 © Авторы статьи / Authors of the article

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ/MECHANICS OF FLUIDS, GAS AND PLASMA

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.171.100 EDN: OWFZQG

ДЕТЕКЦИЯ СРЫВА ПОТОКА НА ПРОФИЛЕ NACA 0012 МЕТОДАМИ ПЕРСИСТЕНТНОЙ ГОМОЛОГИИ

Научная статья

Лемешко Р.А.[1, *]

[1] ORCID : 0000-0003-3552-507X;

[1] Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации имени Главного маршала авиации А.А. Новикова, Санкт-Петербург, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (romanlemeshcko[at]mail.ru)

Предложена: 09.07.2026; Принята: 04.09.2026; Опубликована: 17.09.2026

Аннотация

В работе исследуется применение методов топологического анализа данных (TDA), в частности персистентной гомологии, для количественной оценки структурных изменений в поле течения при обтекании аэродинамического профиля. На основе стационарных RANS-расчётов из датасета AirfRANS (профиль NACA 0012) выполнен анализ топологических инвариантов поля знаковой завихренности в зоне следа. Показано, что в диапазоне безотрывного обтекания число топологических циклов (H_1-гомологий) остаётся стабильным. При переходе к срывному режиму (углы атаки $\alpha > 11{,}5°$) наблюдается резкий рост топологической сложности следа: число выявленных циклов увеличивается почти вдвое. Полученные результаты демонстрируют, что методы персистентной гомологии могут служить эффективным индикатором для автоматического детектирования срыва потока и анализа топологии вихревых структур в вычислительной гидроаэродинамике.

Ключевые слова: Топологический анализ данных, персистентная гомология, вычислительная гидродинамика, обтекание профиля, срыв потока, завихренность, зона следа, аэродинамика.

DETECTION OF FLOW SEPARATION ON THE NACA 0012 PROFILE USING PERSISTENT HOMOLOGY METHODS.

Research article

Lemeshko R.A.[1, *]

[1] ORCID : 0000-0003-3552-507X;

[1] Saint-Petersburg State University of Civil Aviation named after Chief Marshal of Aviation A.A. Novikov, Saint-Petersburg, Russian Federation

* Corresponding author (romanlemeshcko[at]mail.ru)

Suggested: 09.07.2026; Accepted: 04.09.2026; Published: 17.09.2026

Abstract

The paper investigates the application of topological data analysis (TDA) methods, in particular persistent homology, for the quantitative assessment of structural changes in the flow field during the flow around an airfoil. Based on steady RANS calculations from the AirfRANS dataset (NACA 0012 profile), an analysis of the topological invariants of the signed vorticity field in the wake zone was performed. It is shown that in the range of stall-free flow, the number of topological cycles (H1-homologies) remains stable. When transitioning to the stalled mode (angles of attack $\alpha > 11.5°$), a sharp increase in the topological complexity of the wake is observed: the number of identified cycles nearly doubles. The results obtained demonstrate that persistent homology methods can serve as an effective indicator for automatically detecting flow separation and analyzing the topology of vortex structures in computational hydro-aerodynamics.

Keywords: Topological data analysis, persistent homology, computational fluid dynamics, flow around an airfoil, flow separation, vorticity, wake zone, aerodynamics.

Введение

Современная вычислительная гидроаэродинамика (CFD) генерирует огромные объемы данных, описывающих пространственно-временную структуру течений жидкости и газа. Традиционные методы оценки аэродинамических характеристик часто опираются на интегральные коэффициенты (коэффициент подъемной силы C_L, коэффициент лобового сопротивления C_D) или точечные измерения. Однако такие метрики не всегда позволяют количественно описать сложные изменения в топологии самого течения, возникающие при переходных режимах, таких как отрыв пограничного слоя, образование вихревых зон и турбулизация следа за профилем.

Методы топологического анализа данных (TDA), в частности алгоритмы персистентной гомологии, предлагают математический аппарат для изучения формы и структуры многомерных объектов без потери их ключевых свойств. Персистентная гомология позволяет идентифицировать инвариантные топологические характеристики — компоненты связности, циклы (дырки) и полости — и оценивать их устойчивость к шуму при изменении масштаба рассмотрения [1]. Данный подход особенно эффективен для выделения глобальной структуры потока, такой как зоны рециркуляции и когерентные вихревые структуры, которые трудно отделить от локального шума численного решения стандартными методами пороговой фильтрации.

