

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, ДИНАМИКА МАШИН/THEORETICAL MECHANICS, MACHINE DYNAMICS

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.172.4> EDN: KEDELD

СТРУКТУРНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ: ДИНАМИЧЕСКОЕ КАЧЕСТВО РЕЗОНАНСА ВИБРОСТЕНДОВ

Научная статья

Елисеев А.В.^{1,*}, Кузнецов Н.К.², Миронов А.С.³¹ ORCID : 0000-0003-0222-2507;² ORCID : 0000-0002-3083-0182;³ ORCID : 0000-0002-0921-0915;^{1,3} Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Российская Федерация^{1,2} Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (eavsh[at]ya.ru)

Предложена: 19.06.2026; Принята: 24.09.2026; Опубликовано: 16.10.2026

Аннотация

Статья посвящена проблеме формирования динамического качества вибрационных технологических машин резонансного типа. Фактором, определяющим динамическое качество, служит эффект плато — стабилизация амплитуд колебаний рабочего органа в области резонансных частот. В рамках методологии структурного математического моделирования рассматривается задача оценки динамического состояния двухмассовой колебательной системы с учетом трения, которая служит моделью резонансных вибростендов.

Разрабатывается новый подход к формированию динамических состояний рабочего органа вибрационной машины в окрестности резонанса, представляющий собой развитие классического подхода Ден-Гартога к стабилизации двухмассовых вибрационных гасителей колебаний.

Вводится коэффициент интенсивности, позволяющий целенаправленно увеличивать или уменьшать амплитуды колебания рабочего органа в резонансной области частот. Выведены полные аналитические выражения нормализованных амплитудно-частотных характеристик, установлены координаты инвариантных узловых точек, не зависящих от демпфирования.

Получены формулы оптимального демпфирования для каждой координаты, показана невозможность одновременного выполнения условия «плато» для обеих масс. Для рассматриваемой двухмассовой механической колебательной системы установлена структурная независимость межпарциальной передаточной функции от массового отношения, что упрощает идентификацию параметров системы по экспериментальным данным.

Теоретическая значимость работы состоит в расширении аппарата нормализованных амплитудно-частотных характеристик на случай параметрической настройки амплитуд колебаний в области резонансных частот. Потенциал практической значимости аналитических результатов может заключаться в разработке основ адаптивного управления вибрационными машинами в условиях изменений параметров технологической нагрузки или вибрационных возбудителей.

Ключевые слова: структурное математическое моделирование, вибрационный стенд, гашение колебаний резонанса, двухмассовая система, нормализация, передаточные функции.

STRUCTURAL MATHEMATICAL MODELLING OF OSCILLATORY SYSTEMS: THE DYNAMIC QUALITY OF RESONANCE IN VIBRATION TEST BENCHES

Research article

Eliseev A.V.^{1,*}, Kuznetsov N.K.², Mironov A.S.³¹ ORCID : 0000-0003-0222-2507;² ORCID : 0000-0002-3083-0182;³ ORCID : 0000-0002-0921-0915;^{1,3} Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation^{1,2} Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russian Federation

* Corresponding author (eavsh[at]ya.ru)

Suggested: 19.06.2026; Accepted: 24.09.2026; Published: 16.10.2026

Abstract

The article examines the issue of determining the dynamic quality of resonance-type vibrating process machinery. The factor determining dynamic quality is the plateau effect — the stabilisation of the working body's vibration amplitudes in the region of resonance frequencies. Within the framework of structural mathematical modelling, the task of assessing the dynamic state of a two-mass oscillatory system, taking friction into account, is studied, which serves as a model for resonance vibration test benches.

A new approach is being developed to determine the dynamic states of the working element of a vibrating machine near resonance; it represents a further development of Den Hartog's classical approach to the stabilisation of two-mass vibration dampers.

An intensity coefficient is introduced, making it possible to selectively increase or decrease the oscillation amplitudes of the working element within the resonance frequency range. Complete analytical expressions for the normalised amplitude-frequency characteristics have been derived, and the coordinates of invariant nodal points, independent of damping, have been determined.

