ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА / DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.19

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ДВУМЕРНОЙ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Научная статья

Сучков М.В.[1], *, Трифоненков В.П.[2]

[1, 2] Национальный Исследовательский Ядерный Университет "МИФИ", Москва, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (mv_suchkov[at]mail.ru)

Аннотация

В статье рассматривается оператор Лапласа с разрывным коэффициентом (кусочно-постоянным) и задача Дирихле для замкнутой области. Разрыв коэффициента происходит на некоторой поверхности, расположенной внутри области. Как было показано ранее, если размерность области N достаточно большая, например N ⩾ 5, то наличие такого разрыва не гарантирует сходимости спектральных разложений даже в областях, «далеких» от точек разрыва коэффициента для сколь угодно гладких и финитных относительно рассматриваемой области функций. В настоящей работе показывается, что если размерность области N равна двум, то наличие такого разрыва не оказывает влияния на абсолютную сходимость спектральных разложений во всей замкнутой области, содержащей точки разрыва.

Ключевые слова: спектральное разложение, оператор Лапласа с разрывным коэффициентом, функция Грина.

ON THE ABSOLUTE CONVERGENCE OF SPECTRAL EXPANSIONS IN A TWO-DIMENSIONAL CLOSED REGION FOR THE LAPLACE OPERATOR WITH A DISCONTINUOUS COEFFICIENT AND THE DIRICHLET PROBLEM

Research article

Suchkov M.V.[1], *, Trifonenkov V.P.[2]

[1, 2] National Research Nuclear University "MEPhI", Moscow, Russian Federation

* Corresponding author (mv_suchkov[at]mail.ru)

Abstract

The article examines the Laplace operator with a discontinuous coefficient (piecewise constant) and the Dirichlet problem for a closed region. The discontinuity of the coefficient occurs on some surface located inside the region. As was shown earlier, if the dimensionality of the region N is large enough, for example, N ⩾ 5, then the presence of such a discontinuity does not guarantee the convergence of spectral decompositions even in regions "far" from the coefficient discontinuity points for functions arbitrarily smooth and finite with respect to the considered region. This work shows that if the dimensionality of the region N is equal to two, then the presence of such a discontinuity does not affect the absolute convergence of the spectral expansions in the whole closed region containing the discontinuity points.

Keywords: spectral expansion, Laplace operator with a discontinuous coefficient, Green's function.

Введение

Эта работа является продолжением статьи [2]. В ней рассматривалась следующая задача на собственные функции. Пусть двумерная область *g* с границей Г разбивается некоторой лежащей внутри нее замкнутой поверхностью *C* на две подобласти g_1, лежащую внутри *C*, и g_2. Рассмотрим в (*g*+Г) задачу Дирихле.

$$
\begin{gathered}
k_1 \Delta u + \lambda u = 0; x \in g_1 \\
k_2 \Delta u + \lambda u = 0; x \in g_2 \\
u|_{C-0} = u|_{C+0}\,; \; k_1 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{C-0} = k_2 \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{C+0}\,; \; u|_{\Gamma} = 0
\end{gathered}
\tag{1}
$$

k_1, k2 – положительные постоянные. Символы *C-0* и *C+0* означают предельные значения, соответственно, с внутренней и внешней стороны поверхности *C* по отношению к области $g_1; C, \Gamma \in C^{2,\alpha}(\alpha > 0)$. ·

Определение

Классической собственной функцией задачи (1) называется функция *u(x)* такая, что:

1) $u(x) \neq 0$;
2) $u(x) \in C^1\,(g_1 + C) \wedge C^2\,(g_1)$;
3) $u(x) \in C^1\,(g_2 + C + \Gamma) \wedge C^2\,(g_2)$;
4) $u(x) \in C(g + \Gamma)$;
5) $u(x)$ при некотором λ удовлетворяет всем условиям задачи (1).

Из работы [3] известно, что задача (1) имеет дискретный спектр, состоящий из положительных собственных значений λ_n (с единственной бесконечно удаленной предельной точкой), которым соответствует полная ортонормированная система в $L_2(g)$ собственных функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Причём эта система совпадает с системой обобщенных собственных функций задачи (1) (удовлетворяющих некоторому интегральному тождеству).

В статье [2] была доказана теорема.

Теорема. Пусть $f(x) \in W_2^{1+\varepsilon}(g); \varepsilon > 0; f|_{\Gamma} = 0$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1) сходится к $f(x)$ равномерно в замкнутой области $\bar{g}$.