 © Авторы статьи / Authors of the article

Теоретические основы персистентной гомологии были заложены Г. Эдельсбруннером и соавторами [1], а её систематизация в контексте анализа данных подробно изложена в работах Г. Карлссона [2] и в современном обзоре Chazal и Michel [12]. Для практической реализации метода часто используются эффективные алгоритмические решения, такие как библиотека Ripser, которая позволяет быстро вычислять диаграммы персистентности [3].

Применение TDA к задачам механики жидкости и газа демонстрирует высокую эффективность. В частности, методы были успешно использованы для анализа структур высокоскоростных турбулентных потоков [4], а также для сравнительного анализа различных численных методов моделирования турбулентности через призму топологических признаков полей скорости [5]. Более современные исследования показывают применимость топологических дескрипторов для ансамблей гидродинамических течений [6], а также для анализа конвективных циклов в сетевых потоках [16]. Отдельные работы посвящены применению персистентной гомологии непосредственно к изучению структуры течений жидкости, включая визуализацию и классификацию вихревых паттернов [8].

Важным направлением является интеграция TDA с методами машинного обучения для восстановления полей течения по экспериментальным данным. Например, Suzuki и др. [9] продемонстрировали возможность оценки параметров потока исключительно на основе анализа изображений с использованием персистентной гомологии, что открывает перспективы для гибридных подходов в аэродинамическом мониторинге.

Для проверки гипотез о применении TDA в инженерной аэродинамике актуально использование открытых верификационных наборов данных. Одним из таковых является датасет AirfRANS, содержащий результаты высокодетализированных расчетов уравнений Навье-Стокса в осредненном виде (RANS) для профиля NACA 0012 при широком диапазоне углов атаки [7]. Использование этих данных позволяет исследовать эволюцию поля завихренности от ламинарного обтекания до режимов глубокого срыва потока.

Цель работы заключается в разработке методики применения персистентной гомологии для количественной оценки изменений топологии поля знаковой завихренности ω_z при обтекании аэродинамического профиля, с акцентом на детектирование зоны отрыва потока (срыва потока) через анализ роста числа топологических циклов в области высокой завихренности.

Методы и принципы исследования

2.1. Исходные данные

В работе использовались результаты стационарных расчётов из открытого датасета AirfRANS [7]. Расчёты выполнены методом RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) в пакете OpenFOAM с использованием модели турбулентности k-ω SST. Число Рейнольдса, построенное по хорде профиля и параметрам набегающего потока, варьировалось в диапазоне $Re = 2 \cdot 10^6 – 6 \cdot 10^6$, что соответствует дозвуковому несжимаемому режиму течения ($Ma < 0,3$). Пограничный слой разрешался полностью (low-Re подход) без применения пристенных функций, что обеспечивает точное восстановление касательных напряжений на поверхности профиля. Геометрия профиля задавалась параметрически для семейств NACA 4-digit и 5-digit, включая профиль NACA 0012, при углах атаки $\alpha \in [-5°; +15°]$.

2.2. Расчёт поля завихренности

Для выделения областей интенсивного вращения жидкости использовалась проекция вектора завихренности на ось z, перпендикулярную плоскости течения:

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

где u, v — компоненты вектора скорости.

Градиенты скорости вычислялись на основе конечно-элементной аппроксимации на треугольной неструктурированной сетке. Для каждого треугольника с вершинами (x_i, y_i) и скоростями (u_i, v_i), $i = 1, 2, 3$ производные определялись аналитически через решение системы линейных уравнений. Полученные на элементах значения интерполировались в узлы сетки методом взвешенного усреднения с сохранением знака.

