ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА / DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.22

К ОЦЕНИВАНИЮ РОБАСТНОГО ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ В НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Научная статья

Антоновская О.Г.[1,] *, Бесклубная А.В.[2]
[1] ORCID : 0000-0002-5688-7996;
[1, 2] Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (olga.antonovsckaja[at]yandex.ru)

Аннотация

В работе приводится постановка задачи об определении робастного запаса устойчивости, т.е. запаса устойчивости в условиях неопределенности в задании всех или части параметров непрерывных и дискретных динамических систем. Предложена процедура определения максимального запаса устойчивости, основанная на введении параметра, определяющего величину запаса устойчивости в характеристическое уравнение в явном виде. При определении робастной устойчивости редуцированных полиномов используется метод Рауса-Гурвица для непрерывных динамических систем и критерий Корсакова для дискретных динамических систем, а также основные положения теории робастной устойчивости, позволяющей учесть исходную параметрическую неопределенность. Приведены примеры нахождения максимального робастного запаса устойчивости в конкретных непрерывных динамических системах с характеристическим полиномом второго и третьего порядка.

Ключевые слова: запас устойчивости, робастная устойчивость, характеристический полином, метод Рауса-Гурвица, критерий Корсакова.

TOWARD ROBUST STABILITY MARGIN EVALUATION IN CONTINUOUS AND DISCRETE SYSTEMS

Research article

Antonovskaya O.G.[1,] *, Besklubnaya A.V.[2]
[1] ORCID : 0000-0002-5688-7996;
[1, 2] Nyzhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation

* Corresponding author (olga.antonovsckaja[at]yandex.ru)

Abstract

The work presents the problem of determining the robust stability margin, i.e. the stability margin in conditions of uncertainty in setting all or part of parameters of continuous and discrete dynamic systems. A procedure for determining the maximum stability margin, based on the introduction of the parameter determining the value of the stability margin into the characteristic equation in explicit form, is suggested. When determining the robust stability of reduced polynomials, the Routh–Hurwitz theorem for continuous dynamical systems and the Korsakov criterion for discrete dynamical systems, as well as the basic statements of the theory of robust stability, which allows to take into account the initial parametric uncertainty, are used. Examples of finding the maximum robust stability margin in concrete continuous dynamical systems with the second and third order characteristic polynomials are presented.

Keywords: stability margin, robust stability, characteristic polynomial, Routh–Hurwitz theorem, Korsakov criterion.

Введение

Запасом устойчивости называют количественную характеристику, определяющую степень удаления параметров системы от границы устойчивости [1]. Для нормального функционирования конкретных технических систем необходимость обеспечения достаточного запаса устойчивости является естественной задачей [2], [3], [4]. А поскольку точное определение параметров реальной системы часто бывает затруднительно, возникает задача оценивания запасов устойчивости систем с интервальными параметрами (т.е. робастного запаса устойчивости) [5], [6]. При этом, традиционно при решении задачи определения запасов устойчивости используется критерий Найквиста [1], [6].

В настоящей работе рассматривается задача об определении максимального запаса устойчивости в пространстве параметров для непрерывных и дискретных систем с использованием других критериев устойчивости. Пересчет параметра, характеризующего запас устойчивости в динамических системах, в коэффициенты их характеристических уравнений, позволяет использовать известные критерии устойчивости [7, С. 76-86], [8], [9], [10], не только в случае заданного запаса устойчивости, но и распространить их на случай его интервального задания. В качестве примера рассмотрено нахождение максимального робастного запаса устойчивости в непрерывных динамических системах с характеристическими полиномами второго и третьего порядка.

Актуальность указанного подхода связана прежде всего с задачами, где речь идет не только о качественных исследованиях, но и получении некоторых количественных характеристик интервально неопределенных как непрерывных, так и дискретных систем. В частности с задачей получения оценок длительности переходных процессов в интервально неопределенных системах.