В этой работе мы покажем, что эта сходимость будет не только равномерной, но и абсолютной.

Основная часть

Для доказательства этого мы воспользуемся видом и свойствами функции Грина $G(x,y)$ задачи (1), построенной в работах [3], [4] и некоторыми результатами, полученными в статьях [1], [2]. В работе [2] было показано, что для любой функции $f(x) \in W_2^{1+\varepsilon}(g); f|_{\Gamma} = 0$; будет по крайней мере сходиться ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1+\varepsilon/2-\varepsilon^2} f_n^2 \quad (2)$$

$\varepsilon > 0; f_n = (f, u_n)$ – коэффициент Фурье функции $f(x)$ по системе собственных функции $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1). Кроме того, так же как это делалось в статьях [1], [2] с помощью теоремы Лионса об интерполяции пространств и интерполяционных свойств пространств Соболева показывается, что для любой функции $f(x) \in \dot{W}_2^{\alpha}(g); 1/2 < \alpha < 1$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha} f_n^2 \le C\|f\|_{\dot{W}_2^{\alpha}(g)}; C > 0 \quad (3)$$

Теорема Лионса (об интерполяции).

Пусть X, Y два гильбертовых пространства $X \subset Y$, X плотно в Y и непрерывно в него вложено. Пусть $\{X, Y\}$ - другая пара гильбертовых пространств с аналогичными свойствами. Если оператор $\pi \in \mathrm{L}(X, \mathrm{X}) \wedge \mathrm{L}(Y, \mathrm{Y})$, то $\pi \in \mathrm{L}([X,Y]_{\theta}, [\mathrm{X},\mathrm{Y}]_{\theta})$ для $0 < \theta < 1$.

(В нашем случае π - оператор вложения)

$[X,Y]_{\theta} = \mathrm{D}\left(\Lambda^{1-\theta}\right), 0 < \theta < 1$

$[X,Y]_0 = X, [X,Y]_1 = Y$, где

Λ - произвольный линейный самосопряжённый положительный оператор, действующий в пространстве Y, с областью определения X.

(Одна пара интерполяционных пространств $L_2(g)$ и $\dot{W}_2^1(g)$, а вторая H_0 и H_1, где $H_0 = L_2(g)$, а H_1 множество функций $f(x) \in L_2(g)$ и таких, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n^2$ сходится. Тогда из оценки $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n^2 \le C\|f\|^2_{\dot{W}_2^1(g)}$ – эта оценка хорошо известна для обобщенных собственных функций задачи (1), с которыми совпадает наша система $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, вытекает неравенство (3)). Итак, докажем следующую теорему:

Теорема. Пусть $f(x) \in W_2^{1+\varepsilon}(g); \varepsilon > 0; f|_{\Gamma} = 0$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1) сходится к $f(x)$ абсолютно в замкнутой области $\bar{g}$.

Доказательство.

Используя неравенство Гёльдера, получим:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n u_n(y)|\right)^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n^{1+\delta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2(y)}{\lambda_n^{1+\delta}}; \quad y \in \bar{g} \quad (4)$$

Здесь $\delta = \varepsilon/2 - \varepsilon^2$. Достаточно доказать теорему для $0 < \varepsilon < 1/2$. Тогда $0 < \delta < 1/16$. Первый ряд в (4) сходится в силу оценки (2). Рассмотрим второй ряд. Из работ [3], [4], где строится функция Грина $G(x,y)$ задачи (1) следует, что $u_n(y) = \lambda_n \int_g G(y,x) u_n(x) dx.$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2(y)}{\lambda_n^{1+\delta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-\delta} \left(\int_g G(y,x) u_n(x) dx\right)^2 \le C_1 \|G(y,x)\|^2_{\dot{W}_2^{1-\delta}(g)}.$$

Последнее неравенство вытекает из оценки (3), если доказано, что функция Грина $G(x,y)$ задачи (1) при фиксированном $y \in \bar{g}$ как функция переменной x принадлежит классу $\dot{W}_2^{1-\delta}(g)$ для рассматриваемого δ. Поэтому для доказательства теоремы осталось доказать это утверждение. Для этого мы воспользуемся видом и свойствами симметричной функции Грина $G(x,y)$, построенной в работах [3], [4].