2.3. Персистентная гомология

Для анализа топологической структуры поля ω_z применялся метод персистентной гомологии [1], [2], [3], [12]. Поскольку на этапе стохастического прореживания (субсэмплинга) исходная сеточная связность утрачивается, для анализа облака координат применялась фильтрация Вьеториса-Рипса (Vietoris-Rips filtration), реализуемая библиотекой Ripser [3], [13]. Данная фильтрация строит симплициальный комплекс на основе попарных евклидовых расстояний между точками облака. Значением функции в каждой точке служила нормированная завихренность:

$$f\left(\mathbf{x}_i\right) = \frac{\omega_z(\mathbf{x}_i) - \min(\omega_z)}{\max(\omega_z) - \min(\omega_z)}. \quad (2)$$

В работе анализировались одномерные гомологии (H_1), соответствующие циклам (замкнутым структурам) в поле завихренности.

2.4. Параметры фильтрации

Для исключения топологического шума применялся порог по персистентности:

$$p = d - b \geq p_{\min} \quad (3)$$

где b — время рождения (birth) и d — время смерти (death) топологической особенности.

В расчётах использовалось $p_{min} = 0,05$ (5% от нормированного диапазона), что обеспечивает баланс между сохранением физически значимых структур и подавлением численного шума.

Границы окна анализа ($x > 0,8$, $|y| < 0,8$) выбраны так, чтобы охватывать зону развития следа для всех исследованных углов атаки, исключая при этом пограничный слой на поверхности профиля.

 © Авторы статьи / Authors of the article

Порог 90-го перцентиля обеспечивает фокусировку на ядрах вихревых структур, исключая фоновые флуктуации.

2.5. Статистическая устойчивость

Для оценки влияния стохастического прореживания каждый режим расчитывался 11 раз с различными начальными значениями генератора случайных чисел (seed = 40...400). В качестве финальной метрики использовались среднее число циклов H_1 и его стандартное отклонение, что позволяет количественно оценить устойчивость индикатора к вариациям выборки.

2.6. Анализ зоны следа

Для детектирования срыва потока TDA применялся не ко всему полю, а к выделенной области следа ($x > 0,8$ хорды, $|y| < 0,8$), где отбирались точки с завихренностью выше 90-го перцентиля. Это позволило сфокусировать анализ на топологии вихревых структур, исключив влияние пограничного слоя на профиле.

Основные результаты

3.1. Визуализация полей течения

Для анализа структуры течения были выбраны четыре характерных режима обтекания профиля NACA 0012 с различными углами атаки: α = -4,2° (отрицательный угол), α = 0,4° (околонулевой), α = 8,2° (средний положительный, до-срывной режим) и α = 14,0° (развитый срыв).

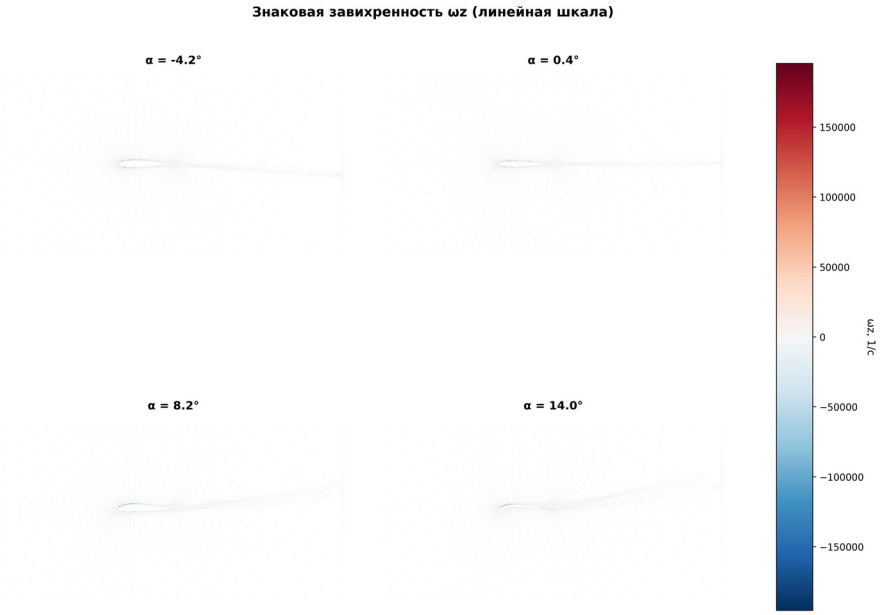

Рисунок 1 - Знаковая завихренность (линейная шкала)
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.171.100.1