Запас устойчивости непрерывных систем и метод Рауса-Гурвица

Будем характеризовать запас устойчивости величиной $\lambda > 0$, для которой корни семейства полиномов

$$P_n(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^{n-k} \quad \left(0 < \underline{a}_k \le a_k \le \bar{a}_k\right) \tag{1}$$

удовлетворяют условию $Rep \le -\lambda$. Для того чтобы свести задачу определения λ к проблеме Гурвица перейдем на плоскости корней к новому значению p, соответствующему сдвигу мнимой оси на величину λ влево. В этом случае полином (1) переходит в полином

$$H_n(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^{n-k} \tag{2}$$

коэффициенты которого определяются из тождества

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (p-\lambda)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k p^{n-k} \tag{3}$$

и равны

$$b_i = \sum_{k=0}^{i} C_i^k (-\lambda)^{i-k} a_k, \quad C_i^k = \frac{(n-k)!}{(n-i)!(i-k)!} \tag{4}$$

Известно [11, С. 119-122], что переход корней полинома $P_n(p)$ через прямую $p = -\lambda$ слева направо соответствует нарушению неравенств $b_0 > 0, b_n > 0$ и $\Delta_{n-1} > 0$, где Δ_{n-1} – предпоследний определитель Гурвица, составленный из коэффициентов полинома $H_n(p)$. Поскольку $b_0 = a_0$ и не зависит от λ, нарушение неравенства $b_0 > 0$ соответствует нарушению неравенства $a_0 > 0$, т.е. легко проверяется. Нарушение же неравенства $b_n > 0$ при $\lambda \ne 0$ легко может быть уставлено с помощью анализа выражения

$$b_n = (-\lambda)^n a_0 + (-\lambda)^{n-1} a_1 + \ldots + (-\lambda) a_{n-1} + a_n \tag{5}$$

при условии, что при $\lambda = \min\limits_{a_k} b_n = \min a_n = \underline{a}_n > 0$. Следовательно, для определения максимального значения параметра $\lambda\left(\lambda_{\text{opt}}\right)$ необходимо анализировать выражение $\min\limits_{a_k} b_n$ при увеличении λ, начиная со значения $\lambda = 0$. Представим при $\lambda \ne 0$ выражение для b_n в виде разности

$$b_n = b_n^{\text{ч}} - b_n^{\text{н}} \tag{6}$$

где $b_n^{\text{ч}}$ – члены правой части (5), содержащие λ в четных степенях, включая ноль, а $b_n^{\text{н}}$ – члены, содержащие λ в нечетных степенях. Тогда очевидно, что

$$\min_{a_k} b_n = \underline{b}_n^{\text{н}} - \bar{b}_n^{\text{н}} = f_l(\lambda) \tag{6}$$

где

$$\underline{b}_n^{\text{ч}} = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-2}\lambda^2 + \underline{a}_{n-4}\lambda^4 + \ldots \tag{7}$$

$$\bar{b}_n^{\text{н}} = \bar{a}_{n-1}\lambda + \bar{a}_{n-3}\lambda^3 + \bar{a}_{n-5}\lambda^5 + \ldots \tag{8}$$

При такой постановке вопроса λ_{opt} является минимальным положительным корнем уравнения $f_l(\lambda) = 0$ при условии, что $\min\limits_{a_k} \Delta_{n-1}\left(0 < \lambda < \lambda_{\text{opt}}\right) > 0$. Необходимо, однако, отметить, что нахождение точного выражения для $f_2(\lambda) = \min\limits_{a_k} \Delta_{n-1}$ затруднительно. Поэтому можно использовать различного рода оценки для Δ_{n-1}. Одну из таких оценок получим следующим образом.

Представим Δ_{n-1} в виде разности положительных членов

$$\Delta_{n-1} = A_{n-1}(a_k, \lambda) - B_{n-1}(a_k, \lambda) \tag{9}$$

Такое представление Δ_{n-1} всегда возможно, т.к. $\lambda \ge 0$ и в силу требования о выполнении необходимого условия устойчивости $a_k > 0$. То есть появление в (9) отрицательных членов связано только с операцией раскрытия определителя Δ_{n-1}. При $\underline{a}_k \le a_k \le \bar{a}_k$, согласно (9), имеет место оценка

$$\underline{\Delta}_{n-1} = \min_{a_k} \Delta_{n-1} \ge \underline{\Delta}_{n-1}^* = \underline{A}_{n-1}(a_k, \lambda) - \bar{B}_{n-1}(a_k, \lambda) \tag{10}$$

Здесь черта у A_{n-1} и B_{n-1} переносится однотипно на все входящие в них a_k. Тогда выполнения неравенства $\underline{\Delta}_{n-1}^*(\lambda = \lambda') > 0$ достаточно для утверждения, что $\underline{\Delta}_{n-1}(\lambda = \lambda') > 0$ и, следовательно, при $\lambda = \lambda'$ комплексно-сопряженные корни семейства полиномов (1) не могут находиться на прямой $\operatorname{Re} p = -\lambda'$.

