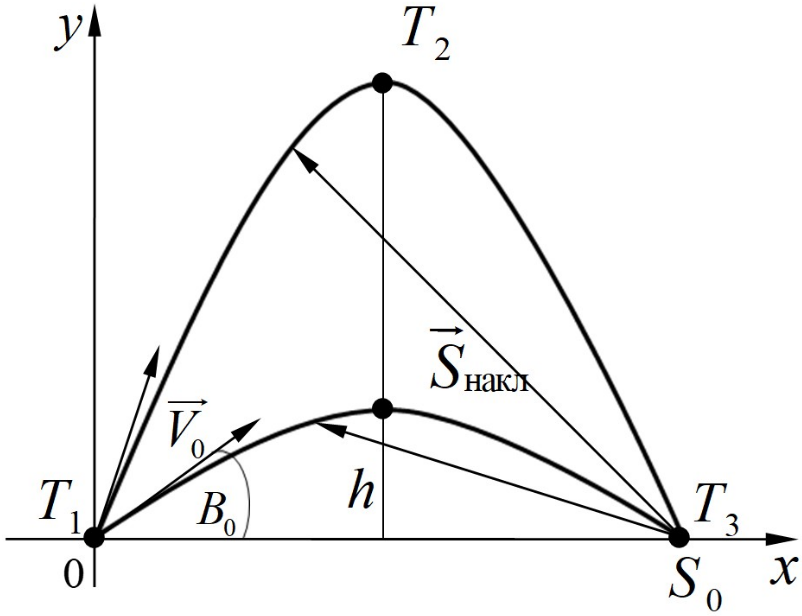

Рисунок 1 - Схема настильной и навесной траекторий полета снаряда
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.4.1

Обозначим: S_0 – расстояние между батареями по горизонтали; V_0 – начальная скорость снаряда; B_0 – угол вектора начальной скорости V_0 в точке T_1 относительно горизонтали (К примеру, 30° и 60° соответственно, как обеспечивающие дальность S_0 свыше 30 км при различии точек максимального подъема снаряда на двух траекториях не более, чем в три раза).

Полагая V_0 = 0,6 км/с, получаем $S_0 = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2B_0}{g}$ = 31,8 км.

Зададим степень вероятности перехвата (безопасного уничтожения) летящего снаряда в воздухе обороняющей объект батареей (весовую функцию) в виде:

$$W = \frac{S_{\text{накл}}^2 (1+rS_{\text{накл}})}{\left(kV_{\text{орт}}\right)^2 + S_{\text{накл}}^2},$$

где $S_{\text{накл}}$ – расстояние от снаряда до батареи перехвата (по наклонной); $V_{\text{орт}}$ – проекция скорости снаряда на картинную плоскость для батареи перехвата (на ортогональное к лучу зрения $\vec{S}_{\text{накл}}$ направление); k и r – задаваемые размерные коэффициенты.

Предложенное выражение учитывает, что:

а) вероятность поражения движущейся цели обратно пропорциональна квадрату суммарной ошибки $\left(W \sim \delta^{-2}\right)$, которая, в свою очередь, складывается из квадратов двух независимых ошибок, растущих с увеличением удаленности снаряда и его скорости на плоскости, ортогональной к лучу зрения перехватывающей батареи: $\delta^2 \sim \left(kV_{\text{орт}}\right)^2 + S_{\text{накл}}^2$;

б) желательно сбивать летящий снаряд как можно дальше от защищаемого объекта и соответственно от перехватывающей батареи $W \sim S_{\text{накл}}^2 \left(1 + rS_{\text{накл}}\right)$, чтобы они сами не пострадали от осколков снаряда.

Таким образом, можно надеяться, что даже при некоторой условности предположений о принятом виде весовой функции W, она правильно отражает основные особенности задачи.

Решение

В то время как для первого игрока (батареи перехвата) задача содержит поиск экстремума функции W, непрерывной по всем своим аргументам и лишь условно принятой дискретной для трех выделенных точек, для второго игрока (обстреливающей батареи) она принципиально дискретная из-за выбора одной из двух траекторий. Однако поиск экстремума величины $W(t)$ является весьма громоздким, так как только для поиска точек стационарности по t требуется решать сложные трансцендентные уравнения с полиномами очень высоких степеней относительно времени движения снаряда t.

В точке T_1 расположения стреляющей батареи: $S_{\text{накл}}$ = S_0 = 31,8 км;

а) настильная траектория B_0 = 30°; $V_{\text{орт}}$ = $V_0 sinB_0$ = 0,3 км/с;

б) навесная траектория B_0 = 60°; $V_{\text{орт}}$ = $V_0 sinB_0$ = 0,52 км/с.