На рис. 1 представлены поля знаковой завихренности ω_z, рассчитанные по формуле (1). При малых углах атаки (α = -4,2° и 0,4°) наблюдается симметричное распределение завихренности: на нижней поверхности профиля формируется область положительной завихренности (красная зона), на верхней — отрицательной (синяя зона). Пограничный слой имеет малую толщину, след за профилем узкий и упорядоченный.

При увеличении угла атаки до α = 8,2° происходит утолщение пограничного слоя на верхней поверхности профиля, что свидетельствует о начале развития зоны повышенных градиентов скорости. При α = 14,0° наблюдается качественное изменение структуры течения: на верхней поверхности формируется обширная область отрицательной завихренности, след за профилем значительно расширяется, что характерно для режима с развитым отрывом потока.

 © Авторы статьи / Authors of the article

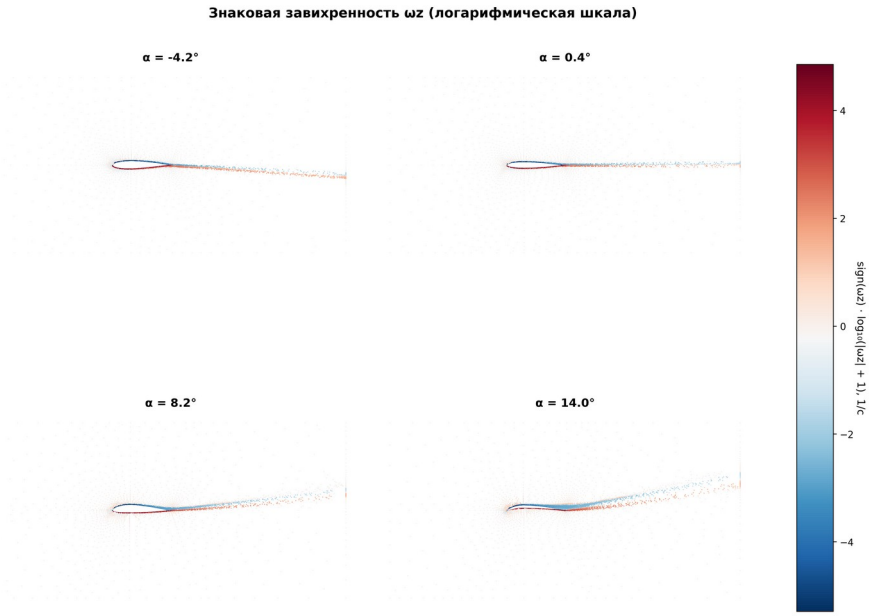

Рисунок 2 - Знаковая завихренность (логарифмическая шкала)
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.171.100.2

Для лучшей визуализации слабых структур в следе использовалась логарифмическая шкала $\text{sign}(\omega_z) \cdot \log_{10}(|\omega_z|+1)$ (рис. 2), позволяющая одновременно отображать области с высокой завихренностью в пограничном слое и умеренной завихренностью в зоне следа.

