

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7>**ЭФФЕКТИВНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИШЕРА – КОЛМОГОРОВА-  
ПЕТРОВСКОГО-ПИСКУНОВА**

Научная статья

**Ильина К.П.<sup>1,\*</sup>**<sup>1</sup> ORCID : 0000-0002-8718-8653;<sup>1</sup> Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск, Российская Федерация

\* Корреспондирующий автор (ilina\_kunnei[at]mail.ru)

**Аннотация**

Начально-краевая задача для квазилинейного уравнения реакции-диффузии Колмогорова-Петровского-Пискунова – Фишера служит математической моделью различных процессов и находит широкое применение в различных областях науки и техники. Удивительным свойством данного уравнения является существование разрывных решений, пропорциональных корню квадратному от произведения коэффициента диффузии на коэффициент при линейном источнике. В работе для численного решения начально-краевой задачи для одномерного квазилинейного уравнения Ф–КПП с граничными условиями Дирихле построена эффективная явно-неявная разностная схема. Приведены результаты численной реализации предложенной разностной схемы на модельной задаче с точным решением при разных значениях коэффициента диффузии и на разных пространственно-временных сетках. Они показали высокую ее эффективность, высокую точность определения решения и скорости «бегущей волны».

**Ключевые слова:** модель реакции-диффузии, метод конечных разностей, явно-неявная разностная схема, вычислительный эксперимент.

**AN EFFECTIVE NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE FISCHER – KOLMOGOROV-PETROVSKY-  
PISKUNOV PROBLEM**

Research article

**Ilina K.P.<sup>1,\*</sup>**<sup>1</sup> ORCID : 0000-0002-8718-8653;<sup>1</sup> M.K. Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russian Federation

\* Corresponding author (ilina\_kunnei[at]mail.ru)

**Abstract**

The initial boundary value problem for the quasilinear Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov-Fisher reaction-diffusion equation serves as a mathematical model of various processes and is widely used in various fields of science and technology. A surprising property of this equation is the existence of discontinuous solutions, which are proportional to the square root of the product of the diffusion coefficient by the coefficient at a linear source. In this work, a numerical solution of the initial boundary value problem for the one-dimensional quasilinear F-CPP equation with Dirichlet boundary condition has been obtained using an effective explicit difference scheme. The results of numerical realization of the proposed difference scheme on the model problem with exact solution at different values of the diffusion coefficient and on different spatial-temporal meshes are presented. They showed its high efficiency, high accuracy in determining the solution and the velocity of the "running wave".

**Keywords:** reaction-diffusion model, finite difference method, explicit implicit difference scheme, computational experiment.

**Введение**

Уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова (Ф–КПП) служит одной из классических моделей в математической биологии, экологии, горении, физике и химии. В 1937 г. А.Н. Колмогоров и его соавторы доказали существование и единственность решения начально-краевой задачи для квазилинейного параболического уравнения реакции-диффузии [1, С. 1-16]. В ней авторы указали на применение данной задачи к математическому моделированию биологических процессов. Американский ученый Фишер в том же 1937 году опубликовал статью [2, С. 353-369], в которой вывел дифференциальное уравнение описывающее спонтанный рост и распространение доминантного гена. В работах зарубежных ученых данное уравнение известно как уравнение Фишера. В 40-х годах Я.Б. Зельдович данную задачу использовал в качестве математической модели скорости распространения пламени по смеси (горение), реагирующей при начальной температуре, а также исследовал влияние начального условия на спонтанное распространение химической реакции (взрыв) [3, С. 693-697], [4]. J-Guy Caputo, V.Sarels в статье [5] провели численный анализ взаимодействия фронта реакции-диффузии Зельдовича. L.K.Forbes в работе [6, С. 1-13] рассмотрел установившуюся модель реакции-диффузии для системы горения, в которой существуют конкурирующие пути эндотермической и экзотермической реакций. Некоторыми авторами были изучены содержательные обобщения этого уравнения. В статье Борисова А.В., Резаева Р.О. и др. [7, С. 24-28] было исследовано влияние нелокальных эффектов на динамику популяции микроорганизмов в рамках диффузионной модели с квадратично-нелинейным нелокальным взаимодействием, обобщающей известную модель Ф–КПП. В работе [8, С. 1256-1262] авторы

