ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА / DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.131.11

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ И РОБАСТНОСТЬ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Научная статья

Антоновская О.Г.[1,] *, Бесклубная А.В.[2]
[1] ORCID : 0000-0002-5688-7996;
[1, 2] Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (olga.antonovsckaja[at]yandex.ru)

Аннотация

В работе рассмотрена задача об определении робастности запаса устойчивости дискретной динамической системы. Для решения задачи предложено использовать схему возмущения коэффициентов в алгебраическом критерии устойчивости дискретных систем. Подобное решение задачи представит интерес при построении в пространстве параметров дискретной системы (в том числе и численном) области соответствующей заданному запасу устойчивости в условиях неопределенности в задании всех или части параметров системы. Запас устойчивости характеризуется параметром, явно входящим в пересчитанные коэффициенты характеристического полинома. Приведен пример определения робастности запаса устойчивости в конкретном случае для характеристического полинома четвертого порядка с интервальными коэффициентами.

Ключевые слова: дискретная динамическая система, запас устойчивости, робастная устойчивость, характеристический полином, алгебраический критерий устойчивости.

ALGEBRAIC CRITERION AND ROBUSTNESS OF THE STABILITY MARGIN OF A DISCRETE DYNAMIC SYSTEM

Research article

Antonovskaya O.G.[1,] *, Besklubnaya A.V.[2]
[1] ORCID : 0000-0002-5688-7996;
[1, 2] Nyzhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation

* Corresponding author (olga.antonovsckaja[at]yandex.ru)

Abstract

The work examines the problem of determining the robustness of the stability margin of a discrete dynamical system. To solve the problem, it is proposed to use the scheme of coefficient perturbation in the algebraic criterion of stability of discrete systems. Such solution will be of interest in the case of constructing the region corresponding to the given stability margin in the discrete system parameter space (including numerical one) under the conditions of uncertainty in defining all or part of the system parameters. Stability margin is characterized by the parameter explicitly included into the recalculated coefficients of the characteristic polynomial. An example of determination of robustness of stability margin in particular case for the fourth-order characteristic polynomial with interval coefficients is presented.

Keywords: discrete dynamic system, stability margin, robust stability, characteristic polynomial, algebraic criterion of stability.

Введение

Задача определения запаса устойчивости любой конкретной реальной системы (т.е. степень удаления параметров системы от границы устойчивости) является очень важной задачей, т.к. позволяет определить область работоспособности системы в пространстве ее параметров. К настоящему времени большинство работ, посвященных определению запасов устойчивости, в основном связаны с исследованием непрерывных динамических систем [1], [2], [3]. Однако решение подобной задачи для случая динамических систем с дискретным временем является не менее актуальным, поскольку дискретные системы встречаются в самых различных областях: в экологии [4, С. 85], [5, С. 36, 84, 97], [6], в экономике [7, С. 50-88], в радиотехнике [8], [9] и т.д. А поскольку точное определение параметров реальной системы часто бывает затруднительно, возникает задача оценивания запаса устойчивости систем с интервальными параметрами [10], [11].

В настоящей работе рассматривается задача об определении робастности запаса устойчивости в пространстве параметров для дискретных систем с использованием алгебраического критерия устойчивости, что является возможным благодаря пересчету параметра, характеризующего запас устойчивости, в коэффициенты характеристического полинома. Рассмотрен пример установления робастности запаса устойчивости в случае характеристического полинома четвертого порядка.