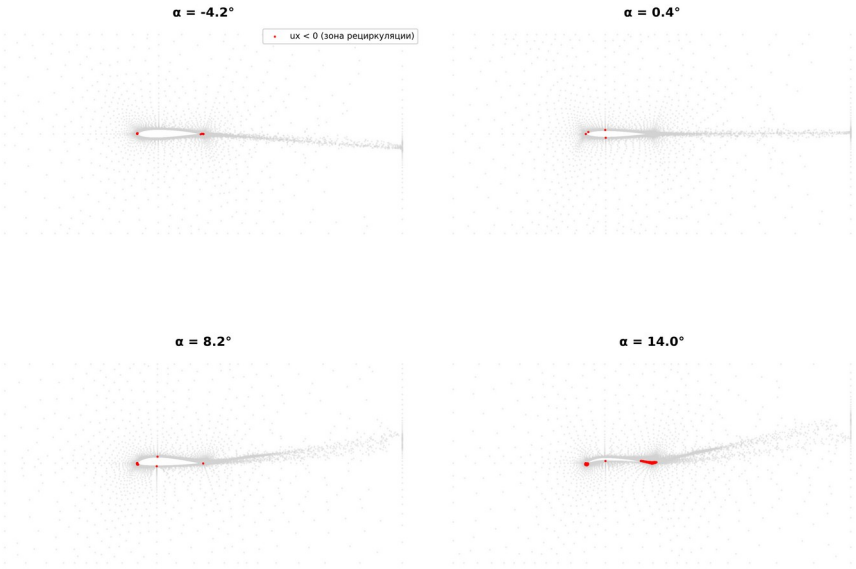

Рисунок 3 - Область обратного течения (ux <0)
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.171.100.3

Анализ поля продольной компоненты скорости ux показал наличие зон обратного течения (ux <0) при больших углах атаки (рис. 3). При α = 14,0° фиксируется область рециркуляции на верхней поверхности профиля, что является прямым индикатором срыва потока.

3.2. Топологический анализ

Для количественной оценки изменений структуры течения применялся метод персистентной гомологии к областям высокой завихренности в зоне следа (x > 0,8 хорды, |y| <0,8).

В табл. 1 приведены результаты расчёта числа топологических циклов (H_1-гомологий) для 21-го исследованного режима.

 © Авторы статьи / Authors of the article

Таблица 1 - Топологические характеристики поля завихренности при различных углах атаки

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.171.100.4

Угол атаки α, °	Коэффициент C_L	Число циклов H_1
-4,2	-0,321	26 ± 2,7
-3,34	-0,310	24,0 ± 1,7
-2,65	-0,030	27,6 ± 2,7
-1,91	-0,061	25,3 ± 4,9
-1,58	0,051	26,0 ± 4,0
-0,55	-0,053	25,5 ± 3,1
-0,47	0,506	24,6 ± 3,5
0,42	0,067	28,4 ± 4,1
1,33	0,149	22,4 ± 3,2
5,28	0,682	26,8 ± 3,1
8,2	1,079	25,5 ± 2,8
9,42	1,040	39,5 ± 3,1
9,92	1,093	42,6 ± 5,5
10,15	1,322	41,6 ± 5,2
10,42	1,358	36,1 ± 2,6
10.54	1,185	37,2 ± 3,8
11,32	1,388	36,9 ± 2,5
11,51	1,766	44,3 ± 4,6
12,12	1,675	43,5 ± 2,7
13,71	1,620	45,4 ± 3,1
14,04	1,847	51,9 ± 6,4

Статистический анализ зависимости числа топологических циклов H_1 от угла атаки α (рис. 4) позволил выделить три характерных режима обтекания.

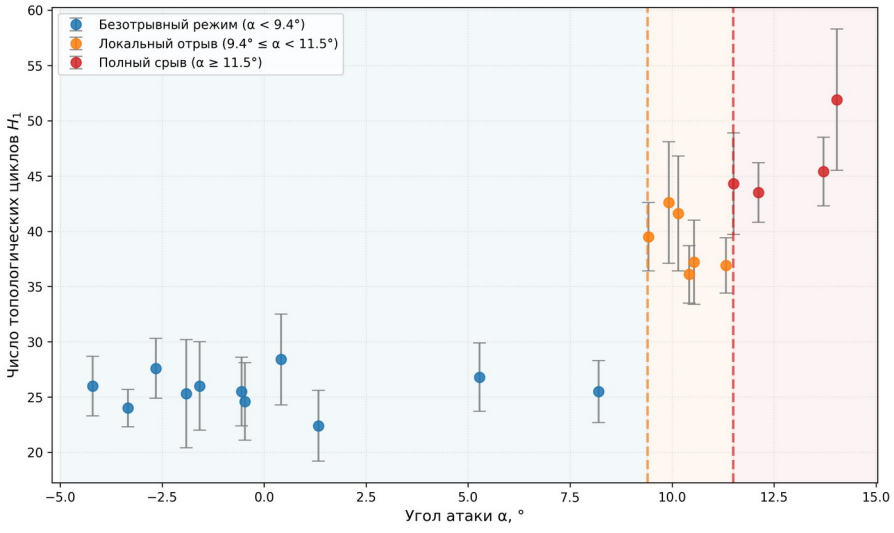

Рисунок 4 - Зависимость числа топологических циклов H_1 от угла атаки α

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.171.100.5

Безотрывный режим (α < 9,4°).