представили численный метод аппроксимации численных решений нелинейного уравнения реакции-диффузии Фишера методом конечных разностей. Профессором Матусом П. были получены результаты по оценке устойчивости решений разностных схем для квазилинейного параболического уравнения и нелинейного уравнения переноса [9, С. 313-329]. В следующей работе Матуса П. [10, С. 391–398] построены и исследованы на устойчивость монотонные разностные схемы для уравнения Ф-КПП. Существует множество моделей динамики популяций, порождающих биологические волны. Мюррей и его соавторы выпустили книгу в двух томах «Математическая биология», посвященную биологическим волнам [11], [12]. В монографии N.Васага [13] описаны труды Фишера и Колмогорова. В них выведена формула для нахождения скорости распространения бегущей волны для уравнения Ф-КПП:

$$v = 2\sqrt{Da} \quad .$$

В данной работе проводятся результаты вычислительного эксперимента о скорости распространения фронта волны для одномерного уравнения Ф-КПП. Для ее численного решения предложена разностная схема с явной аппроксимацией диффузионного члена. Обсуждаются результаты вычислительного эксперимента по определению фронта «бегущей волны» для одномерного квазилинейного уравнения реакции-диффузии. Во введении приведен обзор литературы, посвященной численной реализации модели Ф-КПП. Во втором разделе представлена постановка задачи. В третьем разделе предложен численный метод решения поставленной задачи, заключающийся в явной аппроксимации диффузионного члена. В четвертом разделе обсуждаются результаты вычислительного эксперимента при различных значениях входных параметров модели. Кроме того, был проведен вычислительный эксперимент по нахождению скорости фронта бегущей волны.

### Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерного квазилинейного уравнения Ф-КПП:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + au - bu^2, \quad x \in (-l/2, l/2), \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

где  $t$  – время,  $x$  – пространственные координаты,  $D$  – коэффициент диффузии,  $a = a(x, t)$  – коэффициент прироста бактерий,  $b(x, t)$  – коэффициент конкурентных потерь, называемый функцией влияния,  $u(x, t)$  – искомая кинетическая переменная.

Задаем однородные граничные условия Дирихле:

$$u(-l, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (2)$$

Задается начальное условие:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

Для установления точности разностной схемы проведем сравнение с точным решением при  $b = a$  :

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + e^{\sqrt{a/6x - 5at/6}})^2} \quad (4)$$

### Разностная схема

Поставленную задачу решаем с помощью метода конечных разностей. В области определения  $\bar{\Omega}_T$  поставленной задачи (1)-(3) введем прямоугольную пространственно-временную сетку с постоянными шагами  $h$  и  $\tau$  :

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad (5)$$

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih - l/2, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad h = l/N\}, \quad (6)$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, M; \quad \tau = T/M\}. \quad (7)$$

На построенной прямоугольной пространственно-временной сетке задаче (1) - (3) поставим в соответствие следующую явно-неявную разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} = D_i \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} + 0.5a_i(u_i^j + u_i^{j-1}) - b_i u_i^j u_i^{j-1}, \\ \quad \quad \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 1, 2, \dots, M, \\ u_0^j = u_N^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (8)$$

Отметим, что разностная схема (8) построена таким образом, что диффузионный член аппроксимирован явно, остальные слагаемые аппроксимированы со вторым порядком по времени. Учитывая малость коэффициента диффузии для практических задач можем расчеты проводить с достаточно большим временным шагом.

Решение разностной схемы (8) при  $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$  сходится к решению дифференциальной задачи (1) - (3) при выполнении условия устойчивости со скоростью порядка  $O(\tau + h^2)$ .

Для нахождения скорости движущегося фронта используем формулу взятую из монографии [13]:

$$v = 2\sqrt{Da}. \quad (9)$$

### Вычислительный эксперимент

В этом разделе мы проводим численный эксперимент модельной задачи с помощью явно-неявной разностной схемы. При заданном значении финального времени  $T$  пространственная шкала  $l$  регулируется таким образом, чтобы бегущие волны не достигают границ области определения задачи. Численная реализация разностной схемы (8) проведена на языке Python.