Formulae for optimal damping have been obtained for each coordinate, and it has been shown that it is impossible to satisfy the 'plateau' condition for both masses simultaneously. For the two-mass mechanical oscillatory system in question, the structural independence of the inter-particle transfer function from the mass ratio has been established, which simplifies the identification of the system's parameters from experimental data.

The theoretical significance of the work lies in the extension of the framework of normalised amplitude-frequency characteristics to the case of parametric tuning of vibration amplitudes in the resonance frequency range. The potential practical significance of the analytical results may lie in the development of the fundamentals of adaptive control of vibrating machinery under conditions of changing process load parameters or vibration exciters.

Keywords: structural mathematical modelling, vibration test bench, resonance vibration damping, two-mass system, normalisation, transfer functions.

Введение

Вибрационные технологические машины находят широкое применение при решении производственных задач в промышленности, строительстве и сельском хозяйстве [1], [2]. Характерными производственными процессами, активно использующими вибрационные эффекты, служат смешивание, грохочение, уплотнение, транспортирование сыпучих смесей или растворов, кусковых материалов, деталей, изделий и т.п.

Рост потребности обработки сырья с помощью вибрационных технологий в промышленных масштабах влечет существенное повышение энергоёмкости производственных процессов. Для снижения энергопотребления используют резонансные вибрационные машины, применение которых позволяет на порядок сокращать потребляемую мощность [3]. В современных условиях развитие таких систем тесно связано с концепцией Industry 4.0 и цифровыми подходами к мониторингу вибрационных воздействий [4].

Вместе с тем резонансные режимы работы вибрационных машин нестабильны при изменении параметров технологических нагрузок или частот внешних возмущений, являющиеся неотъемлемым условием широкого класса вибрационных технологических процессов обработки материалов или изделий. Для решения задачи повышения динамического качества вибрационных машин широкое распространение получила методология структурного математического моделирования [5], в рамках которой механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов в условиях вибрационного нагружения, сопоставляются эквивалентные в динамическом отношении структурные схемы систем автоматического управления, для оценки динамического состояния которых используются передаточные функции, в физическом смысле представляющие собой рычажные связи или динамические податливости. Методология структурного математического моделирования обладает существенным потенциалом интеграции в современные подходы в решении задач оптимизации динамических гасителей с использованием интеллектуальных алгоритмов [6].

Традиционный подход борьбы с нестабильностью резонансных режимов связан с методом формирования так называемого плато — эффекта выравнивания формы амплитудно-частотной характеристики в интервале между резонансами. Основой метода служит определение узловых точек, через которую проходит семейство амплитудно-частотных характеристик системы или межпарциальных связей [7], [8], [9]. Приближение производных к нулю в узловых точках позволяет определять режимы направленные на стабилизацию амплитуд колебаний в широком диапазоне частот. Вместе с тем найденный с помощью традиционного подхода режим не гарантирует, что в интервале между резонансными частотами не произойдет существенного уменьшения амплитуд колебания системы [10].

Целью исследования является разработка подходов к повышению стабильности работы резонансных режимов двухмассовых вибрационных технологических машин.

В качестве модельного вибрационного стенда рассматривается двухмассовый машинный агрегат с поступательной формой движения рабочего органа, вызванного колебаниями инерционного возбудителя. Первая масса представляет собой инерционный вибровозбудитель, колебания которого формируется путем противофазного вращения двух эксцентриков, создающих направленные вибрационные возмущения гармонической формы; вторая масса представляется собой рабочий орган. Предполагается, что рабочий орган и вибровозбудитель представляют собой вязко-упругую колебательную систему с сосредоточенными параметрами, совершающую малые колебания.

Ключевыми задачами исследования являются: разработка нормализованной математической модели вибрационной машины с учётом вязкого трения, работающей в режиме резонанса; вывод аналитических выражений безразмерных амплитудно-частотных характеристик передаточных функций системы и межпарциальных связей; отделение амплитудно-частотных характеристик, обеспечивающих более высокую стабильность колебаний в резонансной области, чем классический подход; разработка подхода, обеспечивающего возможность регулирования интенсивности колебания в области резонансных частот.