$G(x,y) = A_1(x,y) + A_2(x,y) + w(x,y)$,

где $A_1(x,y)$ – функция Грина задачи Дирихле в области g_1 для оператора $k_1 \Delta u$, продолженная нулём на всю область g (то есть: если хотя бы одна точка x или y не принадлежит g_1, то $A_1(x,y) = 0$). $A_2(x,y)$ – функция Грина задачи Дирихле в области g_2 для оператора $k_2 \Delta u$, продолженная нулём на всю область g. Если $y \notin C$, то

$$k_1 \Delta w(x,y) = 0 \quad x \in g_1 \quad w|_{\Gamma} = 0$$
$$k_2 \Delta w(x,y) = 0 \quad x \in g_2 \quad [w]|_C = w|_{C-0} - w|_{C+0} = 0$$
$$k_1 \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{C-0} - k_2 \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{C+0} = \theta(x,y)$$

$\theta(x,y) = -k_1\frac{\partial A_1(x,y)}{\partial n}$; производные по $x;\ y \in g_1$

$\theta(x,y) = k_2\frac{\partial A_2(x,y)}{\partial n}$; производные по $x;\ y \in g_2$

Тогда, если $y \notin C$, то $w(x,y)$ можно представить в виде:

$$w(x,y) = \int_C A_0(x,t)\mu(t,y)dt \quad (5)$$

где $A_0(x,y) = \begin{cases} \bar{A}_2(x,y); x \in g_2 \cup C \cup \Gamma \\ \bar{A}_1(x,y); x \in g_1 \end{cases} \quad y \in C$

$\bar{A}_2(x,y)$ – функция Грина задачи Дирихле в области g для оператора $k_2\Delta u$

$\bar{A}_1(x,y)$ есть решение задачи (6) при фиксированном $y \neq x$

$$\begin{cases} k_1\Delta\bar{A}_1(x,y) = 0 \quad x \in g_1 \\ \bar{A}_1(x,y)\big|_{y\in C} = \bar{A}_2(x,y)\big|_{y\in C} \end{cases} \quad (6)$$

В работе [4] доказано существование классического решения данной задачи и показано, что ядро $A_0(x,y)$ непрерывно при $x \neq y$ и справедлива оценка

$$|A_0(x,y)| \leq C_1 + C_2\left|\ln\frac{1}{|x-y|}\right|; \quad C_1, C_2 > 0 \quad (7)$$

Функция $\mu(x,y)$ в (4) $(x \in C)$ имеет вид

$$\mu(x,y) = \Phi(x)\mu_1(x,y) \quad (8)$$

где $\Phi(x) \in C^\lambda(C); \lambda > 0$, а $\mu_1(x,y)$ есть решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\mu_1(x,y) = \int_C F(x,t)\mu_1(t,y)dt + \theta(x,y) \quad (9)$$

где $|F(x,t)| \leq \frac{C_3}{|x-t|^{1-\delta}}; \delta > 0; x,t \in C$.

Для интегрального уравнения (9) справедлива альтернатива Фредгольма, и его решение записывается в виде:

$$\mu_1(x,y) = \int_C \Gamma(x,t)\theta(t,y)dt + \theta(x,y) \quad (10)$$

где $|\Gamma(x,t)| \leq \frac{\widetilde{C}}{|x-t|^{1-\sigma}}; \sigma > 0; x,t \in C$.

После подстановки (10) → (8) → (5) получим:

$w(x,y) = \int_C M(x,t)\theta(t,y)dt + \theta(x,y)$, где

$M(x,t) = A_0(x,t)\Phi(t) + \int_C \Phi(s)A_0(x,s)\Gamma(s,t)ds\Phi(t) \in C^\lambda(C); \lambda > 0$

Теперь можно доопределить по непрерывности $w(x,y)$ и для $y \in C(x \neq y)$, , полагая $w(x,y)|_{y\in C} = M(x,y)|_{y\in C}$ и $|w(x,y)| \leq A_1 + A_2\left|\ln\frac{1}{|x-y|}\right|;\quad A_1, A_2 > 0$. Приведённые выше факты о функции $G(x,y)$ изложены в работах [3], [4].

Докажем, что для фиксированного $y \in \bar{g}$ функция $G(x,y)$ как функция переменной x принадлежит классу $\dot{\omega}_2^{1-\delta}(0 < \delta < 1/2)$. Пусть сначала $y \in C$.