Вычислительный расчет одномерного уравнения Ф-КПП проводились при следующих значениях исходных данных и параметров сетки  $D=1, T=6, l=60, a=1, b=1, N=200, J=500$ . На рис. 1 представлены графики результатов точного и численного решения в разные моменты времени:

$t_1 = T/5$  (линия 1),  $t_2 = 2T/5$  (линия 2),  $t_3 = 3T/5$  (линия 3),  $t_4 = 4T/5$  (линия 4),  $t_5 = T$  (линия 5). На данном рисунке начальное условие представлено голубым цветом, а точное решение отмечено черным контуром. Результаты вычислений представлены графически таким образом, чтобы численный результат можно было сравнить с точным решением. Полученные результаты соответствуют с точным решением, а постоянная скорость движения "бегущей волны" определяется с высокой точностью.

На рис. 2 представлены графики абсолютной ошибки в разные моменты времени:  $t_1 = T/5$  (линия 1),  $t_2 = 2T/5$  (линия 2),  $t_3 = 3T/5$  (линия 3),  $t_4 = 4T/5$  (линия 4),  $t_5 = T$  (линия 5). Из представленных графиков ошибка между решениями достаточно маленькое. С ростом времени ошибка несущественно растет. На выбранных значениях исходных данных возможно применить данную задачу на грубой сетке с хорошей точностью.

На рис. 3 представлена скорость распространения бегущей волны. Как видно из графика в малое время (в начальном моменте времени) имеется маленькая погрешность, а далее скорость фронта движется линейно с постоянной скоростью. Прогнозируемая скорость волны  $v = 2\sqrt{Da} \approx 2$ .

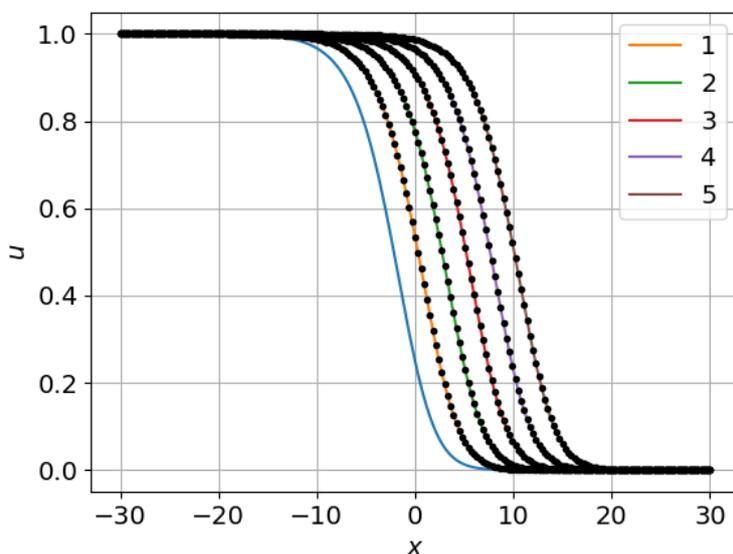


Рисунок 1 - Численное и точное решение в разные моменты времени при  $D=1$   
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7.1>