Математическая модель разрабатывается в рамках формализма уравнений Лагранжа 2-ого рода. Рассматривается классическая схема динамического гашения колебаний основной массы m_1 с помощью дополнительной массы m_2 , пружин k_1 , k_2 и демпфера b_2 (рис. 1). Внешнее гармоническое возмущение Q_1 приложено к основной массе m_1 . Данная расчетная схема также может быть использована для моделирования динамических особенностей вибрационных технологических машин резонансного типа [11], [12].

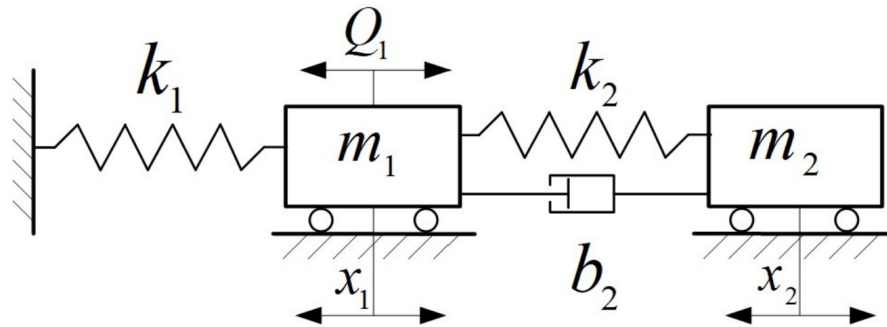


Рисунок 1 - Расчётная схема механической колебательной системы:

x_1, x_2 - обобщенные координаты, представляющие собой малые смещения относительно положения статического равновесия, Q_1 - внешнее гармоническое возмущение

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.172.4.1>

Кинетическая, потенциальная энергия и функция рассеивания имеют вид:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2, \quad \Phi = \frac{1}{2}b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2. \quad (1)$$

Уравнения Лагранжа второго рода принимают вид:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = Q(t), \quad m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0. \quad (2)$$

Применение интегрального преобразования Лапласа для системы дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода приводит к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} m_1p^2 + b_2p + k_1 + k_2 & -(k_2 + b_2p) \\ -(k_2 + b_2p) & m_2p^2 + b_2p + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

В рамках структурного подхода система алгебраических уравнений может быть представлена в виде структурной схемы, эквивалентной в динамическом отношении структурной схеме системы автоматического управления [4].

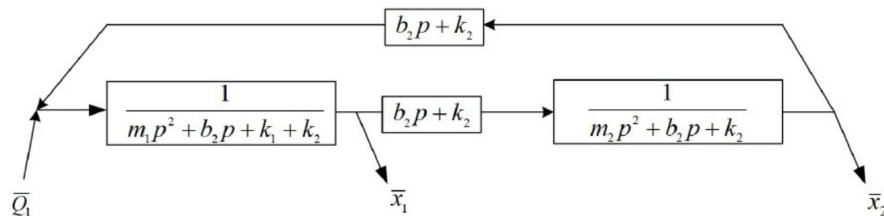


Рисунок 2 - Структурная схема к механической колебательной системе на (рис.1):

$p=j\omega$ - комплексная переменная; j - мнимая единица; ω - круговая частота

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.172.4.2>

Для нормализации математической модели вводятся безразмерные переменные:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad \Omega_c = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad f = \frac{\omega_a}{\Omega_c}, \quad g = \frac{\omega}{\Omega_c}, \quad \gamma = \frac{b_2}{2m_2\Omega_c}, \quad \omega_a = \sqrt{k_2/m_2}. \quad (4)$$

Выбор базовой частоты Ω_c основной массы и массы гасителя m_2 в знаменателе коэффициента приведённого демпфирования γ обусловлен классической методологией Ден-Гартога, обеспечивающей физическую интерпретируемость параметров, аналитическую простоту определения неподвижных точек, сопоставимость с классическими результатами и независимость частотной и диссипативной настроек.

Методы и принципы исследования

Исследование проводится в рамках методологии структурного математического моделирования, основанного на сопоставлении механической колебательной системе эквивалентную в динамическом отношении системы автоматического управления, что позволяет использовать аппарат передаточных функций. Амплитудно-частотные характеристики, используемые для оценки динамических состояний, в физическом смысле интерпретируются как рычажные связи и динамические податливости.