В диапазоне отрицательных и малых положительных углов атаки наблюдается плато топологической стабильности. Число выявленных циклов варьируется в узком диапазоне 22-28 при среднем значении около 25±3. Это соответствует устойчивой конфигурации узкого турбулентного следа и пристенного пограничного слоя, где топологическая сложность определяется лишь тонкими структурами сдвигового слоя.

Переходный режим локального отрыва (9,4° ≤ α <11,5°).

 © Авторы статьи / Authors of the article

Начиная с угла атаки α ≈ 9,4°, фиксируется статистически значимый рост топологической сложности. Число циклов увеличивается до значений 36-42. Этот рост обусловлен зарождением локальной зоны отрыва у задней кромки профиля. Формирующийся небольшой рециркуляционный пузырь усложняет геометрию поля завихренности, создавая новые замкнутые контуры, фиксируемые алгоритмом TDA.

Режим полного срыва (α ≥ 11,5°).

При достижении критического угла α ≈ 11,5° происходит фазовый переход топологии течения. Наблюдается резкий скачок числа циклов до значений 44–52 (рост более чем на 80% по сравнению с безотрывным режимом). Это соответствует формированию развитой зоны отрыва, занимающей значительную часть верхней поверхности профиля. Высокое значение H_1 в этой зоне отражает сложную структуру крупных вихревых образований и границ обширной зоны обратного течения.

Таким образом, предложенный топологический индикатор H_1 демонстрирует высокую чувствительность к качественной перестройке структуры следа. Резкий рост числа циклов при α ≥ 9,4° и стабилизация на высоком уровне при α ≥ 11,5° позволяют однозначно детектировать переход потока в срывной режим без прямого анализа силовых коэффициентов.

Обсуждение

Физическая интерпретация выявленных топологических инвариантов требует учёта специфики осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS). В нестационарных расчётах (LES/DNS) одномерные гомологии (H_1-циклы) в поле завихренности традиционно соответствуют дискретным вихревым ядрам или замкнутым линиям тока. Однако в стационарных RANS-расчётах пульсационная составляющая течения моделируется через замыкающие соотношения турбулентной вязкости, а поле скоростей представляет собой усреднённую по времени картину. В данном контексте выявленные топологические циклы отражают не мгновенные вихри, а сложную топологию средней зоны отрыва и сдвиговых слоёв, окаймляющих рециркуляционный пузырь.

Расширенный статистический анализ позволил выявить трёхстадийную эволюцию структуры течения, что уточняет понимание процесса срыва:

Режим безотрывного обтекания (α < 9,4°).

Наблюдается стабильное «плато» топологической сложности (среднее значение ≈ 25 циклов). Это соответствует узкому турбулентному следу и пристенному пограничному слою, где топологические особенности определяются лишь тонкими структурами сдвига.

Переходная зона локального отрыва (9,4° ≤ α < 11,5°).

При достижении угла α ≈ 9,4° начинается плавный рост числа циклов. Физически это соответствует зарождению локальной зоны обратного течения у задней кромки профиля. Формирующийся небольшой рециркуляционный пузырь усложняет геометрию поля завихренности, создавая новые замкнутые контуры.

Режим полного срыва (α ≥ 11,5°).

При критическом угле α ≈ 11,5° происходит топологический фазовый переход. Наблюдается резкий скачок числа циклов до значений ≈ 45 и более (рост более чем на 80%). Это количественно подтверждает формирование развитой зоны отрыва, занимающей значительную часть верхней поверхности профиля. Высокое значение H_1 в этой зоне отражает сложную структуру крупных вихревых образований и границ обширной области пониженного давления.