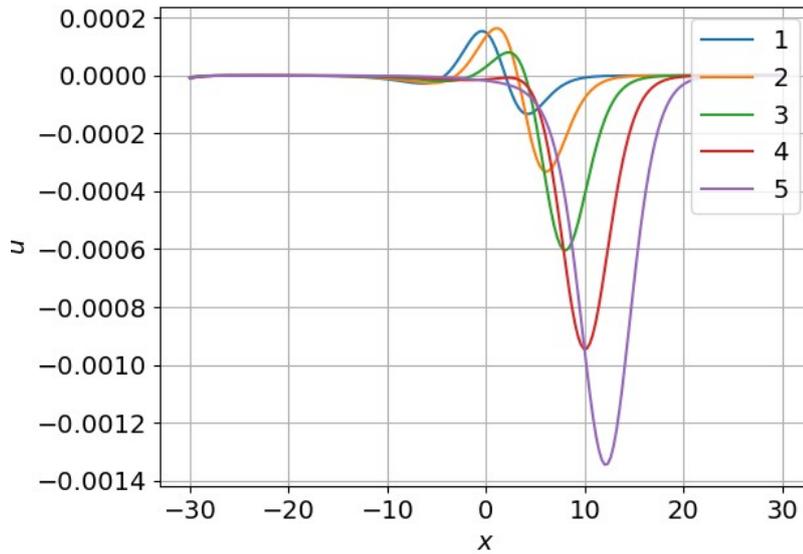


Рисунок 2 - Разница численных решений при  $D=1$   
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7.2>

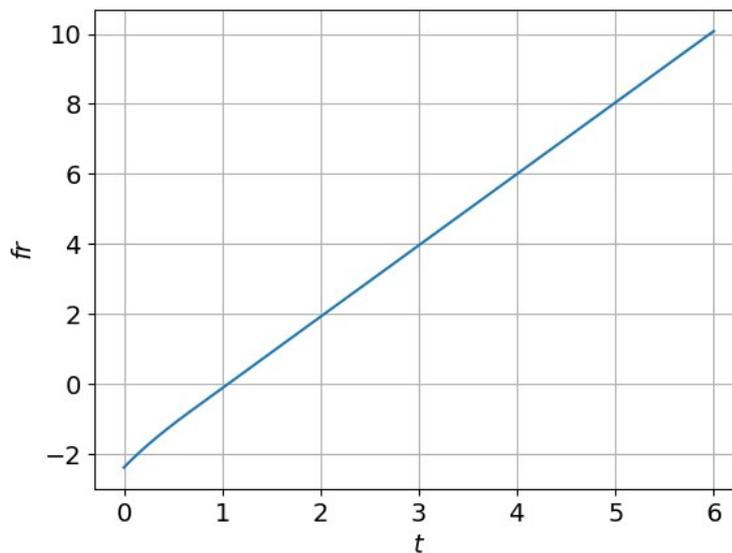


Рисунок 3 - Динамика распространения бегущей волны при  $D=1$   
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7.3>

Для следующего вычислительного эксперимента взяли следующие входные данные  $D=0.09$ ,  $T=3$ ,  $l=20$ ,  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $N=200$ ,  $J=500$ . На рис. 4 представлены графики результатов точного и численного решения в разные моменты времени (моменты времени останутся прежними). На следующем рис. 5 представлены графики абсолютной ошибки в разные моменты времени. Скорость распространения бегущей волны представлена на рис. 6. Как видно из графика скорость фронта "бегущей волны"  $v = 2\sqrt{Da} \approx 0.6$  определяется с высокой точностью.

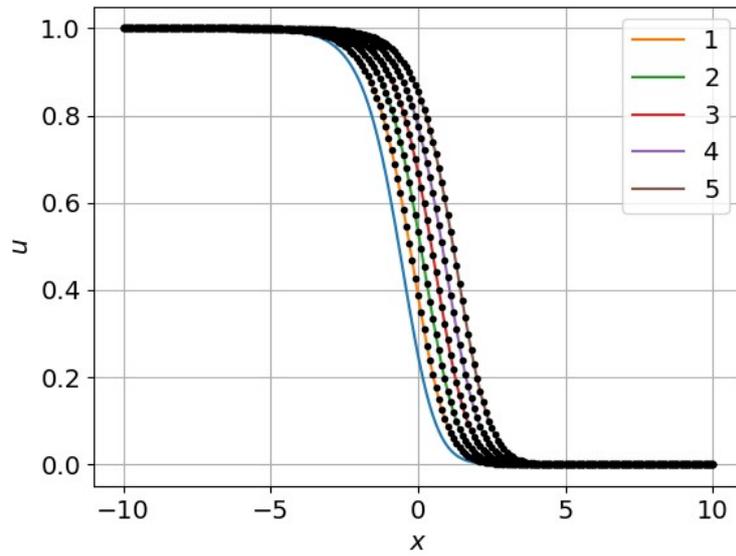


Рисунок 4 - Численное и точное решение в разные моменты времени при  $D=0,09$   
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7.4>