Для развития обобщённых представлений о состояниях механических колебательных систем используется нормализация математической модели — переход к безразмерным переменным. Определение параметров системы,

обеспечивающих повышение стабильности амплитуд колебаний, основано на использовании метода узловых точек, который заключается в определении двух общих или узловых точек для семейства амплитудно-частотных характеристик, зависящих от коэффициента приведенного трения.

Классический подход обеспечивает повышение стабильности амплитуд колебаний достигается за счёт таких параметров системы, для которых касательные к искомой амплитудно-частотной характеристике в узловых точках близки к горизонтальным прямым. В работе использован новый подход, основанный на определении амплитудно-частотной характеристики, которая дополнительно к тому, что она проходит через две узловые точки, также проходит через третью промежуточную точку на той же высоте. Анализ динамических состояний проведён с помощью амплитудно-частотных характеристик двух координат и межпарциальной связи, что согласуется с современными подходами к динамическому гашению колебаний и введению дополнительных связей [13].

Основные результаты

1. Получены аналитические выражения нормализованных амплитудно-частотных характеристик двухмассовой системы с вязким демпфированием. Выведены формулы для амплитудно-частотных характеристик первой и второй координат, а также межпарциальной передаточной функции в безразмерном виде, что позволило явно выразить зависимость амплитуд от безразмерной частоты возмущения, массового отношения, отношения собственных частот и коэффициента вязкого трения.

$$A_1^2(g) = \frac{(2\gamma\mu g)^2 + [\mu(f^2 - g^2)]^2}{[2g\gamma\mu(-g^2\mu - g^2 + 1)]^2 + [-f^2g^2\mu^2 - f^2g^2\mu + g^4\mu + \mu f^2 - \mu g^2]^2}, \quad (5)$$

$$A_2^2(g) = \frac{f^4\mu^2 + 4\gamma^2\mu^2g^2}{[-2g^3\gamma\mu(\mu+1) + 2\gamma\mu g]^2 + [-f^2g^2\mu(\mu+1) + g^4\mu + \mu f^2 - \mu g^2]^2}, \quad (6)$$

$$A_{12}^2 = \frac{f^4 - 2f^2g^2 + g^4 + 4\gamma^2g^2}{f^4 + 4\gamma^2g^2}. \quad (7)$$

2. Установлено, что амплитудно-частотные характеристики могут быть определены из условий прохождения через среднюю точку с амплитудой, совпадающей с амплитудой в узловых точках. Данная амплитудно-частотная характеристика обеспечивает лучшее динамическое качество по сравнению с классическим вариантом.

3. Введён коэффициент интенсивности ε как параметр дополнительной настройки динамического качества. Коэффициент интенсивности ε определяет отклонение высоты амплитудно-частотной характеристики промежуточной частоте g_0 от высоты в узловых точках (в частотах g_1, g_2):

$$A_1(g_1)(1 + \varepsilon) = A_1(g_0) = A_1(g_2)(1 + \varepsilon), \quad (8)$$

при $\varepsilon > 0$ реализуется усиление колебаний, при $\varepsilon < 0$ — ослабление. Это расширяет классический подход «плато» и позволяет целенаправленно формировать динамическое качество резонансных режимов.

4. Выведены формулы оптимального демпфирования для параметрической трёхточечной настройки.

Для первой координаты:

$$\gamma_{1,pts}^2(\varepsilon) = \frac{\mu^2(\mu+1)^3 + \varepsilon\mu(\mu+2)(\mu+1)^3 + \varepsilon^2\mu(\mu+2)^4}{(\mu+1)^3}. \quad (9)$$

Для второй координаты:

$$\gamma_{2,pts}^2(\varepsilon) = \frac{2\mu - \mu^2}{4(\mu+1)^3} + \varepsilon \frac{2}{(\mu+1)^3} + \varepsilon^2 \frac{4}{(\mu+1)^3}. \quad (10)$$

Установлено, что условие «плато» может быть обеспечено либо для первой, либо для второй координаты, но не одновременно для обеих.

