ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА / DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.128.79

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СМЕШАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Научная статья

Сугак Д.В.[1, *]
[1] ORCID : 0000-0002-5405-5360;
[1] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (dima_sou[at]mail.ru)

Аннотация

В статье исследуется задача оптимального управления системой дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа второго порядка в случае смешанных ограничений. Для данной задачи сформулировано необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Этот результат может быть полезен как для организации последующей вычислительной процедуры типа метода последовательных приближений, так и для качественного анализа задачи оптимизации, возможно, не приводящего к окончательному ответу, но устанавливающего важные свойства решения, то есть оптимального процесса. В качестве примера приложения принципа максимума рассмотрена задача оптимального управления уравнением теплопроводности. В обеих задачах управляемая система с распределенными параметрами является сингулярной по Ж.Л. Лионсу. В случае сингулярной системы применение классической теории оптимального управления либо затруднительно, либо невозможно. Наличие смешанных ограничений в постановке рассматриваемых задач существенно осложняет процесс отыскания оптимального процесса.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, уравнение теплопроводности, параболическое уравнение, оптимальный процесс.

PONTRYAGIN’S MAXIMUM PRINCIPLE FOR A MIXED-CONSTRAINED OPTIMAL CONTROL PROBLEM GOVERNED BY THE HEAT EQUATION

Research article

Sugak D.V.[1, *]
[1] ORCID : 0000-0002-5405-5360;
[1] Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg, Russian Federation

* Corresponding author (dima_sou[at]mail.ru)

Abstract

The article investigates the problem of optimal control of a system of partial differential equations of second-order parabolic type in the case of mixed constraints. For this problem, a necessary optimality condition is formulated in the form of the Pontryagin’s maximum principle. This result can be useful both for organizing a subsequent computational procedure such as the method of successive approximations, and for a qualitative analysis of the optimization problem, which may not lead to a final answer, but establishes important properties of the solution, that is, the optimal process. As an example of the application of the maximum principle, the problem of optimal control of the heat equation is considered. In both problems, the controlled system with distributed parameters is singular according to Zh.L. Lyons. In the case of a singular system, the application of the classical theory of optimal control is either difficult or impossible. The presence of mixed constraints in the formulation of the problems under consideration significantly complicates the process of finding the optimal process.

Keywords: Pontryagin’s maximum principle, heat equation, parabolic equation, optimal process.

Введение

Принцип максимума [1] в математической теории управления, сформулированный и доказанный Л.С. Понтрягиным и его сотрудниками В.Г. Болтянским, Р.В. Гамкрелидзе и Е.Ф. Мищенко для задач оптимального управления системами с сосредоточенными параметрами, то есть системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, является одним из самых известных и цитируемых результатов в современной математике. Открытие принципа максимума произошло благодаря прикладным задачам, оказавшимся полностью недоступными для решения методами классического вариационного исчисления. Непригодность вариационного исчисления в данной ситуации объясняется тем, что подавляющее большинство прикладных технических задач описывались дифференциальными уравнениями, линейными относительно управляющих параметров. Таким образом, принцип максимума Понтрягина связал классическое вариационное исчисление с современными прикладными исследованиями задач оптимизации. Особое место здесь занимают задачи с распределенными параметрами, возникающие в математической физике.

Благодаря прикладному и общенаучному значению перехода теории оптимального управления от приложений в задачах классической механики к приложениям в гидродинамике, газодинамике и обширном поле других физических исследований, вскоре после основополагающей публикации принципа максимума Понтрягина [1] этот результат был распространен на различные прикладные задачи оптимального управления для систем с распределенными параметрами. В данной работе будут рассмотрены именно такие задачи. Предполагается, что поведение объекта управления описывается дифференциальными уравнениями параболического типа [2]. Исследуются задачи оптимального управления при наличии смешанных ограничений, которые существенно усложняют поиск оптимального процесса. Задачи оптимального управления уравнениями параболического типа при наличии ограничений на фазовую и управляющую переменные вызывают повышенный интерес в настоящее время. В подтверждение этого факта отметим следующие публикации в ведущих международных математических журналах [3], [5], [7], [9]. В частности, в [8] рассматривалась задача оптимального управления уравнением теплопроводности в случае смешанных ограничений, но принцип максимума Понтрягина был установлен в предположении, что управляющая переменная удовлетворяет условию Слейтера. Одним из преимуществ данной работы является то, что никаких дополнительных трудно проверяемых предположений о фазовых и управляющих переменных для обоснования принципа максимума Понтрягина здесь не используется.