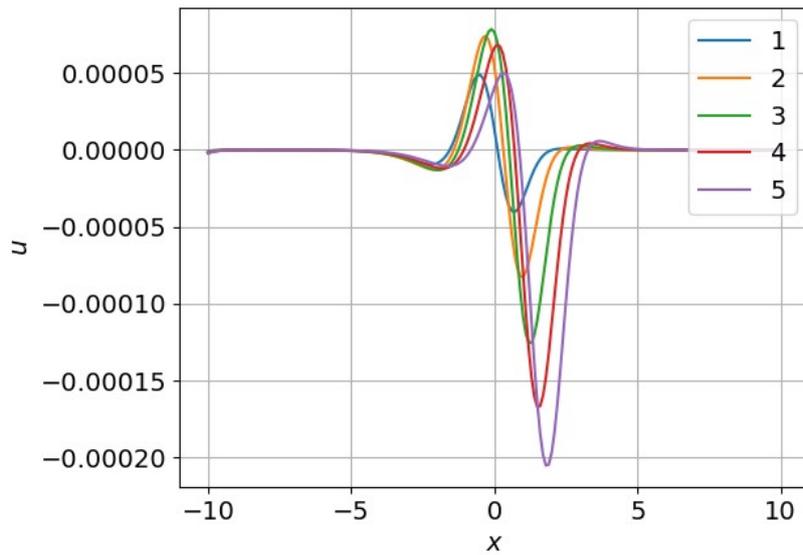


Рисунок 5 - Разница численных решений при  $D=0,09$   
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7.5>

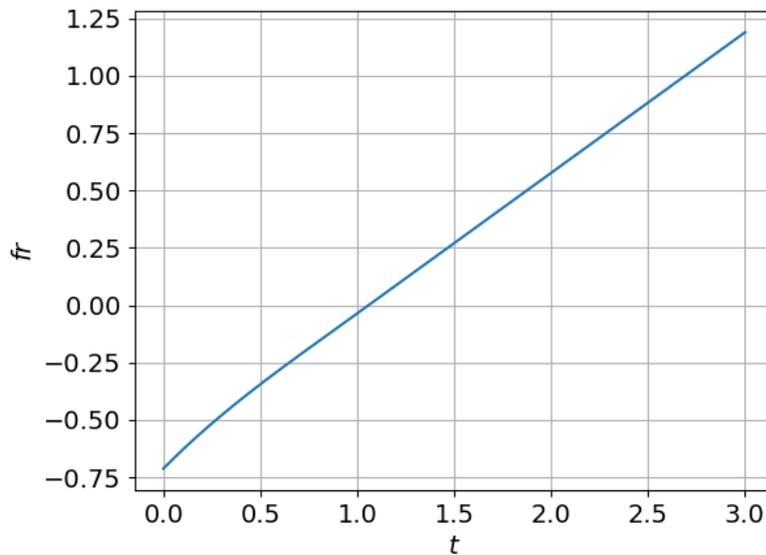


Рисунок 6 - Динамика распространения бегущей волны при  $D=0,09$   
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7.6>

В третьем вычислительном эксперименте взяли следующие входные данные  $D=0.0081$ ,  $T=6$ ,  $l=6$ ,  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $N=200$ ,  $J=700$ . На рис. 7 представлены графики результатов точного и численного решения в разные моменты времени (моменты времени останутся прежними). На следующем рис. 8 представлены графики абсолютной ошибки в разные моменты времени. Скорость распространения бегущей волны представлена на рис. 9. Как видно из графика прогнозируемая скорость фронта волны  $v = 2\sqrt{Da} \approx 0.18$ .