Для оценки величины λ_{opt} на основе оценки знакоположительности $\Delta_{n-1}\left(\underline{a}_k \le a_k \le \bar{a}_k; 0 < \lambda < \lambda_{opt}\right)$ можно, скажем, считать, что $\underline{\lambda} \le \lambda \le \bar{\lambda}$. Тогда условие знакопостоянства $\Delta_{n-1}\left(\underline{a}_k \le a_k \le \bar{a}_k; \underline{\lambda} \le \lambda \le \bar{\lambda}\right)$ можно установить на основе анализа величины $\underline{\underline{\Delta}}_n^*$, где

$$\underline{\underline{\Delta}}_n^* = \min \Delta_{n-1}\left(\underline{a}_k \le a_k \le \bar{a}_k; \underline{\lambda} \le \lambda \le \bar{\lambda}\right) \ge \underline{A}_{n-1} - \bar{B}_{n-1} \tag{11}$$

а черта у A_{n-1} и B_{n-1} переносится однотипно на все входящие в них a_k и параметр λ .

Алгоритм оценивания максимального значения робастного запаса устойчивости и его применение к непрерывным системам с характеристическими полиномами второй и третьей степени

Как следует из приведенных выше рассуждений, при $\underline{a}_k \le a_k \le \bar{a}_k, \underline{\lambda} \le \lambda \le \bar{\lambda}$ достаточными условиями робастной устойчивости полинома (2) являются

$$\min_{a_k} b_n\,(a_k, \lambda) = f_1(\lambda) > 0, \quad \min \Delta_{n-1}\,(a_k, \lambda) = f_2(\lambda) > 0 \tag{12}$$

Предположим, что при $\lambda = 0$ для полинома $H_n(p)$ в плоскости каких-либо двух выбранных параметров a_i, a_j при интервальности других построена область робастной устойчивости [12]. Для оптимизации качества переходного процесса в системе необходимо определить такое $\lambda = \lambda_{\text{opt}} \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$, чтобы выполнялись соотношения (12). Так как $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ являются полиномами относительно λ , процесс определения λ_{opt} можно провести следующим образом:

1) Находим аналитически или с помощью известных алгоритмических процедур корни уравнений $f_l(\lambda) = 0$ и $f_2(\lambda) = 0$. Обозначим их через $\lambda_l^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots, \lambda_n^{(2)}$ соответственно.

2) Образуем последовательность действительных положительных чисел $\{\alpha_m\}$ из этих корней.

3) Определяем $\lambda_{opt} = \min\{\alpha_m\}$.

4) Строим область робастной устойчивости [12] в плоскости параметров a_i, a_j при интервальности всех остальных параметров.

1. Пусть характеристическое уравнение $P_n(p) = 0$ имеет вид

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0. \quad \left(0 < \underline{a}_k \le a_k \le \bar{a}_k\right) \tag{13}$$

После введения величины λ будем иметь

$$H(p) = a_0 p^2 + (a_1 - 2a_0\lambda)\, p + \left(a_2 - a_1\lambda + a_0\lambda^2\right) \tag{14}$$

Для определения λ_{opt} имеем два уравнения $(a_0 > 0)$

$$a_1 - 2\bar{a}_0\lambda = 0, \quad \underline{a}_0\lambda^2 - \bar{a}_1\lambda + \underline{a}_2 = 0 \tag{15}$$

Из (15) определяем

$$\alpha_1 = \underline{a}_1/\bar{a}_0, \quad \alpha_{2,3} = \left(\bar{a}_1 \pm \sqrt{\bar{a}_1^2 - 4\underline{a}_0\underline{a}_2}\right) / \left(2\underline{a}_0\right) \tag{16}$$

Предположим, что $\min\{\alpha_k\} = \alpha_1 = \underline{a}_1/\bar{a}_0$. Тогда достаточная граница робастной устойчивости, оптимизирующая качество переходного процесса в системе, будет определяться из уравнения

$$\underline{a}_0 a_1^2 - 2\bar{a}_0 a_1^2 + 4a_2\bar{a}_0^2 = 0 \tag{17}$$

в котором выполняется достаточное условие робастной устойчивости полинома $(a_k > 0, k = 0, 1, 2)$, в качестве параметров для выделения области робастной устойчивости выбраны a_1, a_2 , а параметр a_0 остался интервальным. Тогда область робастного запаса устойчивости, оптимизирующего качество переходного процесса будет иметь вид, представленный на рисунке 1. Следует отметить, что если при $\lambda = 0$ областью робастной устойчивости был весь квадрант $a_1 > 0, a_2 > 0$, то в данном случае ей является только часть этого квадранта.