Задача оптимального управления системой уравнений параболического типа. Случай смешанных ограничений

Пусть Ω – открытое и ограниченное подмножество $\mathbb{R}^l$ с C^2 - гладкой границей Γ, $K \subset \mathbb{R}^m$ – непустое множество и $f_0 : \bar{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}^h \times \bar{K} \to \mathbb{R}^h$, $f_i : \bar{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}^h \times \bar{K} \to \mathbb{R}^h$, $\forall i = 1,\ldots,l$. Рассмотрим следующую систему управления:

$$\begin{cases} \tilde{A}y = f_0[x,t,y(x,t),u(x,t)] + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i[x,t,y(x,t),u(x,t)]\right), \\ u(x,t) \in K, (x,t) \in Q_T := \Omega \times (0,T) \\ y|_{t=0} = y_0(\cdot) \\ y|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $y(\cdot) = (y_k(\cdot))_{k=1}^h : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^h$ - состояние, $u(\cdot)$ - управление и $\tilde{A}$ – параболический дифференциальный оператор второго порядка: $\tilde{A}y(\cdot) = p(\cdot)$, где $p(x) = (p_k(x))_{k=1}^h$, $p_k(x) = -\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\alpha_{ij}^{(k)}(x,t)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{l} b_i^{(k)}(x,t)\frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \frac{\partial y_k}{\partial t}$, $\forall k = 1,\ldots,h$. Коэффициенты $b_i^{(k)}$ – измеримые функции [10] с конечными нормами $\left\|\sum_{i=1}^{l} b_i^{(k)}(x,t)\right\|_{q,Q_T} < \infty$, где $|b(x,t)\|_{q,Q_T} = \int_0^T \left(\int_\Omega |b(x,t)|^q dx\right)^{\frac{1}{a}} dt$, а q есть некоторое заданное число, удовлетворяющее условию

$$\infty > q > l + 2. \quad (2)$$

В целях упрощения формулировки предположений считаем, что $l \geq 2$. Функции $\alpha_{ij}^{(k)}$ также измеримы и $v\sum_{i=1}^{l} \xi_i^2 \leq \alpha_{ij}^{(k)}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \mu\sum_{i=1}^{l} \xi_i^2$ для $\forall \xi \in \mathbb{R}^l$ и для почти всех $(x,t) \in Q_T$, $k = 1,\ldots,h$, при некоторых $v, \mu = \text{const} > 0$. Предположим также, что заданы функции $L^{(j)} : \bar{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}^h \times \bar{K} \to \mathbb{R}$, $\varphi^{(j)} : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$, $j = 0,\ldots,r$ и $g_i : \bar{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}^h \times \bar{K} \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,s$. Обозначим

$$J_j(y,u) := \int_0^T \int_\Omega L^{(j)}[x,t,y(x,t),u(x,t)]dxdt + \int_\Omega \varphi^{(j)}[x,y(x,T)]dx, \quad (3)$$

где $j = 0,\ldots,r$. Рассмотрим задачу

$$J_0(y,u) \to \min \quad (4)$$

на множестве процессов (y,u) в системе (1), удовлетворяющих ограничениям

$$J_j(y,u) = 0 \text{ для } j = 1,\ldots,r_1; \quad J_j(y,u) \leq 0 \text{ для } j = r_1+1,\ldots,r, \quad (5)$$

$$g_i[x,t,y(x,t),u(x,t)] \begin{cases} = 0 i = 1,\ldots,s_1 \\ \leq 0 i = s_1+1,\ldots,s \end{cases} \quad (6)$$

для почти всех $(x,t) \in Q_T := \Omega \times (0,T)$. В (1) $y_0(\cdot) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^h$ - заданная непрерывная функция, обращающаяся в нуль на границе области Ω и удовлетворяющая условию Гельдера:

$$|y_0(\cdot)|_\Omega^{(\alpha)} := \sup_{x',x'' \in \Omega} \frac{|y_0(x'') - y_0(x')|}{|x'' - x'||^\alpha} < \infty. \quad (7)$$