Запас устойчивости дискретных систем и алгебраический критерий устойчивости

Запас устойчивости дискретных динамических систем может быть охарактеризован параметром $0 \le r \le 1$ таким, что $\max_i |z_i| \le r$, где z_i – корни характеристического полинома

$$P_n(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^{n-k} \quad (\underline{a}_k \le a_k \le \overline{a}_k) \tag{1}$$

Поскольку устойчивость (1) имеет место при $r = 1$, задача обеспечения заданного запаса устойчивости является более общей задачей по отношению к определению условий устойчивости характеристического полинома. Параметр r можно ввести формально в (1) за счет замены $z \to rz$. В этом случае при любом r корни полинома должны лежать в единичном круге, т.е. так, как это имеет место при исследовании устойчивости. При таком подходе

$$P_n(p) \to H_n(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^{n-k} \quad (\underline{b}_k \le b_k \le \overline{b}_k) \tag{2}$$

где

$$b_k = a_k r^{n-k},\ \underline{b}_k = \underline{a}_k r^{n-k},\ \overline{b}_k = \overline{a}_k r^{n-k} \tag{3}$$

Наличие простых соотношений (3) позволяет воспользоваться схемой [12], [13] возмущения коэффициентов характеристического полинома в алгебраическом критерии устойчивости дискретных систем.

Поскольку необходимо исследовать вопрос об устойчивости интервального полинома $H_n(p)$, нам потребуется решить вопрос о расположении его корней относительно единичного круга. Вообще говоря, сведения о расположении корней характеристического полинома относительно единичного круга являются исходными при решении многих прикладных проблем, в частности, задачи о длительности переходных процессов в дискретной динамической системе. В случае числового задания коэффициентов полинома для решения этого вопроса могут быть использованы как алгебраические критерии устойчивости [12], [13], так и системы детерминантных неравенств [14]. Мы будем использовать критерий работы [12].

В работе [12] рассмотрена задача о расположении корней двух полиномов с действительными и взаимно близкими коэффициентами относительно единичного круга. Требуется установить расположение корней оного из них, если для другого таковое известно. Решение этой задачи, естественно, представляет интерес при численном построении в пространстве параметров дискретной динамической системы областей, соответствующих одинаковому расположению корней характеристического полинома относительно единичного круга. Мы же воспользуемся предложенным алгебраическим критерием в удобной для конкретных вычислений форме для установления робастности запаса устойчивости, т.е. запаса устойчивости полинома с интервально неопределенными коэффициентами.

При $r = const$ опорные значения коэффициентов $P_n(p)$, при которых будет проводиться счет, могут быть заданы соотношениями $a_k^* = (\overline{a}_k + \underline{a}_k)/2 \quad (k = 0,\ 1, \ldots,\ n) \quad (\text{т.е. } b_k^* = a_k^* r^{n-k})$, а погрешность ε_0 –

$$\varepsilon_0 = \max_k |b_k^* - b_k| \tag{4}$$

Из теоремы работы [12] следует следующее утверждение:

Теорема. *При выполнении условий*

$$\varepsilon_j < \beta_j - \alpha_j \ (i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1) \tag{5}$$

где ε_0 *задается формулой (4), а для остальных* ε_j *(j= 1,2,...,n-1) имеют место рекуррентные формулы*

$$\varepsilon_{j+1} = (1 + ((\alpha_j + \beta_j)M_j + \beta_j(\alpha_j + \varepsilon_j)(\beta_j(\beta_j - \varepsilon_j))^{-1})\varepsilon_j \tag{6}$$

где $M_j = \max_k \{|b_k^{*(j)}|\}$, $\alpha_j = \min\{|b_0^{*(j)}|, |b_{n-j}^{*(j)}|\}$, $\beta_j = \max\{|b_0^{*(j)}|, |b_{n-j}^{*(j)}|\}$, *а величины* $b^{*(j)}$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-j)$ *определяются рекуррентными соотношениями*

$$b_k^{*(j)} = b_{n+1}^{*(j-1)} - (b_0^{*(j-1)}/b_{n-j+1}^{*(j-1)})b_{n-j-k}^{*(j-1)}, |b_0^{*(j-1)}| < b_{n-j+1}^{*(j-1)} \tag{7}$$

$$b_k^{*(j)} = b_k^{*(j-1)} - (b_{n-j+1}^{*(j-1)}/b_0^{*(j-1)})b_{n-j-k+1}^{*(j-1)}, |b_{n-j+1}^{*(j-1)}| < |b_0^{*(j-1)}| \tag{8}$$

полином $H_n(p)$ *имеет столько же корней внутри и вне единичного круга, сколько и полином* $H_n^*(p)$ *с коэффициентами* b_k^*.