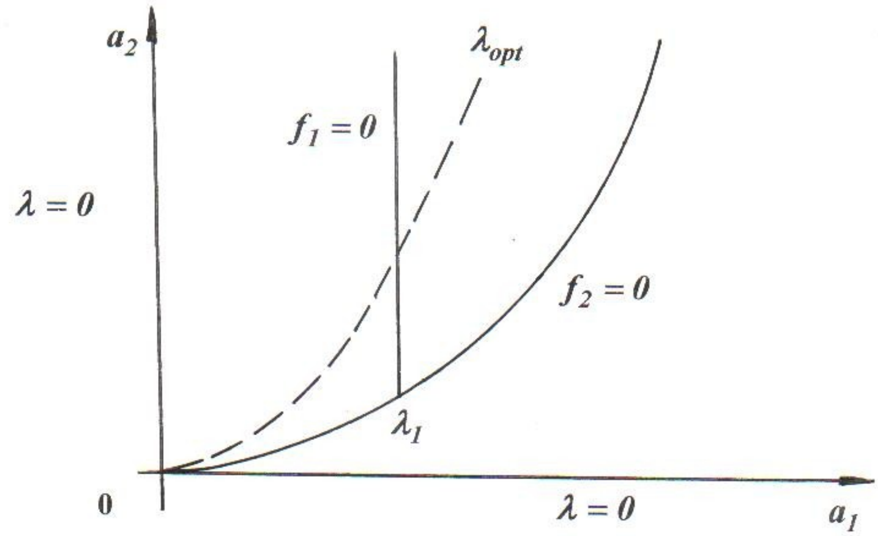

Рисунок 1 - Область робастного запаса устойчивости полинома второй степени
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.22.1

Аналогично можно выделить область робастного запаса устойчивости в случае, когда $\lambda_{\text{opt}} = \alpha_2$ и $\lambda_{\text{opt}} = \alpha_3$.

В реальной системе характеристический полином имеет вторую степень, скажем, в математической модели автоколебаний в основной стойке шасси самолета при бесконечной жесткости на кручение, когда момент инерции ориентирующей части стойки относительно оси стойки и коэффициент демпфирования колебаний по углу равны нулю [13].

2. Предположим теперь, что характеристический полином $P_n(p)$ имеет третью степень, т.е. характеристическое уравнение будет иметь вид

$$a_0p^3 + a_l p^2 + a_2 p + a_3 = 0. \quad \left(0 < \underline{a}_k \le a_k \le \bar{a}_k\right) \tag{18}$$

Такая ситуация имеет место в математической модели автоколебаний в основной стойке шасси самолета в случае бесконечной жесткости на кручение без учета момента инерции ориентирующейся части стойки относительно оси стойки [13]. Полином $H(p)$ при этом будет иметь вид

$$H(p) = b_0p^3 + b_1p^2 + b_2p + b_3 \tag{19}$$

где

$$b_0 = a_0, b_1 = a_1 - 3\lambda a_0, b_2 = a_2 - 2\lambda a_1 + 3a_0\lambda^2, b_3 = a_3 - \lambda a_2 + a_1\lambda^2 - a_0\lambda^3 \tag{20}$$

Уравнения для определения λ_{opt} имеют вид

$$\underline{a}_3 - \overline{a_2}\lambda + \underline{a}_1\lambda^2 - \overline{a_0}\lambda^3 = 0 \tag{21}$$

$$\underline{a}_1\underline{a}_2 - \overline{a_0}\bar{a}_3 - 2\left(\bar{a}_l^2 + \overline{a_0 a_2}\right)\lambda + 8\underline{a}_0\underline{a}_1\lambda^2 - 8\bar{a}_0^2\lambda^3 = 0 \tag{22}$$