Показатель $\alpha \in (0,1)$ взят из теоремы 10.1 [13]. Поясним это утверждение. Символом $\dot{H}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(Q_T \to \mathbb{R}^h\right)$ обозначим банахово пространство непрерывных функций $y(\cdot) : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}^h$, обращающихся в нуль на боковой поверхности $\partial\Omega \times [0,T]$ цилиндра Q_T и имеющих конечную норму

$$|y(\cdot)|_{Q_T}^{(\alpha)} := \max_{Q_T} |y| + |y(\cdot)|_{x,Q_T}^{(\alpha)} + |y(\cdot)|_{t,Q_T}^{(\alpha/2)}. \quad (8)$$

Здесь

$$|y(\cdot)|_{x,Q_T}^{(\gamma)} := \sup_{x',x''\in\Omega, t\in[0,T]} \frac{|y(x'',t)-y(x',t)|}{|x''-x'|^{\gamma}}, 0<\gamma<1 \quad (9)$$

$$|y(\cdot)|_{t,Q_T}^{(\gamma)} := \sup_{t',t''\in[0,T], x\in\Omega} \frac{|y(x,t'')-y(x,t')|}{|t''-t'|^{\gamma}}, 0<\gamma<1 \quad (10)$$

Положим $\mathfrak{M} := \dot{H}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}\left(Q_T \to \mathbb{R}^h\right) \cap W_2^{1,0}\left(Q_T \to \mathbb{R}^h\right)$. Здесь $W_2^{1,0}\left(Q_T \to \mathbb{R}^h\right)$ - гильбертово пространство со скалярным произведением, определенное в [13]. Согласно теореме 10.1 [13] существует такое число $\alpha \in (0,1)$, что для любой удовлетворяющей (7) функции $y_0(\cdot)$ и любых $\xi(\cdot) \in L_q\left(Q_T\right)$, $xi_i(\cdot) \in L_q\left(Q_T\right)$, $i = 1,\ldots,l$ начально-краевая задача

$$\tilde{A}y = \xi + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}, \quad y|_{t=0} = y_0(\cdot), \quad y|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0 \quad (11)$$

имеет, причем единственное, решение $y(\cdot) \in \mathfrak{M}$.

Допустимыми считаем управления $u(\cdot) \in L_\infty$. Таким образом, задача состоит в минимизации функционала J_0 на множестве $D := \{[y(\cdot),u(\cdot)] : y(\cdot) \in \mathfrak{M}, u(\cdot) \in L_\infty\left(Q_T \to \mathbb{R}^m\right)$ и справедливо (1), (5) и (6)}. При этом в (1) все производные понимаем как обобщенные [11]. Функционал J_0 , а также функционалы J_i из (5) определены согласно (3). В силу стандартных предположений о дифференцируемости и измеримости функций $L^{(j)}[x,t,y(x,t),u(x,t)]$ и $\varphi^{(j)}[x,y(x,T)]$ $(j = 0,\ldots,r)$, перечисленных в [12], все интегралы в (3) сходятся.

Все сделанные здесь предположения, однако, не гарантируют, что для заданного управления $u(\cdot) \in L_\infty$, где $u(x,t) \in K$ для почти всех $(x,t) \in Q_T$, нелинейная начально-краевая задача из (1) разрешима относительно $y(\cdot)$ в цилиндре Q_T . Это означает, что рассматриваемая управляемая система, вообще говоря, сингулярная по Лионсу [14]. Поясним, что управляемая система называется сингулярной по Ж.Л. Лионсу, если некоторым управлениям не соответствует никакое состояние, либо напротив, таких состояний много, в том числе бесконечно много, либо состояние одно, но неустойчивое, то есть малое возмущение управления вызывает немалое возмущение состояния. Эффект сингулярности не является надуманным. Как показано в [14] существует много имеющих прикладное значение сингулярных задач оптимального управления.