Следствие. *При выполнении условий теоремы полином* $P_n(p)$ *имеет столько же корней внутри и вне круга радиуса* r*, сколько и полином* $P_n^*(p)$ *с коэффициентами* a_k^*.

Приведенные утверждения означают, что если полином $H_n^*(p)$ устойчив (а значит, полином $P_n^*(p)$ имеет запас устойчивости r), то и все семейство полиномов (1) имеет тот же запас устойчивости. Конечно, оба приведенных выше утверждения носят достаточный характер. Если условия их не выполняются, то мы не можем утверждать, что число корней полиномов $H_n(p)$ и $H_n^*(p)$ внутри единичного круга различно (т.е. число корней полиномов $P_n(p)$ и $P_n^*(p)$ внутри и вне круга радиуса r различно). Но в этом случае можно воспользоваться более детальными теоремами [13], или использовать другие признаки устойчивости относительно единичного круга [14].

Пример. Рассмотрим в качестве примера интервальный полином

$$P_4(p) = a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 \quad (9)$$

где $0,99 \le a_0 \le 1,01$, $-1,01 \le a_1 \le -0,99$, $0,73 \le a_2 \le 0,75$, $-0,51 \le a_1 \le -0,49$, $0,11 \le a_k \le 0,13$. Тогда полином $P_4^*(p)$ будет иметь вид

$$P_4^*(p) = p^4 - p^3 + 0,74p^2 - 0,5p + 0,12 \quad (10)$$

Корнями (10) являются $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,6$, $p_{3,4} = \pm 0,5\sqrt{2}$. То есть полином (10) удовлетворяет ограничению $|p_i| \le 0,8$ $(i = 1,2,3,4)$. Проверим, будет ли $r = 0,8$ запасом устойчивости для всего семейства полиномов (9).

Введем значение параметра $r = 0,8$ в (10) за счет замены $p \to 0,8p$. Получим полином

$$H_4^*(p) = 0,4096p^4 - 0,512p^3 + 0,592p^2 - 0,4p + 0,12 \quad (11)$$

Значение ε_0 будет равно 0,01.

Проверку выполнения условий теоремы можно сделать более наглядной, если, подобно [12], расположить необходимые для проверки величины, полученные по приведенным формулам, порядке, приведенном в таблице 1.

Из приведенной таблицы видно, что если величина $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^{(1)} = 0,01$ (предпоследний столбец таблицы), то условия теоремы выполняются и, следовательно, для любого полинома семейства (9) будет обеспечен запас устойчивости $r = 0,8$.

Таблица 1 - Таблица значений величин, входящих в условия теоремы

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.131.11.1

j	β_j	α_j	M_j	β_j-α_j	$\varepsilon^{(1)}_j$	$\varepsilon^{(2)}_j$
0	0,4096	0,12	0,5920	0,2704	0,0100	0,0200
1	0,3744	0,25	0,4186	0,1244	0,0259	0,0665
2	0,6981	0,2075	0,6981	0,4906	0,0983	0,2856
3	0,6364	0,0425	0,6364	0,5939	0,3773	1,5937

Замечание

Если бы величина ε_0 была равна $\varepsilon_0^{(2)} = 0,02$, т.е. рассматривался интервальный полином (9), где $0,98 \le a_0 \le 1,02$, $-1,02 \le a_1 \le -0,98$, $0,72 \le a_2 \le 0,76$, $-0,52 \le a_1 \le -0,48$, $0,10 \le a_k \le 0,14$ (последний столбец таблицы), то условия теоремы были бы не выполнены, т.к. $\varepsilon_3 > \beta_3 - \alpha_3$, и нельзя было бы сделать вывод о запасе устойчивости семейства полиномов.