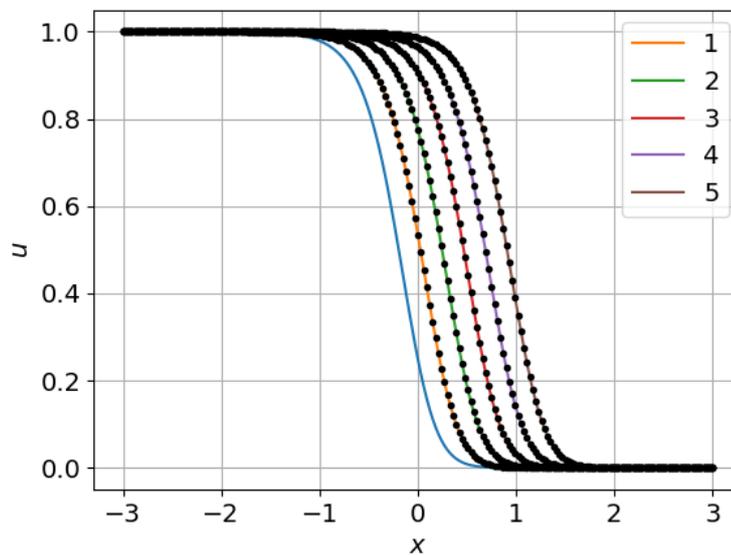


Рисунок 7 - Численное и точное решение в разные моменты времени при  $D=0,0081$   
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7.7>

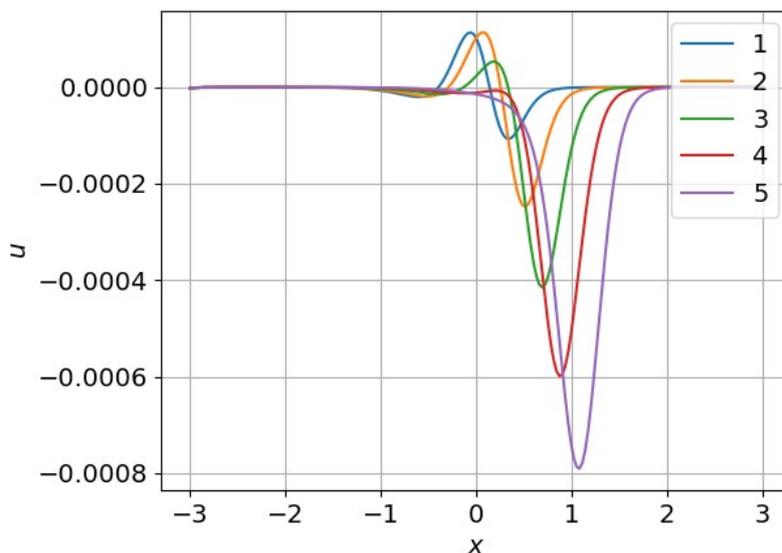


Рисунок 8 - Разница численных решений при  $D=0,0081$   
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7.8>

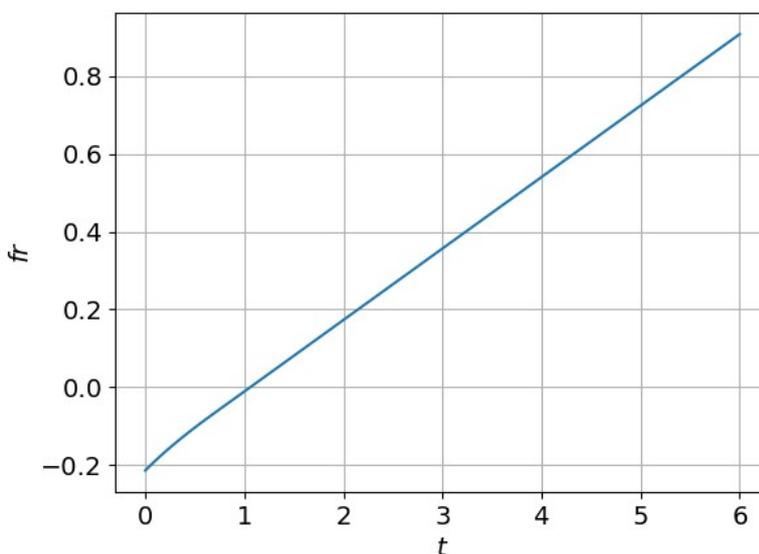


Рисунок 9 - Скорость распространения бегущей волны при  $D=0,0081$   
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7.9>

Приведем результаты расчетов на различных сетках. Входные данные берутся такие же, как было вычислено в первом примере  $D=1$ ,  $T=6$ ,  $l=60$ ,  $a=1$ ,  $b=1$  с теми же моментами времени  $t_1 = T/5$ ,  $t_2 = 2T/5$ ,  $t_3 = 3T/5$ ,  $t_4 = 4T/5$ ,  $t_5 = T$ . Сравнение абсолютных ошибок представлено на таблице (см. табл. 1). Из таблицы видно, что предложенным методом возможно решить задачу на грубых сетках.