Обозначим через $p > 0$ показатель, сопряженный показателю q из (2), то есть $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Пусть заданы функции $\psi(\cdot) \in W_p^{1,0}\left(Q_T \to \mathbb{R}^h\right)$, $\lambda_1(\cdot),\ldots,\lambda_s(\cdot) \in L_1\left(Q_T \to \mathbb{R}\right)$ и множители Лагранжа $v_0,\ldots,v_r \in \mathbb{R}$. Обозначим символом * транспонирование и введем функцию Гамильтона $H[x,t,y,u] == \psi(x,t)^* f_0[x,t,y,u] - \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i}(x,t) f_i[x,t,y,u] - \sum_{j=0}^{r} v_j L^{(j)}[x,t,y,u]$, где $f_0(\cdot)$ и $f_i(\cdot)$ – функции из (1), $L^{(j)}(\cdot)$ – функции из (3).

Теорема 1 [12].

Пусть $\left[y^0(\cdot),u^0(\cdot)\right]$ – оптимальный процесс в задаче (1) – (6). Тогда существуют функции $\psi(\cdot) \in W_p^{1,0}\left(Q_T \to \mathbb{R}^h\right)$, $\lambda_1(\cdot),\ldots,\lambda_s(\cdot) \in L_1\left(Q_T \to \mathbb{R}\right)$, числа $v_0,\ldots,v_r \in \mathbb{R}$ и конечная регулярная борелевская мера $\mu(dx,dt,dp)$ [10], где $(x,t) \in Q_T,\ p \in \mathbb{R}^h$, такие что выполнены следующие соотношения:

$$H\left[x,t,y^0(x,t),u^0(x,t)\right] = \max_{v\in K^0(x,t)} H\left[x,t,y^0(x,t),v\right] \quad (12)$$

для почти всех $(x,t) \in Q_T$, где $K^0(x,t) := \{v \in K : g_i\left[x,t,y^0(x,t),v\right] = 0, i = 1,\ldots,s_1, g_i\left[x,t,y^0(x,t),v\right] \le 0, i = s_1+1,\ldots,s\}$,

$$\lambda_i(x,t) \ge 0, \quad \lambda_i(x,t) g_i\left[x,t,y^0(x,t),u^0(x,t)\right] = 0. \quad (13)$$

для почти всех $(x,t) \in Q_T$ и всех $i = s_1+1,\ldots,s$,

$$v_0 \ge 0, v_j \ge 0, v_j J_j\left(y^0,u^0\right) = 0, j = r_1+1,\ldots,r. \quad (14)$$

$$\sum_{i=s_1+1}^{s} \int_{Q_T} \lambda_i(x,t)dxdt + \sum_{j=0}^{r} \left|v_j\right| + \mu\left(Q_T \times \mathbb{R}^h\right) > 0 \quad (15)$$

Доказательство Теоремы 1 в полном объёме приведено в работе [12]. Теперь установим с ее помощью необходимое условие оптимальности в конкретной задаче оптимального управления.

Задача оптимального управления уравнением теплопроводности. Случай смешанных ограничений

Важное место в теории уравнений в частных производных и ее приложениях занимает уравнение теплопроводности [2]:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2} = 0 \quad (16)$$

Уравнение теплопроводности встречается в теории теплопередачи, в теории диффузии и в теории ценообразования на производные финансовые инструменты. Оно является наиболее простым представителем класса параболических уравнений. Уравнение теплопроводности было выведено и впервые исследовано в 1822 году в знаменитой работе Ж. Фурье «Аналитическая теория тепла», которая сыграла важную роль в развитии методов математической физики.

Пусть Ω – открытое и ограниченное подмножество $\mathbb{R}^3$ с C^2 - гладкой границей $\Gamma, K \subset \mathbb{R}^m$ – непустое множество и $f : \bar{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \bar{K} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим следующую систему управления:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2} = f[x,t,y(x,t),u(x,t)], \\ u(x,t) \in K, (x,t) \in Q_T := \Omega \times (0,T), \\ y|_{t=0} = y_0(\cdot), \\ y|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Здесь $y(x,t) : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ - состояние, $u(x,t)$ - управление и определим функционал

$$J_0(y,u) := \int_0^T \int_\Omega [y(x,t)]^2 dxdt \tag{18}$$

Рассмотрим задачу

$$J_0(y,u) \to \min \tag{19}$$

на множестве процессов (y,u) в системе (17), удовлетворяющих ограничениям

$$g_i[x,t,y(x,t),u(x,t)] \begin{cases} = 0 i = 1,\dots,s_1 \\ \leq 0 i = s_1+1,\dots,s \end{cases} \tag{20}$$