В безразмерных переменных a_i для системы из [13] могут изменяться в пределах $2 \le a_0 \le 3, 3 \le a_1 \le 10, 1 \le a_2 \le 3, 1 \le a_3 \le 2$. Тогда, если предположить, что минимальный из $\{\alpha_m\}$ определяется корнем первого уравнения, то, согласно (20), (21), $\lambda_{\text{opt}} = 1$. А граница, определяющая область робастного запаса устойчивости, задается уравнением

$$8\left(\bar{a}_0^2 - \underline{a}_0 a_1\right) + 2\left(\bar{a}_1^2 + \overline{a_0}a_2\right) + \overline{a_0 a_3} - a_1 a_2 = 0 \tag{23}$$

где в качестве параметров для выделения области робастной устойчивости выбраны a_1, a_2 , а остальные параметры остались интервальными. Уравнение границы (23) можно записать в виде

$$a_2 = \frac{8\left(\bar{a}_0^2 - \underline{a}_0 a_1\right) + 2\bar{a}_1^2 + \overline{a_0 a_3}}{a_1 - 2\overline{a_0}} \tag{24}$$

а если учесть ограничения на параметры, получим

$$a_2 = 2\frac{a_1^2 - 8a_1 + 39}{a_1 - 6} \tag{25}$$

В плоскости выбранных параметров a_1, a_2 график функции (25) будет иметь вид, приведенный на рисунке 2. Из (25) и рисунка 2 видно, что область робастного запаса устойчивости будет располагаться внутри приведенной кривой.

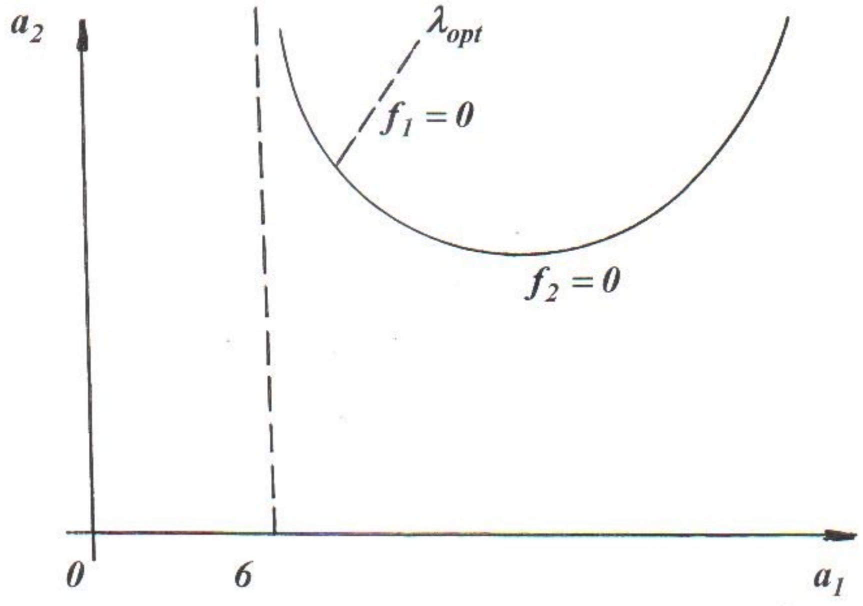

Рисунок 2 - Область робастного запаса устойчивости полинома третьей степени
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.22.2

Некоторые предложения по оцениванию максимального значения робастного запаса устойчивости для дискретных систем

Запас устойчивости дискретных динамических систем может быть охарактеризован параметром $0 \le r \le 1$ таким, что $\max_i |z_i| \le r$, где z_i – корни характеристического полинома (1). Поскольку устойчивость (1) имеет место при $r = 1$, задача обеспечения заданного запаса устойчивости (или определение минимально возможного $r = r_{\text{opt}}$) является более общей задачей по отношению к определению условий устойчивости характеристического полинома. Параметр r можно ввести формально в (1) за счет замены $z \to rz$. В этом случае при любом r корни полинома должны лежать в единичном круге, т.е. так, как это имеет место при исследовании устойчивости. При таком подходе

$$P_n(p) \to H_n(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^{n-k}, \quad \left(\underline{b}_k \le b_k \le \bar{b}_k\right) \tag{26}$$