Таблица 1 - Сравнение ошибки в разные моменты времени на двух значениях шага пространственной сетки и четырех значениях шага временной сетки в разные моменты времени

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.129.7.10>

J	Error <sub>t1</sub>	Error <sub>t2</sub>	Error <sub>t3</sub>	Error <sub>t4</sub>	Error <sub>t5</sub>
N=100					
150	0,0005411	0,0010736	0,0019090	0,0029216	0,0041059

300	0,0002834	0,0006089	0,0009289	0,0012197	0,0014390
600	0,0002418	0,0004325	0,0005034	0,0004145	0,0003781
1 200	0,0002384	0,0003770	0,0003389	0,0005069	0,0008668
N=200					
150	0,0005426	0,0010883	0,0020892	0,0034469	0,0051525
300	0,0002588	0,0005496	0,0010325	0,0016717	0,0024498
600	0,0001284	0,0002791	0,0004969	0,0007636	0,0010676
1 200	7,2647e-05	1,5565e-04	2,3858e-04	3,1342e-04	3,7424e-04

### Заключение

В работе для численного решения начально-краевой задачи для квазилинейного уравнения Ф–КПП предложена эффективная разностная схема с явной аппроксимацией диффузионного члена и аппроксимацией остальных слагаемых уравнения со вторым порядком по времени. Приведены результаты ее численной реализации на модельном примере с точным решением типа «бегущей волны». Расчеты показали высокую точность предложенной разностной схемы.

### Финансирование

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 02.02.2022 № 075-02-2022-881.

### Благодарности

Автор выражает благодарность профессору Васильеву В.И. за советы и ценные замечания при работе над данной статьей

### Конфликт интересов

Не указан.

### Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

### Funding

This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, agreement № 075-02-2022-881 from 02.02.2022.

### Acknowledgement

The author expresses their gratitude to Professor V.I. Vasiliev for the advice and valuable comments on this article

### Conflict of Interest

None declared.

### Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

### Список литературы / References

1. Колмогоров А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и механика. — 1937. — Т. 1. — 6. — с. 1-16.
2. Fisher R.A. The Wave of Advance of Advantageous Genes / R.A. Fisher // Ann. Eugenics. — 1937. — Vol. 7. — 4. — p. 353-369.
3. Зельдович Я.Б. К теории равномерного распространения пламени / Я.Б. Зельдович, Д.А. Франк-Каменецкий // Докл. АН СССР. — 1938. — Т. 19. — 9. — с. 693-697.
4. Зельдович Я.Б. Математическая теория горения и взрыва / Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либровтч и др. — М.: Наука, 1980.
5. Caputo J-G. Reaction-diffusion Front Crossing a Local Defect / J-G. Caputo, B. Sarels // Phys. Rev. E. — 2011. — Vol. 84. — Iss. 4.
6. Forbes L.K. A Note on Travelling Waves in Competitive Reaction Systems / L.K. Forbes // The ANZIAM Journal. — 2013. — Vol. 55. — Iss. 1. — p. 1-13.
7. Борисов А.В. Численное моделирование одномерной популяционной динамики с нелокальным взаимодействием / А.В. Борисов, Р.О. Резаев, А.Ю. Трифионов и др. // Известия Томского политехнического университета. — 2009. — Т. 315. — 2. — с. 24-28.
8. Chandraker V. A Numerical treatment of Fisher Equation / V. Chandraker, A. Awasthib, S. Jayaraj // Procedia Engineering. — 2015. — Vol. 127. — p. 1256-1262.
9. Matus P.P. Stability of Difference Schemes for Nonlinear Time-dependent Problems / P.P. Matus // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2003. — Vol. 3. — 2. — p. 313-329.
10. Матус П.П. Монотонные разностные схемы повышенного порядка точности для параболических уравнений / П.П. Матус, Б.Д. Утебаев // Докл. Национальной академии наук Беларуси. — 2020. — Т. 64. — 4. — с. 391-398.
11. Murray J.D. Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications / J.D. Murray // New York: Springer. — 2001. — Vol.3.
12. Murray J.D. Mathematical Biology. I. An Introduction / J.D. Murray. — 2002.
13. Bacaer N. A Short History of Mathematical Population Dynamics / N. Bacaer // Springer-Verlag London Limited. — 2011.