Тогда в силу свойств функции $\bar{A}_2(x,y)$ имеем:

$A_1(x,y) = A_2(x,y) = 0; G(x,y) = w(x,y) = M(x,y);\ M(x,y)|_{x\in\Gamma} = 0$. Докажем, что $A_0(x,y) \in W_2^{1-\delta}(g)$. В силу непрерывности $A_0(x,y)$ при $x \neq y$ и аддитивности классов $W_2^{1-\delta}(g_i)$ (см. [7]), достаточно доказать, что $A_0(x,y) \in W_2^{1-\delta}(g_i); i = 1,2$. Если $x \in g_2$, , то $A_0(x,y) = \bar{A}_2(x,y) \in W_2^{1-\delta}(g_2)$, что следует из хорошо известных оценок производных функции Грина для самосопряженных эллиптических операторов без всяких разрывов коэффициентов. Если $x \in g_1$, то $A_0(x,y) = \bar{A}_1(x,y)$, где $\bar{A}_1(x,y)$ есть решение задачи (5). В работе [4] доказано, что $\bar{A}_1(x,y)$ можно представить в виде

$$\bar{A}_1(x,y) = \tilde{A}_1(x,y)A(x,y) + B(x,y) \quad (12)$$

где $\tilde{A}_1(x,y)$ – некоторое фундаментальное решение оператора Лапласа. $A(x,y)$ есть решение задачи:

$$\begin{cases} k_1\Delta A(x,y) = 0 \quad x \in g_1 \\ A(x,y)|_{x\in C} = \frac{\bar{A}_2(x,y)}{\tilde{A}_1(x,y)}\Big|_{x\in C} \end{cases}$$

Причём для $A(x,y)$ справедливы оценки:

$$|A(x,y)| \leq C_1; x \in g_1 \cup C; \left|\frac{\partial A(x,y)}{\partial x_i}\right| \leq \frac{C_2}{|x-y|} \quad (13)$$

$i = 1,2;\quad C_1, C_2 > 0$.

(Более точно: $A(x,y)$ как функция x равномерно относительно $y \in C$ принадлежит некоторому классу Гёльдера в $g_1 \cup C$). Для $B(x,y)$ справедлива оценка: существует такое $\eta > 0$, что

$$\left|\frac{\partial B(x,y)}{\partial x_i}\right| \leq \frac{C_3}{|x-y|^{1-\eta}}; \quad i = 1,2; \quad C_3 > 0 \tag{14}$$

для $\widetilde{A}_1(x,y)$ известны оценки

$$\left|\frac{\partial \tilde{A}_1(x,y)}{\partial x_i}\right| \leq \frac{C_4}{|x-y|}; \left|\tilde{A}_1(x,y)\right| \leq C_5 + C_6 \left|\ln \frac{1}{|x-y|}\right| \tag{15}$$

$i = 1,2; \quad C_4, C_5, C_6 > 0$.

Это оценки фундаментальных решений эллиптических операторов с гладкими коэффициентами. Тогда из (12)-(15) будет следовать, что $\bar{A}_1(x,y) \in W^1_{2-\alpha}(g_1)$ для любого достаточно малого $\alpha > 0$.

Тогда из теоремы вложения вытекает требуемое включение $\bar{A}_1(x,y) \in W_2^{1-\delta}(g_1)$ для любого достаточно малого $\delta > 0$.

Для доказательства сделанного предположения о функции Грина $G(x,y)$ при $y \in C$ осталось рассмотреть второе слагаемое в (11). Функция $\widetilde{F}(x) = \int_C \Phi(s) A_0(x,s) \Gamma(s,y) ds$ как функция переменной x при фиксированном $y \in C$ непрерывна в $\bar{g}$ в силу оценок (7)-(10). Поэтому для того, чтобы доказать, что $\widetilde{F}(x) \in W_2^{1-\delta}(g)$ достаточно доказать, что $\tilde{F}(x) \in W_2^{1-\delta}(g_i); i = 1,2$ (аддитивность классов $W_2^{1-\delta}$ [7]). В свою очередь, пользуясь теоремой вложения, для этого достаточно доказать включение: $\widetilde{F}(x) \in W^1_{2-\alpha}(g_i)$ для любого достаточно малого $\alpha > 0$. Из оценок (12)-(15) и определения функции $A_0(x,y)$ получим, что

$$\left|\frac{\partial A_0(x,y)}{\partial x_k}\right| \leq \frac{T_1}{|x-y|^{1+\gamma}} \tag{16}$$

для любого положительного γ . Константа T_1 , вообще говоря, зависит от γ . Применяя известную теорему о композиции полярных ядер и оценки (9), (16), имеем:

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_k}\right| = \left|\int_C \Phi(s) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} A_0(x,s)\right) \Gamma(s,y) ds\right| \leq \frac{T_2}{\rho_{xC}^{2\gamma}} \int_C \frac{1}{|x-s|^{1-\gamma}} \frac{1}{|s-y|^{1-\sigma}} ds \leq \\ \leq T_3 \frac{1}{\rho_{xC}^{2\gamma}} \frac{1}{|x-y|^{1-\sigma-\gamma}}\end{gathered} \tag{17}$$

T_3 – положительная константа, зависящая от γ ,

ρ_{xc} – расстояние от точки x до поверхности C ,

$x \in g_i; i = 1,2$.

Фиксируем любое положительное $\alpha : 0 < \alpha < 1$. (Оно определяется из теоремы вложения по числу δ). Положим $\gamma = \alpha/4(2-\alpha)$. Тогда

$$\begin{gathered}\int_{\mathrm{g}} \left|\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_k}\right|^{2-\alpha} dx \leq T_3 \int_{\mathrm{g}_j} \frac{1}{\rho_{xC}^{2\gamma(2-\alpha)}} \frac{1}{|x-y|^{(1-\sigma-\gamma)(2-\alpha)}} dx = \\ = T_3 \int_{g_j} \frac{1}{\rho_{xC}^{\alpha/2}} \frac{1}{|x-y|^{(1-\sigma)(2-\alpha)-\alpha/4}} dx\end{gathered} \tag{18}$$

Конечность последнего интеграла в (18) следует из неравенства Гёльдера, где первый подынтегральный сомножитель берётся с показателем $p = \frac{8}{5\alpha}$, и известного соотношения $\int_g \frac{dx}{\rho_{xC}^r} < \infty$ для $0 < r < 1$, доказанного, например, в [6].

Предположение в случае $y \in C$ доказано. Пусть теперь $y \in g_i; i = 1,2$ (если $y \in \Gamma$, то $G(x,y) = 0; x \in g$).

Поэтому

$$G(x,y) = A_1(x,y) + A_2(x,y) + w(x,y) \tag{19}$$

где

$$w(x,y) = \int_C M(x,t) \theta(t,y) dt \tag{20}$$

$A_i(x,y) \in W_2^{1-\delta}(g); i = 1,2$ в силу известных оценок функции Грина эллиптического оператора с гладкими коэффициентами.

$w(x,y)$ также принадлежит классу $W_2^{1-\delta}(g)$, так как при $y \notin C$ $\theta(t,y)$ в (20) есть непрерывная функция аргумента t, а для $M(x,t); t \in C$ уже установлены выше оценки (16)-(18), показывающие требуемое включение для любого достаточно малого положительного δ.

Замечание. Число ε в теореме отбросить нельзя. Отсутствие разрывов ($k_1 = k_2$) показывает, что для функций из класса $\dot{W}_2^1(g)$ нельзя гарантировать абсолютной сходимости рассматриваемых спектральных разложений [5].