В точке наивысшего подъема снаряда T_2, где при любом угле B_0 его скорость минимальна и направлена горизонтально: $h = 0,5\,(V_0 \sin B_0)^2\,/g$ – высота максимального подъема;

$$S_{\text{накл}} = \sqrt{\frac{S_0^2}{4} + h^2} = \frac{V_0^2 \sin B_0 \sqrt{1+3\cos^2 B_0}}{2g}; V_{\text{орт}} = \frac{V_0 h \cos B_0}{S_{\text{накл}}} = \frac{V_0 \sin 2B_0}{2\sqrt{1+3\cos^2 B_0}}.$$

Результаты расчета параметров в точке T_2 : $S_{\text{накл}}$ = 16,54 км, $V_{\text{орт}}$ = 0,144 км/с при B_0 = 30° и $S_{\text{накл}}$ = 21,02 км, $V_{\text{орт}}$ = 0,196 км/с при B_0 = 60°.

В точке T_3 расположения обстреливаемой цели используем предельное значение величины $W(t)$ при t →0, где время t отсчитывается в обратном направлении, то есть назад от момента расчетного попадания снаряда в объект.

Значения весовой функции W при достаточно произвольно заданных коэффициентах k = 300 с и r = 0,1 с/км для трех точек T_1 , T_2 и T_3 (строки) и двух видов траекторий (столбцы) приведены в табл. 1.

Таблица 1 - Значения весовой функции W для трех точек T_1, T_2 и T_3 и двух видов траекторий

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.4.2

Первый игрок	Второй игрок	
	Настильная траектория	Навесная траектория
Перехват в точке T_1	0,463	0,167
Перехват в точке T_2	0,339	0,35
Перехват в точке T_3	0,181	0,399

Поэтому смоделируем всю задачу как дискретную для обоих игроков и найдем оптимальные стратегии их поведения в виде решения соответствующей матричной игры с нулевой суммой.

Найдем оптимальные стратегии противников. Стратегией первого игрока называется вектор $P = (p_1, p_2, p_3)$, где компоненты p_1, p_2, p_3 – вероятности, с которыми этот игрок (батарея перехвата) выбирает точки перехвата движущегося снаряда.

Аналогично вектор $Q = (q_1, q_2)$ – стратегия второго игрока (обстреливающий противник), где компоненты q_1, q_2 – вероятности, с которыми он выбирает траектории снаряда.

Критерий оптимальности: для того чтобы векторы стратегий P^* и Q^* были оптимальными стратегиями соответствующих игроков, а число «*E*» было «ценой игры», необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства: $M(P_i, Q^*) \leq E \leq M\left(P^*, Q_j\right)$, где i = 1,2,3; j = 1,2.

Для решения получившейся матричной игры в соответствии со стандартным методом построим пару двойственных симметричных задач линейного программирования по составленной выше таблице 1 размером 3x2 (матрица «*C*»).

Задача 1: Найти $\min\{L(x) = x_1 + x_2 + x_3\}$ при условиях:

$$\begin{cases} C_{11}x_1 + C_{21}x_2 + C_{31}x_3 \geq 1 \\ C_{12}x_1 + C_{22}x_2 + C_{32}x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} 0,435x_1 + 0,339x_2 + 0,176x_3 \geq 1 \\ 0,156x_1 + 0,323x_2 + 0,390x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Задача 2: Найти $\max\{N(y) = y_1 + y_2\}$ при условиях:

$$\begin{cases} C_{11}y_1 + C_{12}y_2 \leq 1 \\ C_{21}y_1 + C_{22}y_2 \leq 1 \\ C_{32}y_1 + C_{32}y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} 0,463y_1 + 0,167y_2 \leq 1 \\ 0,339y_1 + 0,350y_2 \leq 1 \\ 0,181y_1 + 0,399y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь от неизвестных вероятностей { p_i } и { q_j } сделан переход к новым переменным { x_i } и { y_j } по правилу: $x_i = p_i/E; y_j = q_j/E$, где E - «компромиссное» значение искомой величины целевых функций обеих задач (1): $L^*(x)$ и (2): $N^*(y)$, называемое «ценой игры».

Чтобы избежать классического применения громоздкого симплекс-метода, решим задачу (2) графически (рис. 2). Это возможно, поскольку в этой задаче всего два неизвестных. Границы области допустимых значений переменных (область допустимых «планов») выделены жирными отрезками, а вершины – жирными точками. Семейство уровней целевой функции $N(y)$ представлено парой менее интенсивных параллельных прямых с указанием градиента $gradN(y)$ в виде стрелки.