**Список литературы на английском языке / References in English**

1. Kolmogorov A.N. Issledovanie uravneniya diffuzii, soedinennoj s vozrastaniem veshchestva, i ego primenenie k odnoj biologicheskoy probleme [Investigation of the Equation of Diffusion Combined with Increasing of the Substance and Its Application to a Biology Problem] / A.N. Kolmogorov, A.N. Petrovsky, N.S. Petrovsky // Byul. MGU. Ser. A. Matematika i mekhanika [Bulletin of Moscow State University Series A: Mathematics and Mechanics]. — 1937. — Vol. 1. — 6. — p. 1-16. [in Russian]
2. Fisher R.A. The Wave of Advance of Advantageous Genes / R.A. Fisher // Ann. Eugenics. — 1937. — Vol. 7. — 4. — p. 353-369.
3. Zeldovich Ya. B. K teorii ravnomernogo rasprostraneniya plameni [On the Theory of Uniform Flame Propagation] / Ya.B. Zeldovich, D.A. Frank-Kamenetsky // Dokl. AN SSSR. [Reports of AS of USSR] (USSR). — 1938. — Vol. 19. — 9. — p. 693-697. [in Russian]
4. Zeldovich Ya.B. Matematicheskaya teoriya gorenija i vzryva [The Mathematical Theory of Combustion and Explosion] / Ya.B. Zeldovich, G.I. Barenblatt, V.B. Librovich et al. — M.: Nauka, 1980. [in Russian]
5. Caputo J-G. Reaction-diffusion Front Crossing a Local Defect / J-G. Caputo, B. Sarels // Phys. Rev. E. — 2011. — Vol. 84. — Iss. 4.
6. Forbes L.K. A Note on Travelling Waves in Competitive Reaction Systems / L.K. Forbes // The ANZIAM Journal. — 2013. — Vol. 55. — Iss. 1. — p. 1-13.
7. Borisov A.V. CHislennoe modelirovanie odnomernoj populyacionnoj dinamiki s nelokal'nym vzaimodejstviem [Numerical Modeling of One-Dimensional Population Dynamics with Nonlocal Interactions] / A.V. Borisov, R.O. Rezaev, A.Yu. Trifonov et al. // Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University]. — 2009. — Vol. 315. — 2. — p. 24-28. [in Russian]
8. Chandraker V. A Numerical treatment of Fisher Equation / V. Chandraker, A. Awasthib, S. Jayaraj // Procedia Engineering. — 2015. — Vol. 127. — p. 1256-1262.
9. Matus P.P. Stability of Difference Schemes for Nonlinear Time-dependent Problems / P.P. Matus // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2003. — Vol. 3. — 2. — p. 313-329.
10. Matus P.P. Monotonnye raznostnye skhemy povyshennogo poryadka tochnosti dlya parabolicheskikh uravnenij [Monotone difference schemes of higher accuracy for parabolic equations] / P.P. Matus, B.D. Utebaev // Dokl. Nacional'noj akademii nauk Belarusi [Reports of the National Academy of Sciences of Belarus]. — 2020. — Vol. 64. — 4. — p. 391-398. [in Russian]
11. Murray J.D. Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications / J.D. Murray // New York: Springer. — 2001. — Vol.3.
12. Murray J.D. Mathematical Biology. I. An Introduction / J.D. Murray. — 2002.
13. Bacaer N. A Short History of Mathematical Population Dynamics / N. Bacaer // Springer-Verlag London Limited. — 2011.