Заключение

В этой работе показано, что для оператора Лапласа с разрывным коэффициентом и задачи Дирихле в двумерной замкнутой области для достаточно гладких функций сходимость их спектральных разложений будет не только равномерной, но и абсолютной. Т.е. наличие разрыва у коэффициента не оказывает влияния на абсолютную сходимость спектральных разложений в замкнутой области, содержащей точки разрыва.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Сучков М.В. О принципе локализации для оператора Лапласа с разрывным коэффициентом в областях, не содержащих точек разрыва / М.В. Сучков, В.П. Трифоненков // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. — 2017. — 1. — с. 8–17.
2. Сучков М.В. О сходимости спектральных разложений для оператора Лапласа с разрывным коэффициентом в замкнутой области, содержащей точки разрыва / М.В. Сучков, В.П. Трифоненков // East European Scientific Journal. — 2021. — Т. 1. — 3(67). — с. 48-53.
3. Ильин В.А. О системе классических собственных функций линейного самосопряженного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами / В.А. Ильин // ДАН СССР. — 1961. — Т. 137. — 2. — с. 272-275.
4. Ильин В.А. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами / В.А. Ильин // ДАН СССР. — 1961. — Т. 137. — 1. — с. 28-30.
5. Ильин В.А. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа / В.А. Ильин // УМН. — 1958. — Т. 13. — Вып. 1(79). — с. 87-180.
6. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес — М.: Мир. 1971.
7. Буренков В.И. Об аддитивности классов $W^2_p(\Omega)$ / В.И Буренков // Труды МИАН. — Т. 89. — 1. — 1967 — с. 31-55.
8. Ильин В.А. Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа / В.А. Ильин // У.М.Н. — 1968. — Т. 23. — 2. — с. 61-120.
9. Сучков М.В. О некоторых свойствах спектральных разложений, отвечающих самосопряженному эллиптическому оператору второго порядка с разрывными коэффициентами / М.В. Сучков // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251. — 6. — с. 1314-1316.
10. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. / Х. Трибель — М.: Мир. 1980.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Suchkov M.V. O principe lokalizacii dlja operatora Laplasa s razryvnym kojefficientom v oblastjah, ne soderzhashhih tochek razryva [On the Localization Principle for a Laplace Operator with a Discontinuous Coefficient in Regions Containing No Discontinuity Points] / M.V. Suchkov, V.P. Trifonenkov // Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Serija: Fizika-matematika [Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics]. — 2017. — 1. — P. 8–17. [in Russian]
2. Suchkov M.V. O shodimosti spektral'nyh razlozhenij dlja operatora Laplasa s razryvnym kojefficientom v zamknutoj oblasti, soderzhashhej tochki razryva [On the Convergence of Spectral Decompositions for a Laplace Operator with a Discontinuous Coefficient in a Closed Region Containing Discontinuity Points] / M.V. Suchkov, V.P. Trifonenkov // East European Scientific Journal. — 2021. — Vol. 1. — 3(67). — p. 48-53. [in Russian]
3. Il'in V.A. O sisteme klassicheskih sobstvennyh funkcij linejnogo samosoprjazhennogo jellipticheskogo operatora s razryvnymi kojefficientami [On the System of Classical Eigenfunctions of a Linear Self-Conjugate Elliptic Operator with Discontinuous Coefficients] / V.A. Il'in // DAS SSSR. — 1961. — Vol. 137. — 2. — p. 272-275. [in Russian]
4. Il'in V.A. O razreshimosti zadach Dirihle i Nejmana dlja linejnogo jellipticheskogo operatora s razryvnymi kojefficientami [On the Solvability of Dirichlet and Neumann Problems for a Linear Elliptic Operator with Discontinuous Coefficients] / V.A. Il'in // DAS SSSR. — 1961. — Vol. 137. — 1. — p. 28-30. [in Russian]
5. Il'in V.A. O shodimosti razlozhenij po sobstvennym funkcijam operatora Laplasa [On the Convergence of Laplace Operator Eigenfunctions Decomposition] / V.A. Il'in // UMN. — 1958. — Vol. 13. — Iss. 1(79). — p. 87-180. [in Russian]

6. Lions Zh.-L. Neodnorodnye granichnye zadachi i ih prilozhenija [Inhomogeneous Boundary Problems and Their Applications] / Zh.-L. Lions, Je. Madzhenes — M.: Mir. 1971. [in Russian]

7. Burenkov V.I. Ob additivnosti klassov $W^2_p(\Omega)$ [On the Additivity of Classes $W^2_p(\Omega)$] / V.I Burenkov // Trudy MIAN [Works of MIAN]. — Vol. 89. — 1. — 1967 — p. 31-55. [in Russian]

8. Il'in V.A. Problemy lokalizacii i shodimosti dlja rjadov Fur'e po fundamental'nym sistemam funkcij operatora Laplasa [Localization and Convergence Problems for Fourier Series on Fundamental Systems of Laplace Operator Functions] / V.A. Il'in // U.M.N. — 1968. — Vol. 23. — 2. — p. 61-120. [in Russian]

9. Suchkov M.V. O nekotoryh svojstvah spektral'nyh razlozhenij, otvechajushhih samosoprjazhennomu jellipticheskomu operatoru vtorogo porjadka s razryvnymi kojefficientami [On Some Properties of Spectral Decompositions Respecting a Second Order Self-Conjugate Elliptic Operator with Discontinuous Coefficients] / M.V. Suchkov // DAS SSSR. — 1980. — Vol 251. — 6. — p. 1314-1316. [in Russian]

10. Tribel' H. Teorija interpoljacii. Funkcional'nye prostranstva. Differencial'nye operatory [Interpolation Theory. Functional Spaces. Differential Operators]. / H. Tribel' — M.: Mir. 1980. [in Russian]