для почти всех $(x,t) \in Q_T := \Omega \times (0,T)$. В (17) $y_0(\cdot) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ - заданная непрерывная функция, обращающаяся в нуль на границе области Ω и удовлетворяющая условию Гельдера (7):

$$|y_0(\cdot)|_\Omega^{(\alpha)} := \sup_{x',x'' \in \Omega} \frac{|y_0(x'') - y_0(x')|}{|x'' - x'|^\alpha} < \infty.$$

Напомним, что показатель $\alpha \in (0,1)$ взят из теоремы 10.1 [13]. Очевидно, что при сделанных предположениях задача оптимального управления (17) – (20) представляет собой частный случай задачи (1) – (6) и поэтому для нее справедлива Теорема 1 [12]. При этом отметим, что задача минимизации функционала (18) имеет вполне содержательный технический смысл. Первое уравнение в системе (17) есть управляемое уравнение теплопроводности и поэтому задачу (17) – (20) можно переформулировать следующим образом – необходимо найти такой закон оптимального управления при заданных смешанных ограничениях (20), чтобы температура в области Ω на промежутке времени $(0,T)$ была как можно дальше от своих экстремальных значений. Иначе говоря, нужно подобрать управление $u(x,t)$ таким образом, чтобы отклонение температуры от нулевого значения во всех точках области Ω было бы минимально возможным на протяжении всего временного интервала $(0,T)$.

Применим теорему 1 [12] к задаче (17) – (20). Функция Гамильтона примет следующий вид $H[x,t,y,u] = \psi(x,t) f[x,t,y,u] - v_0[y(x,t)]^2$, где $\psi(\cdot) \in W_p^{1,0}(Q_T \to \mathbb{R})$ и $v_0 \geq 0$. Соотношения (13) и (15) останутся без изменений, а соотношение (14) исчезнет. Таким образом, в условиях задачи (17) – (20) теорему 1 [12] можно переформулировать следующим образом:

Теорема 2.

Пусть $\left[y^0(\cdot), u^0(\cdot)\right]$ - оптимальный процесс в задаче (17) – (20). Тогда существует такая функция $\psi(\cdot) \in W_p^{1,0}(Q_T \to \mathbb{R})$, что

$$\psi(x,t) f\left[x,t,y^0(x,t),u^0(x,t)\right] = \max_{v \in K^0(x,t)} \left\{\psi(x,t) f\left[x,t,y^0(x,t),v\right]\right\} \tag{21}$$

для почти всех $(x,t) \in Q_T$, где $K^0(x,t) := \{v \in K : g_i\left[x,t,y^0(x,t),v\right] = 0$, $i = 1,\dots,s_1, g_i\left[x,t,y^0(x,t),v\right] \leq 0, i = s_1+1,\dots,s\}$.