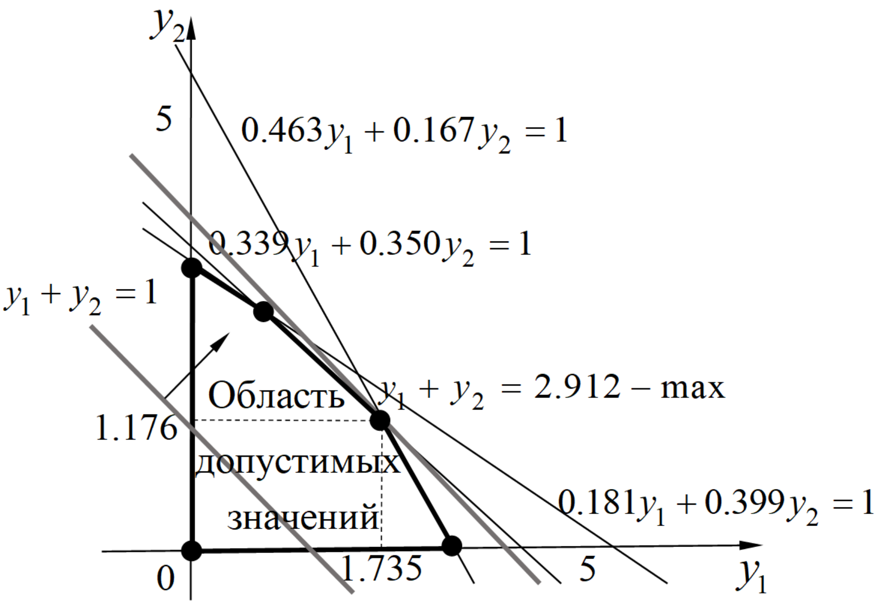

Рисунок 2 - Графическое решение задачи (2) линейного программирования
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.4.3

Оптимальное решение: y_1^* = 1,735, y_2^* = 1,176.

$q_1 = y_1/(y_1 + y_2)$; q_1 = 0,596; $q_2 = y_2/(y_1 + y_2)$; q_2 = 0,404.

Оптимальное решение задачи (1) находим, используя двойственность задач и найденное максимальное значение $N^*(y)$ = 2,912.

x_1^* = 0,109; x_2^* = 2,803; x_3^* = 0;

$p_1 = x_1/(x_1 + x_2 + x_3)$; p_1 = 0,037; $p_2 = x_2/(x_1 + x_2 + x_3)$; p_2 = 0,963;

$p_3 = x_3/(x_1 + x_2 + x_3)$; p_3 = 0.

Построение графиков, программирование и основные вычисления выполнялись в математическом пакете MathCAD 15.

Обсуждение результатов

Результатом проделанного исследования является:

– в практическом плане: получение распределений вероятностей выбора оптимальных (в смысле игровой задачи) стратегий для атакующей батареи (только в 60% случаев в случайном порядке стрелять по настильной траектории, а в остальных 40% случаев – по навесной траектории) и для обороняющейся батареи (быть готовой в 96% случаев к перехвату в точке T_2 максимального подъема снаряда над землей, в 4% в точке T_1 над обстреливающей батареей, но никогда над самой батареей) при некоторых общих условиях на входные параметры задачи;

– в методическом плане: успешное применение модели матричной игры к конкретному актуальному случаю из сравнительно редкой, «нетрадиционной» ситуации артиллерийской дуэли, что, по-видимому, сделано впервые.

Конкретные числа могли измениться при другом виде и параметрах весовой функции W , однако на путь решения это принципиально не влияет.

Такая точка зрения на проблему устойчивости полученных результатов основана на том, что при проведении серии полных однотипных расчетов с вариацией каждого из четырех параметров задачи (V , k , r , B_0) в пределах ±10% обнаружились очень малые (в пределах ±1,5%, т.е. в 6 раз меньше для первых трех параметров из них и около 4%, т.е в 2,5 раз меньше для угла B_0) вариации основных искомых величин (вероятность p_2 , вероятность p_3 – вообще не изменяется).

Оптимальность решения задачи и само его существование рассматриваются в рамках оптимальности решения матричной игры (теорема Дж. Фон Неймана), составляющей основу модели.

Даже если на перехват используется всего одно орудие, то для последующих наибыстрейших перенаводок его следует предварительно навести в точку «ожидания» с удалением от этих трех указанных точек, пропорциональным соответствующим полученным вероятностям. Такие точки «ожидания» можно рассчитать аналитически.