Важно отметить ограничения, накладываемые RANS-подходом на топологический анализ. Поскольку метод не разрешает нестационарное вихреобразование (например, вихревую дорожку Кармана), TDA-метрики отражают лишь усреднённое состояние потока. Это делает предложенный подход оптимальным для задач стационарного проектирования, верификации расчётных сеток и анализа интегральной структуры отрыва, но требует осторожности при интерпретации в контексте нестационарной аэродинамики. Для полного описания эволюции вихревых структур в отрывной зоне целесообразно в дальнейшем применять методику к нестационарным данным (LES/DES), где диаграммы персистентности смогут отслеживать динамику рождения, слияния и разрушения дискретных вихрей во времени. Перспективность такого подхода подтверждается недавними работами по анализу вихревых следов методами персистентной гомологии [10] и графовыми методами TDA для транзиентных режимов течения [11].

С практической точки зрения, предложенный топологический индикатор демонстрирует высокий потенциал для автоматизированного детектирования срыва потока. В отличие от традиционных методов, опирающихся на анализ коэффициента давления C_p или касательного напряжения на стенке τw, которые требуют привязки к геометрии профиля и могут быть чувствительны к численному шуму вблизи критических точек, TDA-метрика является ***инвариантной к системе координат*** и масштабу расчётной области. Резкий рост числа H_1-циклов может быть использован как триггер для адаптивного сгущения сетки в зоне отрыва или как критерий остановки итерационного процесса при оптимизации формы профиля. Кроме того, наблюдаемая связь между топологической сложностью следа и аэродинамическими коэффициентами (C_L, C_D) открывает путь к созданию суррогатных моделей, связывающих топологические инварианты полей течения с интегральными характеристиками летательного аппарата без необходимости проведения полного CFD-анализа на каждом шаге оптимизации. Подобные подходы уже успешно применяются в смежных областях, таких как химическая инженерия [14], а интеграция TDA с методами машинного обучения [15] может существенно ускорить процесс поиска аэродинамических конфигураций с заданными характеристиками устойчивости к срыву.

Заключение

В работе разработана и апробирована методика применения персистентной гомологии для топологического анализа полей завихренности в задачах вычислительной гидроаэродинамики. На основе открытого датасета AirfRANS (профиль NACA 0012) проведён количественный анализ эволюции топологических инвариантов поля знаковой завихренности ω_z в зоне следа при изменении угла атаки.

 © Авторы статьи / Authors of the article

Основные результаты исследования можно сформулировать следующим образом:

1. Предложенный TDA-подход, основанный на фильтрации Вьеториса-Рипса, позволяет выделять инвариантные топологические характеристики (одномерные гомологии H_1) структуры течения, устойчивые к численному шуму и локальным флуктуациям полей скорости.

2. Анализ зависимости числа топологических циклов от угла атаки выявил чёткое разделение режимов обтекания:

– безотрывный режим ($\alpha < 9{,}4°$): характеризуется стабильным «плато» топологической сложности со средним значением 25±3 цикла, что соответствует узкому турбулентному следу и пристенному пограничному слою;

– переходная зона ($9{,}4° \leq \alpha < 11{,}5°$): наблюдается статистически значимый рост числа циклов до 40 - 43, обусловленный зарождением локальной зоны отрыва у задней кромки профиля;

– режим полного срыва ($\alpha \geq 11{,}5°$): фиксируется выход на новое плато с высокой топологической сложностью (45 - 52 цикла), что количественно подтверждает формирование развитой рециркуляционной области на всей верхней поверхности профиля.

3. Резкий скачок топологической сложности при $\alpha \approx 9{,}4°$ и стабилизация индикатора при $\alpha \geq 11{,}5°$ полностью согласуются с классическими представлениями о срыве потока на профиле NACA 0012. Топологический индикатор реагирует на качественную перестройку структуры следа (появление замкнутых контуров вихревых зон), а не на интегральные силовые характеристики.