Заключение

В статье рассмотрены задачи оптимального управления системой дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа второго порядка и уравнением теплопроводности. В постановках обеих задач присутствуют смешанные ограничения. Исследованы сингулярные по Ж.Л. Лионсу системы с распределенными параметрами. В обоих случаях установлены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе и др. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
2. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными / О.А. Олейник. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. — 260 с.
3. Wang Y. Optimal control of two-dimensional parabolic partial differential equations with application to steel billets cooling in continuous casting secondary cooling zone / Y. Wang, X. Luo, Y. Yu et al. // Optimal Control Applications and Methods. — 2016. — Vol. 37. — p. 1101-1374.
4. Bonnans J. Optimal control of a parabolic equation with time-dependent state constraints / J. Bonnans, P. Jaisson // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2010. — Vol. 48. — p. 4550-4571.
5. Deckelnick K. Variational discretization of parabolic control problems in the presence of pointwise state constraints / K. Deckelnick, M. Hinze // Journal of Computational Mathematics. — 2011. — Vol. 29. — p. 1-16.
6. Meidner D. A priori error estimates for finite element discretization of parabolic optimization problems with pointwise state constraints in time / D. Meidner, R. Rannacher, B. Vexler // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2011. — Vol. 49. — p. 1961-1997.
7. Neitzel I. On regularization methods for the numerical solution of parabolic control problems with pointwise state constraints / I. Neitzel, F. Tröltzsch // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations. — 2009. — Vol. 15. — p. 426-453.
8. Wang G. Error estimates for an optimal control problem governed by the heat equation with state and control constraints / G. Wang, X. Yu // International Journal of Numerical Analysis and Modelling. — 2010. — Vol. 7. — p. 30-65.
9. Gong W. Error estimates for parabolic optimal control problems with control and state constraints / W. Gong, M. Hinze // Computational Optimization and Applications. — 2013. — Vol. 56. — p. 131-151.
10. Макаров Б.М. Лекции по вещественному анализу / Б.М. Макаров, А.Н. Подкорытов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 688 с.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
12. Матвеев А.С. Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления системой параболического типа при наличии смешанных ограничений / А.С. Матвеев, Д.В. Сугак. — СПб., 2000. — 3115.
13. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
14. Лионс Ж.Л. Управление сингулярными распределенными системами / Ж.Л. Лионс. — М.: Наука, 1987. — 414 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Pontrjagin L.S. Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov [Mathematical Theory of Optimal Processes] / L.S. Pontrjagin, V.G. Boltjanskij, R.V. Gamkrelidze et al. — M.: Nauka, 1983. — 392 p. [in Russian]
2. Olejnik O.A. Lekcii ob uravnenijah s chastnymi proizvodnymi [Lectures on Partial Differential Equations] / O.A. Olejnik. — M.: BINOM. Laboratorija znanij, 2011. — 260 p. [in Russian]
3. Wang Y. Optimal control of two-dimensional parabolic partial differential equations with application to steel billets cooling in continuous casting secondary cooling zone / Y. Wang, X. Luo, Y. Yu et al. // Optimal Control Applications and Methods. — 2016. — Vol. 37. — p. 1101-1374.
4. Bonnans J. Optimal control of a parabolic equation with time-dependent state constraints / J. Bonnans, P. Jaisson // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2010. — Vol. 48. — p. 4550-4571.
5. Deckelnick K. Variational discretization of parabolic control problems in the presence of pointwise state constraints / K. Deckelnick, M. Hinze // Journal of Computational Mathematics. — 2011. — Vol. 29. — p. 1-16.
6. Meidner D. A priori error estimates for finite element discretization of parabolic optimization problems with pointwise state constraints in time / D. Meidner, R. Rannacher, B. Vexler // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2011. — Vol. 49. — p. 1961-1997.
7. Neitzel I. On regularization methods for the numerical solution of parabolic control problems with pointwise state constraints / I. Neitzel, F. Tröltzsch // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations. — 2009. — Vol. 15. — p. 426-453.
8. Wang G. Error estimates for an optimal control problem governed by the heat equation with state and control constraints / G. Wang, X. Yu // International Journal of Numerical Analysis and Modelling. — 2010. — Vol. 7. — p. 30-65.
9. Gong W. Error estimates for parabolic optimal control problems with control and state constraints / W. Gong, M. Hinze // Computational Optimization and Applications. — 2013. — Vol. 56. — p. 131-151.
10. Makarov B.M. Lekcii po veshhestvennomu analizu [Lectures on Real Analysis] / B.M. Makarov, A.N. Podkorytov. — SPb.: BHV-Peterburg, 2011. — 688 p. [in Russian]
11. Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of Mathematical Physics] / V.S. Vladimirov. — M.: Nauka, 1988. — 512 p. [in Russian]
12. Matveev A.S. Princip maksimuma Pontrjagina dlja zadachi optimal'nogo upravlenija sistemoj parabolicheskogo tipa pri nalichii smeshannyh ogranichenij [Pontryagin’s Maximum Principle for a Mixed-constrained Optimal Control Problem Governed by a System of Parabolic Equations] / A.S. Matveev, D.V. Sugak. — SPb., 2000. — 3115. [in Russian]
13. Ladyzhenskaja O.A. Linejnye i kvazilinejnye uravnenija parabolicheskogo tipa [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type] / O.A. Ladyzhenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva. — M.: Nauka, 1967. — 736 p. [in Russian]
14. Lions Zh.L. Upravlenie singuljarnymi raspredelennymi sistemami [Control of Singular Distributed Systems] / Zh.L. Lions. — M.: Nauka, 1987. — 414 p. [in Russian]