Заключение

С помощью модели матричной игры и достаточно общих предположений получены количественные оценки вероятностей оптимальных действий обеих участвующих в артиллерийской дуэли батарей.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Толкачева Е.А., Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ", Санкт-Петербург, Российская Федерация
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.4.4

Conflict of Interest

None declared.

Review

Tolkacheva E.A., St. Petersburg Electrotechnical University "LETI", Saint-Petersburg, Russian Federation
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.137.4.4

Список литературы / References

1. Морз Ф.М. Методы исследования операций / Ф.М. Морз, Д.Е. Кимбел. — М.: Советское радио, 1956. — 307 с.
2. Афанасьев М.Ю. Прикладные задачи исследования операций: Уч. пособие / М.Ю. Афанасьев, К.А. Багриновский, В.М. Матюшок. — М.: ИНФРА-М, 2006. — 352 с.
3. Кэйвуд Т.Э. Применение теории игр к воздушному бою между истребителем бомбардировщиком / Т.Э. Кэйвуд, С.Дж. Томас // Применение теории игр в военном деле / под редакцией В.О. Ашкенази. — М.: Советское радио, 1961. — С. 243-256.
4. Сашриссон Л.Э. Применение теории игр к анализу танковой дуэли / Л.Э. Сашриссон // Применение теории игр в военном деле / под редакцией В.О. Ашкенази. — М.: Советское радио, 1961. — С. 231-243.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций / Е.С. Вентцель. — М.: Советское радио,1972. — 552 с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. — М.: Высшая школа, 2020. — 479 с.
7. Саати Т.Л. Математические методы исследования операций / Т.Л. Саати. — М.: Советское радио, 1970. — 304 с.
8. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения / В.В. Мазалов. — СПб: Лань, 2023. — 500 с.
9. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. — М.: Наука, 1970. — 707 с.
10. Челноков А.Ю. Теория игр / А.Ю. Челноков. — М.: Юрайт, 2022. — 223 с.
11. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле / Ю.В. Чуев. — М.: Воениздат, 1970. — 256 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Morse F.M. Metody issledovaniya operacij [Operations Research Methods] / F.M. Morse, D.E. Kimbel. — M.: Soviet Radio, 1956. — 307 p. [in Russian]
2. Afanasev M.Yu. Prikladnye zadachi issledovaniya operacij: Uch. pososobie [Applied Problems of Operations Research: study guide] / M.Yu. Afanasev, K.A. Bagrinovskij, V.M. Matyushok. — M.: INFRA-M, 2006. — 352 p. [in Russian]
3. Caywood T.E. Primenenie teorii igr k vozdushnomu boyu mezhdu istrebitelem bombardirovshchikom [Application of the Game Theory in Fighter versus Bomber Combat] / T.E. Caywood, C.J. Thomas // Primenenie teorii igr v voennom dele [Application of game theory in military affairs] / edited by V.O. Ashkenazi. — M.: Soviet Radio, 1961. — P. 243-256. [in Russian]
4. Zachrisson L.E. Primenenie teorii igr k analizu tankovoj dueli [Application of game theory to the analysis of a tank duel] / L.E. Zachrisson // Primenenie teorii igr v voennom dele [Application of game theory in military affairs] / edited by V.O. Ashkenazi. — M.: Soviet Radio, 1961. — P. 231-243. [in Russian]
5. Ventzel E.S. Issledovanie operacij [Operations Research] / E.S. Ventzel. — M.: Soviet Radio,1972. — 552 p. [in Russian]
6. Gmurman V.E. Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika [Probability Theory and Mathematical Statistics] / V.E. Gmurman. — M.: Vyschaya shkola, 2020. — 479 p. [in Russian]
7. Saati T.L. Matematicheskie metody issledovaniya operacij [Mathematical Methods of Operations Research] / T.L. Saati. — M.: Soviet Radio, 1970. — 304 p. [in Russian]
8. Mazalov V.V. Matematicheskaya teoriya igr i prilozheniya [Mathematical Game Theory and Applications] / V.V. Mazalov. — SPb: Lan, 2023. — 500 p. [in Russian]
9. Neumann J. Teoriya igr i ekonomicheskoe povedenie [Game Theory and Economic Behaviour] / J. Neumann, O. Morgenstern. — M.: Nauka, 1970. — 707 p. [in Russian]
10. Chelnokov A.Yu. Teoriya igr [Game Theory] / A.Yu. Chelnokov. — M.: Urait, 2022. — 223 p. [in Russian]
11. Chuev Yu.V. Issledovanie operacij v voennom dele [Operations Research in Military Affairs] / Yu.V. Chuev. — M.: Voenizdat, 1970. — 256 p. [in Russian]