Заключение

Представленная работа посвящена вопросу о сохранении запаса устойчивости интервально неопределенной дискретной системы в случае, если этот запас устойчивости обеспечен для системы с конкретными значениями параметров. Это означает не только заданную степень удаленности параметров систем всего семейства, определяемого интервальностью коэффициентов, от границы области устойчивости, но и ограничение на длительность переходных процессов в линеаризованных системах семейства. При этом в работе получены условия, при выполнении которых все полиномы интервально неопределенного семейства будут иметь одинаковое число корней внутри и вне круга радиуса r (и, в частности, единичного круга). Также приведены достаточные условия, при выполнении которых запас устойчивости некоторого конкретного характеристического полинома для дискретной системы может обеспечиваться и для семейства полиномов, определяемых интервальностью коэффициентов. При получении этих условий был использован алгебраический критерий устойчивости относительно единичного круга, доказанный в работе [12] и накладывающий ограничения на ширину интервалов, в которых определяются коэффициенты полиномов интервального семейства. Для наглядности результаты вычислений предложено, подобно [12], представлять в виде таблиц. Распространение известного критерия на случай исследования корней интервального семейства полиномов позволило делать выводы о робастности существующего запаса устойчивости. Результаты апробированы на примере полинома четвертой степени с интервальными коэффициентами.

Конфликт интересов

Не указан.

Conflict of Interest

None declared.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Ильюшин Ю.В. Исследование запаса устойчивости систем автоматического управления / Ю.В. Ильюшин, А.Л. Кравцова // Альманах современной науки и образования. — 2012. — № 1(56). — С. 26-37.
2. Сударчиков С.А. Оценка запасов устойчивости систем с интервальными параметрами / С.А. Сударчиков, А.В. Ушаков // Научно-технический вестник СПб ГИТМО (ТУ). — 2002. — Вып. 6. — С. 257-262.
3. Александров А.Г. Запасы устойчивости и робастная устойчивость / А.Г. Александров // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 6. — С. 32-41.
4. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний / Ю.И. Неймарк. — М.: Наука, 1972. — 472 с.
5. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии / Г.Ю. Ризниченко. — Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 184 с.
6. Братусь А.С. Дискретные динамические системы и математические модели в экологии / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, Е.В. Родина. — М.: МИИТ, 2005, — 139 с.
7. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике / С.А. Ашманов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — 199 с.
8. Антоновская О.Г. К анализу формы и длительности переходных процессов при переключениях синтезатора с делителем частоты и пропорционально-интегрирующим фильтром по диапазону / О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов, Н.И. Лобашов // Динамика систем. — Горький : Горьк. гос. ун-т., 1989. — С. 59-72.
9. Горюнов В.И. К анализу системы ИФАПЧ с пропорционально-интегрирующим фильтром произвольного порядка / В.И. Горюнов // Динамика систем. — Горький: Горьк. гос. ун-т., 1985. — С. 113-125.
10. Поляк Б.П. Робастная устойчивость и управление / Б.П. Поляк, П.С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
11. Джури Э.И. Робастность дискретных систем / Э.И. Джури // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 5. — С. 3-28.
12. Горюнов В.И. О приближенном исследовании расположения корней характеристического полинома / В.И. Горюнов // Известия вузов. Радиофизика. — 1969. — № 7. — С. 1083-1086.
13. Горюнов В.И. О приближенных условиях принадлежности корней характеристического полинома внутренности единичного круга / В.И. Горюнов // Динамика систем. — 1976. — Вып. 9. — С. 169-173.
14. Корсаков Г.Ф. О количестве корней полинома вне круга / Г.Ф. Корсаков // Математические заметки. — 1973. — Т. 13. — № 1. — С. 3-12.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Ilyushin Yu.V. Issledovanie zapasa ustoytchivosti system avtomatitcheskogo upravleniya [Stability Margin Study for Automatic Control Systems] / Yu.I. Ilyushin, A.L. Kravtsova // Al’manakh sovremennoy nauki [Almanac of Modern Science]. — 2012. — № 1(56). — P. 26-37. [in Russian]
2. Sudarchikov S.A. Otsenka zapasov ustoytchivosti system s interval’nymi parametrami [Estimation of Stability Margin Systems with Interval Parametres] / S.A. Sudarchikov // Nauchno-technicheskii vestnik ITMIO [Science and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics]. — 2002. — Iss 6. — P. 257-262. [in Russian]
3. Aleksandrov A.G. Zapasy ustojchivosti i robastnaja ustojchivost' [Stability Margins and Robust Stability] / A.G. Aleksandrov // Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija [Journal of Computer and Systems Science International]. — 2010. — № 6. — P. 32-41. [in Russian]
4. Neymark Yu.I. Metod totchechnykh otobrazheniy v teorii nelineynykh kolebaniy [Point Mappings Method in Non-linear Vibrations Theory] / Neymark Yu.I. — Moscow: Nauka, 1972. — 472 p. [in Russian]
5. Riznichenko G.Yu. Matematitcheskiye modeli v biofizike I ekologii [Mathematical Models in Biophysics and Ecology] / G.Yu. Riznichenko. — Moscow; Izhevsk: Institute of Computer Investigations, 2003. — 184 p. [in Russian]
6. Bratus A. S. Diskretnye dinamitcheskiye sistemy i matematitcheskiye modeli v ekologii [Discrete Dynamical Systems and Mathematical Models in Ecology] / A.S. Bratus, A.S. Novozhilov, E.V. Rodina. — Moscow: MSURT, 2005. — 139 p. [in Russian]
7. Ashmanov S.A. Matematitcheskiye modeli I metody v ekonomike [Mathematical Models and Methods in Economy] / S.A. Ashmanov. — Moscow: Moscow State University, 1980. — 199 p. [in Russian]
8. Antonovskaya O.G. K analizu formy I dlitelnosti perehodnyh processov pri pereklyucheniyah sintezatora s delitelem chastity I proportsionalno-integrtiruyushim filtrom po diapazonu [On the Analysis of Form and Duration of Transient Processes When Switching over a Range in the Synthesizer with Counter and Proportional-integrating Filter] / O.G. Antonovskaya, V.I. Goryunov, N.I. Lobashov // Dinamika system [System Dynamics]. — Gorky: GSU, 1989. — P. 59-72. [in Russian]