где

$$b_k = a_k r^{n-k}, \quad \underline{b}_k = \underline{a}_k r^{n-k}, \quad \bar{b}_k = \bar{a}_k r^{n-k} \tag{27}$$

При использовании критерия Корсакова как для проверки устойчивости $H_n(p)$ относительно единичного круга при $r = const$, так и для нахождения возможного значения $r = r_{opt}$ такого, что при $r_{opt} \le r \le 1$ $H_n(p)$ устойчив, можно ограничиться анализом условий невыхода в пространстве r, a_k за границы области устойчивости. В этом случае расположение в сторону области устойчивости от границ N_+, N_-, N_ϕ соответствует выполнению неравенств $H_n(+1) > 0,\ (-1)^n H_n(-1) > 0$ и $\det(A_k - B_k) > 0$, где A_k, B_k – матрицы Корсакова полинома $H_n(p)$.

Проверка условия $H_n(+1) > 0$ на семействе очевидна, т.к для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\underline{H}_n(+1) > 0$, где

$$\underline{H}_n(+1) = \min_{a_k} H_n(+1) = \sum_{k=0}^{n} \underline{a}_k r^{n-k} \tag{28}$$

Для анализа условия $(-1)^n H_n(-1) > 0$ достаточно, чтобы имело место $\underline{(-1)^n H_n(-1)} > 0$, где

$$\underline{(-1)^n H_n(-1)} = \min_{a_k} (-1)^n H_n(-1) = \sum_{\substack{k \\ \text{четн}}} \underline{a}_k r^{n-k} - \sum_{\substack{k \\ \text{нечетн}}} \bar{a}_k r^{n-k} \tag{29}$$

Процедура определения $r = r_{opt}$ при попадании на границы N_+, N_- сводится к определению максимального корня $r < 1$, при котором обращается в ноль правая часть (28) или правая часть (29).

При рассмотрении выполнимости условия $\det(A_k - B_k) > 0$ с квадратными матрицами $(n-1)$ -го порядка вида

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 \end{pmatrix}, \quad B_{n-1} = \begin{pmatrix} b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ b_3 & b_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

после замены $b_k \rightarrow a_k r^{n-k}$ основная сложность состоит в нахождении выражения для $\min\limits_{a_k} \det(A_k - B_k)$. Так в случае $n = 3$

$$\det(A_2 - B_2) = a_0 r^3 \left(a_0 r^3 - a_2 r\right) + a_3 \left(a_1 r^2 - a_3\right) \tag{31}$$

а значит $\det(A_2 - B_2) \geq \underline{\det(A_2 - B_2)}$, где

$$\underline{\det(A_2 - B_2)} = \underline{a}_0^2 r^6 - \bar{a}_0 \bar{a}_2 r^4 + \underline{a}_1 \underline{a}_3 r^2 - \bar{a}_3^2 \tag{32}$$

и условие $\underline{\det(A_2 - B_2)} \geq 0$ является достаточным для выполнения $\det(A_2 - B_2) \geq 0$. А в случае $n = 4$

$$\begin{aligned} \det(A_3 - B_3) = \left(a_0 r^4 - a_4\right)^2 \left(a_0 r^4 - a_2 r^2 + a_4\right) - \left(a_1 r^3 - a_3 r\right)^2 a_0 r^4 + \\ + \left(a_0 r^4 - a_4\right) \left(a_1 r^3 - a_3 r\right) a_1 r^3, \end{aligned} \tag{33}$$

т.е. представляет собой уже полином от r^2 достаточно высокой степени, и получение оценки $\det(A_3 - B_3) \geq \underline{\det(A_3 - B_3)}$ уже является затруднительным, хотя и возможным

$$\begin{aligned} \underline{\det(A_3 - B_3)} = \underline{a}_0^3 r^{12} - \bar{a}_0^2 r^{10} + \left(\underline{a}_0 \underline{a}_1 \underline{a}_3 - \bar{a}_0^2 \bar{a}_4\right) r^8 + \left(2 \underline{a}_0 \underline{a}_2 \underline{a}_4 - \bar{a}_1^2 \bar{a}_4 - \right. \\ \left. - \bar{a}_0 \bar{a}_3^2\right) r^6 + \left(\underline{a}_1 \underline{a}_3 \underline{a}_4 - \bar{a}_0 \bar{a}_4^2\right) r^4 - \bar{a}_2 \bar{a}_4^2 r^2 + \underline{a}_4^3. \end{aligned} \tag{34}$$

И получение достаточных оценок тем сложнее, чем больше n .