Условие реализации «плато» для первой координаты:

$$f = \frac{1}{\mu+1}, \gamma^2 = \frac{\mu}{2(\mu+1)^3}. \quad (11)$$

Условие реализации «плато» для второй координаты:

$$f^2 = \frac{1-\mu}{(\mu+1)^2}, \quad \gamma^2 = \frac{-\mu^2+2\mu}{4(\mu+1)^3}, \quad \mu \leq 1. \quad (12)$$

Несовместность данных условий доказывает невозможность реализации одновременного «плато» для двух координат.

5. Получены аналитические выражения межпарциальных связей в средней точке настройки.

Для условий плато, выполненного для первой координаты:

$$A_{12}^2(\varepsilon)_{(A_1-plato)} = \frac{(1+\varepsilon)^2(\mu+2)\mu}{1+(\varepsilon^2+2\varepsilon)\mu^2+2(1+\varepsilon)^2\mu}. \quad (13)$$

Для условий плато, выполненного для второй координаты:

$$A_{12}^2(\varepsilon)_{(A_2-plato)} = \frac{3\mu^2+\varepsilon^2+2\mu+2\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} \quad (14)$$

Данные характеристики позволяют связывать экспериментальные данные по отношению амплитуд колебаний рабочего органа и вибровозбудителя с параметрами системы [14].

6. Установлена структурная независимость межпарциальной передаточной функции от массового отношения.

Исследования показали, что межпарциальная передаточная функция обладает свойствами, позволяющими использовать её как инструмент идентификации параметров вибрационной машины по экспериментальным данным [15].

7. Подтверждена применимость методологии для параметрического синтеза систем.

Переход от «точечной» настройки под конкретный режим к параметрической настройке с использованием критерия «плато» и инвариантных точек обеспечивает устойчивость динамического качества к изменению параметров среды без ручной переналадки оборудования [16].

На рис. 3 и рис. 4 представлены характерные амплитудно-частотные характеристики для координат x_1 и x_2 , построенные для массового параметра 0.1, для которых реализуется соответствующее условие «плато».

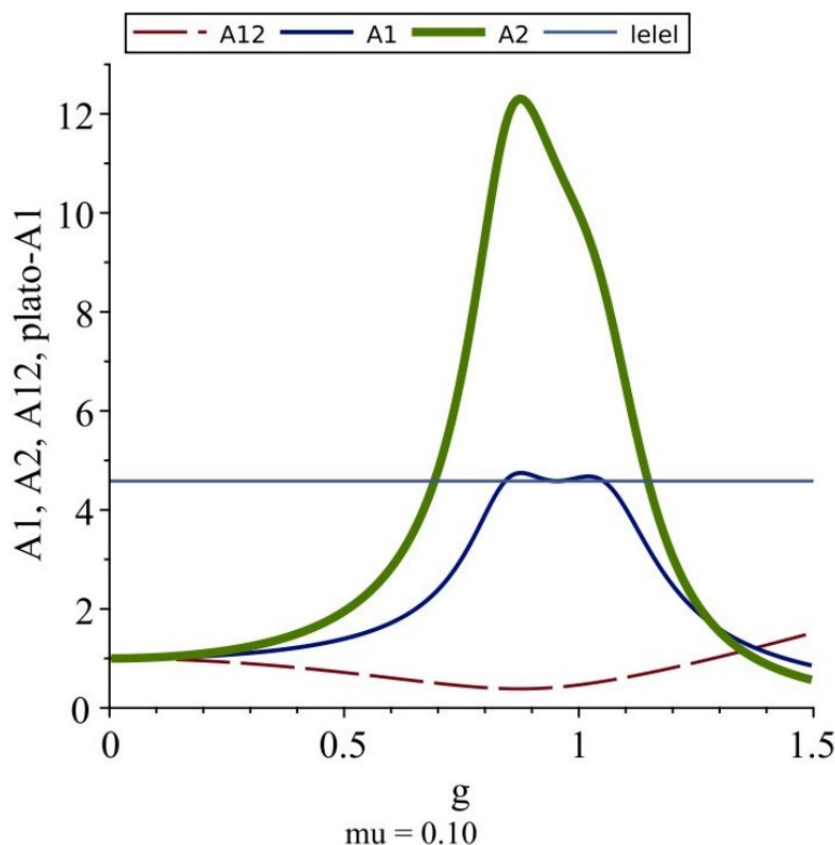


Рисунок 3 - Амплитудно-частотные характеристики, при условии реализации «плато» для первой координаты
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.172.4.3>