9. Goryunov V.I. K analizu sistemy IFAPCh s proportsional’no-integriruyushim filtrom proizvol’nogo poryadka [On the Analysis PPFA System with Proportional-integrating Filter of Arbitrary Order] / V.I. Goryunov // Dinamika system [System Dynamics]. — Gorky: GSU, 1985. — P. 113-125. [in Russian]

10. Polyak B.T. Robastnaya ustoytchivost i upravleniye [Robust Stability and Control] / B.T. Polyak, P.S. Sherbakov — M.: Nauka, 2002. — 303 p. [in Russian]

11. Dzhuri Je.I. Robastnost' diskretnyh sistem [Robustness of Discrete Systems] / Je.I. Dzhuri // Avtomatika i telemehanika [Remote Control]. — 1990. — № 5. — P. 3-28. [in Russian]

12. Goryunov V. I. O priblizhennom issledovanii raspolozheniya korney kharakteristicheskogo polinoma [On Approximate Study of Roots Disposition of Characteristic Polynomial] / V. I. Goryunov // Izvestija vuzov. Radiofizika [Radio-physics and Quantum Electronics]. — 1969. — № 7. — P. 1083-1086. [in Russian]

13. Goryunov V.I. O priblizhennykh usloviyakh prinadlezhnosti korney kharakteristicheskogo polinoma vnutrennosti edinichnogo kruga [On Approximate Conditions of Belonging of the Roots of Characteristic Polynomial to the Interior of Unit Circle] / V. I. Goryunov // Dinamika sistem [Systems Dynamics]. — 1976. — № 9. — P. 169-173. [in Russian]

14. Korsakov G.F. O kolichestve kornej polinoma vne kruga [The Number of Roots of a Polynomial Outside a Circle] / G.F. Korsakov // Matematicheskie zametki [Mathematical Notes]. — 1973. — Vol. 13. — № 1. — P. 3-12. [in Russian]