Заключение

В работе приведены результаты разработки оригинальной методики определения значений параметров, при которых достигается максимальный запас устойчивости и, следовательно, минимальная длительность переходных процессов с непрерывных и дискретных системах, допускающих построение линеаризованных математических моделей, в условиях начальной неопределенности параметров. Показано, что при введении в характеристическое уравнение параметра, характеризующего запас устойчивости, исходные коэффициенты оказываются в линейных комбинациях в новых пересчитанных коэффициентах. В результате при решении вопроса о том, является ли запас устойчивости робастным, исследование с помощью реберной теоремы в любом случае превратилось бы из необходимого и достаточного в достаточное. Поэтому приобретает смысл использования более простых достаточных оценок для исследования робастной устойчивости. Такого типа оценки и получены в работе.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Ильюшин Ю.В. Исследование запаса устойчивости систем автоматического управления / Ю.В. Ильюшин, А.Л. Кравцова // Альманах современной науки и образования. — 2012. — 1(56). — с. 26-37.
2. Волков И.С. Оценка запасов устойчивости в системе регулирования давления пара судовой энергетической установки / И.С. Волков // Системы управления и обработки информации. — 2019. — 1(44). — с. 5-18.
3. Игнатьев А.А. Применение методов теории автоматического управления при анализе процессов в динамической системе шлифовального станка / А.А. Игнатьев, В.А. Добряков, С.А. Игнатьев [и др.] // Вестник Саратовского государственного технического университета. — 2020. — 2(85). — с. 31-37.
4. Плохов Е.М. Устойчивость колес против схода с рельсов и мероприятия по их предотвращению с использованием компьютерных технологий / Е.М. Плохов, С.В. Коркин, В.В. Корбан [и др.] // Вестник транспорта Поволжья. — 2015. — 6(54). — с. 50-52.
5. Сударчиков С.А. Оценка запасов устойчивости систем с интервальными параметрами / С.А. Сударчиков, А.В. Ушаков // Научно-технический вестник СПб ГИТМО (ТУ). — 2002. — Вып. 6. — с. 257-262.
6. Александров А.Г. Запасы устойчивости и робастная устойчивость / А.Г. Александров // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — 6. — с. 32-41.
7. Поляк Б.П. Робастная устойчивость и управление. / Б.П. Поляк, П.С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