4. Топологический индикатор демонстрирует высокую чувствительность к изменению режима обтекания и может рассматриваться как координатно-независимый, масштабно-инвариантный критерий для автоматического детектирования срыва потока в стационарных CFD-расчётах.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Edelsbrunner H. Topological persistence and simplification / H. Edelsbrunner, D. Letscher, A. Zomorodian // Discrete & Computational Geometry. — 2002. — Vol. 28, № 4. — P. 511–533.

2. Carlsson G. Topology and data / G. Carlsson // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2009. — Vol. 46, № 2. — P. 255–308.

3. Bauer U. Ripser: efficient computation of Vietoris–Rips persistence barcodes / U. Bauer // Journal of Applied and Computational Topology. — 2021. — Vol. 5, № 3. — P. 391–423.

4. Bridel-Porter A. Topological Analysis of High Velocity Turbulent Flow / A. Bridel-Porter [et al.] // Proceedings of the 2019 IEEE 9th Symposium on Large Data Analysis and Visualization (LDAV). — 2019. — P. 16–25.

5. Nauleau P. Topological Data Analysis for numerical method comparisons of 2D turbulent flows / P. Nauleau [et al.] // Actes des Journées d'Analyse et de Visualisation de Données (Journée Visu 2021). — 2021. — P. 1–6.

6. Nauleau F. Topological Analysis of Ensembles of Hydrodynamic Turbulent Flows — An Experimental Study / F. Nauleau [et al.] // Proceedings of the 2022 IEEE 12th Symposium on Large Data Analysis and Visualization (LDAV). — 2022. — P. 35–45.

7. Bonnet F. AirfRANS: High Fidelity Computational Fluid Dynamics Dataset for Approximating Reynolds-Averaged-Navier–Stokes Solutions / F. Bonnet, J.A. Mazari, P. Cinnella // Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS) Datasets and Benchmarks Track. — 2022. — Vol. 35. — P. 1–15.

8. Levanger R. Studying Fluid Flows with Persistent Homology / R. Levanger. — Institute for Advanced Study, 2018. — URL: https://www.ias.edu/video/TopologyWS/2018/0407-RachelLevanger (accessed: 21.07.2026).

9. Suzuki A. Flow estimation solely from image data through persistent homology analysis / A. Suzuki, M. Miyazawa, A. Okamoto [et al.] // Scientific Reports. — 2021. — Vol. 11. — Art. 17948. — DOI: 10.1038/s41598-021-97222-6.

10. Yiran A. Persistent homology analysis of vortex wakes / A. Yiran, M. Budisic, M.A. Green // Abstract of the 76th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics. — 2023. — URL: https://meetings.aps.org/Meeting/DFD23/Session/X04.6 (accessed: 13.07.2026).

11. Uda T. Topological flow data analysis for transient flow patterns: a graph-based approach / T. Uda, M. Watanabe, G. Kawahara // arXiv preprint. — 2025. — arXiv:2502.00664. — URL: https://arxiv.org/abs/2502.00664 (accessed: 13.07.2026).

12. Chazal F. An Introduction to Topological Data Analysis / F. Chazal, B. Michel // Frontiers in Artificial Intelligence. — 2021. — Vol. 4. — Art. 667963. — DOI: 10.3389/frai.2021.667963.

13. Otter N. A roadmap for the computation of persistent homology / N. Otter, M.A. Porter, U. Tillmann [et al.] // EPJ Data Science. — 2017. — Vol. 6. — Art. 17. — DOI: 10.1140/epjds/s13688-017-0109-5.

14. Smith A.D. Topological data analysis: concepts, computation, and applications in chemical engineering / A.D. Smith, P. Dłotko, V.M. Zavala // Computers & Chemical Engineering. — 2021. — Vol. 146. — Art. 107202. — DOI: 10.1016/j.compchemeng.2020.107202.

15. Leykam D. Topological data analysis and machine learning / D. Leykam, D.G. Angelakis // Advances in Physics: X. — 2023. — Vol. 8, № 1. — Art. 2202331. — DOI: 10.1080/23746149.2023.2202331.

 © Авторы статьи / Authors of the article

16. Le M.Q. Persistent homology of convection cycles in network flows / M.Q. Le // Physical Review E. — 2022. — Vol. 106. — Art. 034311.