8. Горюнов В.И. О приближенном исследовании расположения корней характеристического полинома / В.И. Горюнов // Известия вузов. Радиофизика. — 1969. — 7. — с. 1083-1086.
9. Горюнов В.И. О приближенных условиях принадлежности корней характеристического полинома внутренности единичного круга / В.И. Горюнов // Динамика систем. — Горький: Изд-во ГГУ, 1976. — Вып. 9. — с. 169-173.
10. Корсаков Г.Ф. О количестве корней полинома вне круга / Г.Ф. Корсаков // Математические заметки. — 1973. — Т. 13. — 1. — с. 3-12.
11. Фельдбаум А.А. Методы теории автоматического управления / А.А. Фельдбаум, А.Г. Бутковский. — М.: Наука, 1971. — 744 с.
12. Антоновская О.Г. К исследованию робастной устойчивости и апериодичности непрерывных и дискретных систем / О.Г. Антоновская, А.В. Бесклубная // Международный научно-исследовательский журнал. — 2022. — 3(117). — Ч. 1. — с. 7-12.
13. Метрикин В.С. К расчету колебаний основной опоры ЛА с учетом сил торможения / В.С. Метрикин, М.А. Пейсель // Известия вузов. Авиационная техника. — 2012. — 2. — с. 24-27.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Ilyushin Yu.V. Issledovanie zapasa ustoytchivosti system avtomatitcheskogo upravleniya [Stability Margin Study for Automatic Control Systems] / Yu.I. Ilyushin, A.L. Kravtsova // Al’manakh sovremennoy nauki [Almanac of Modern Science]. — 2012. — 1(56). — p. 26-37. [in Russian]
2. Volkov I.S. Otsenka zapasov ustoytchivosti v sisteme regulirovaniya davleniya para sudovoy energetitcheskoy ustanovki [Estimation of Stability Margin in Regulation System of Steam Pressure of Marine Power Plant] / I.S. Volkov // Sistemy upravleniya I obrabotki informatsii [Information Management and Processing Systems]. — 2019. — 1(44). — p. 5-18. [in Russian]
3. Ignatiev A.A. Primeneniye metodov teorii avtomatitcheskogo upravleniya pri analize protsessov v dinamitcheskoy sisteme shlifoval’nogo stanka [Application of Automatic Control Theory Methods in Proceed Analysis in the Dynamic Grinding Machine System] / A.A. Ignatiev, V.A. Dobryakov, S.A. Ignatiev [et al.] Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo technitcheskogo universiteta [Bulletin of the Saratov State Technical University]. — 2020. — 2(85). — p. 31-37. [in Russian]
4. Plohov E.M. Ustoytchivost’ koles protiv skhoda s rel’sov I meropriyatiya po ikh predotvrasheniyu s ispol’zovaniyem kompyuternykh technologiy [Wheel Stability against Derailment] / E.M. Plohov, S.V. Korkina, V.V. Korban [et al.] // Vestnik transporta Povolg’ya [Bulletin of Transport of the Volga Region]. — 2015. — 6(54). — p. 50-52. [in Russian]
5. Sudarchikov S.A. Otsenka zapasov ustoytchivosti system s interval’nymi parametrami [Estimation of Stability Margin Systems with Interval Parametres] / S.A. Sudarchikov, A.V. Ushakov // Nauchno-technicheskii vestnik ITMIO [Science and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics]. — 2002. — Iss. 6. — p. 257-262. [in Russian]
6. Aleksandrov A.G. Zapasy ustojchivosti i robastnaja ustojchivost' [Stability Margins and Robust Stability] / A.G. Aleksandrov // Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems]. — 2010. — 6. — p. 32-41. [in Russian]
7. Polyak B.T. Robastnaya ustoytchivost i upravleniye [Robust Stability and Control] / B.T. Polyak, P.S. Sherbakov. — M.: Nauka, 2002. — 303 p. [in Russian]
8. Goryunov V.I. O priblizhennom issledovanii raspolozheniya korney kharakteristicheskogo polinoma [On Approximate Study of Roots Disposition of Characteristic Polynomial] / V.I. Goryunov // Izvestiya vuzov. Radiofizika [Radio-Physics and Quantum Electronics]. — 1969. — 7. — p. 1083-1086. [in Russian]
9. Goryunov V.I. O priblizhennykh usloviyakh prinadlezhnosti korney kharakteristicheskogo polinoma vnutrennosti edinichnogo kruga [on approximate conditions of belonging of the roots of characteristic polynomial to the interior of unit circle] / V.I. Goryunov // Dinamika sistem [Systems Dynamics]. — Gorky: GSU Publishing House, 1976. — 9. — p. 169-173. [in Russian]
10. Korsakov G.F. O kolichestve kornej polinoma vne kruga [The Number of Roots of a Polynomial Outside a Circle] / G.F. Korsakov // Matematicheskie zametki [Mathematical Notes]. — 1973. — Vol. 13. — 1. — p. 3-12. [in Russian]
11. Feldbaum A.A. Metody teorii avtomatitcheskogo upravleniya [Automatic Control Theory Methods] / A.A. Feldbaum, A.G. Butkovsky. — M.: Nauka, 1971. — 744 p. [in Russian]
12. Antonovskaja O.G. K issledovaniju robastnoj ustojchivosti i aperiodichnosti nepreryvnyh i diskretnyh sistem [On the Study of Robust Stability and Aperiodicity of Continuous and Discrete Systems] / O.G. Antonovskaja, A.V. Besklubnaja // Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal [International Research Journal]. — 2022. — 3(117). — Pt. 1. — p. 7-12. [in Russian]
13. Metrikin V.S. K raschetu kolebanij osnovnoj opory LA s uchetom sil tormozhenija [Calculation of Flight Vehicle Main Support Wheel Vibrations Taking into Account Brake Forces] / V.S. Metrikin, M.A. Pejsel' // Izvestija vuzov. Aviacionnaja tehnika [Proceedings of Universities. Aeronautical Engineering]. — 2012. — 2. — p. 24-27. [in Russian]