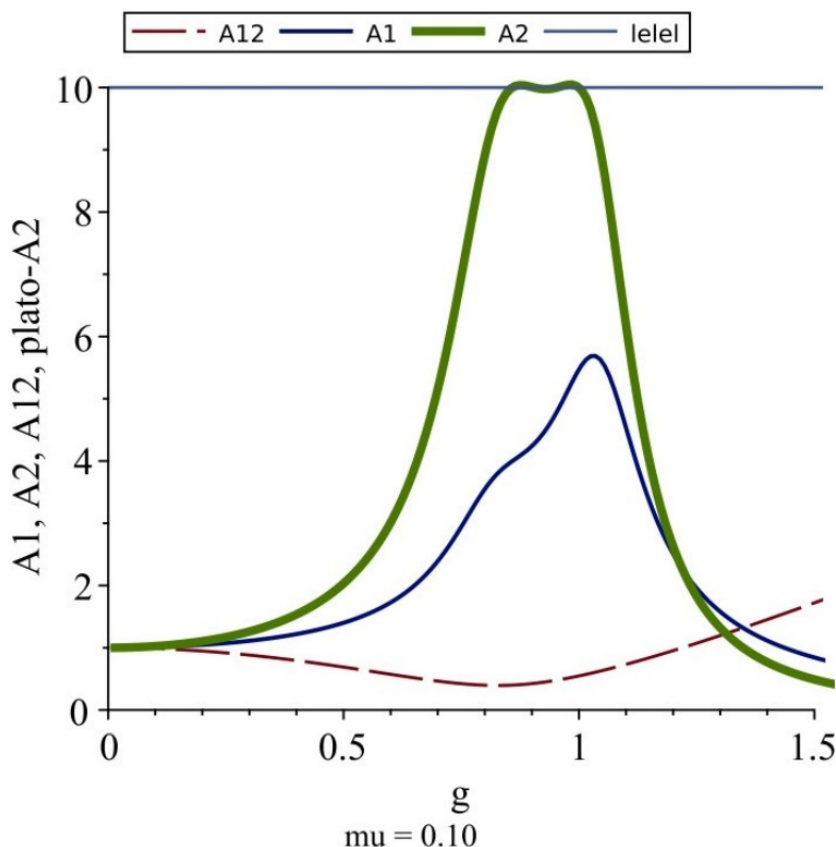


Рисунок 4 - Амплитудно-частотные характеристики, при условии реализации «плато» для второй координаты
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.172.4.4>

Обсуждение

Проведённые исследования могут быть условно разделены на три части. Первая часть носит формальный характер воспроизведения результатов полученных Ден-Гартогом. Вторая часть связана с ведением новых условий для определения эффективной формы амплитудно-частотная характеристики, обеспечивающей пологость, а значит стабильность динамического процесса колебаний системы в окрестности резонанса. Показано, что данную характеристику можно использовать как регулятор. Необходимо отметить, что речь идёт фактически о выборе критерия динамического качества процесса в режиме резонанса. Критерий может быть достаточно простым, представляя собой точечное отклонение значений амплитудно-частотных характеристик на величину параметра интенсивности, а может быть представлен и достаточно сложной интегральной метрикой, зависящий от функции и её производных. Подобная метрика определяется уровнем требований к динамическому качеству. Третья часть связана с анализом динамических состояний механической колебательной системы с помощью трёх амплитудно-частотных характеристик с учетом требований к выполнению условий плато. Анализ динамического качества в свою очередь сводится к возможности реализации плато для каждой из координат, а также к определению особенностей, представляющих интерес для работы вибрационно-технологических машин. Полученные результаты имеют ограничения: линейная двухмассовая модель с вязким трением не учитывает нелинейные элементы, в при переходе к системам с несколькими степенями свободы требует учета связей характера трения между различными элементами системы; анализ проведён для моногармонического возмущения; условие «плато» при общих допущениях не выполняется одновременно для обеих координат; формулы демпфирования чувствительны к ошибкам определения масс.

Заключение

Классический метод Ден-Гартога стабилизации колебаний в резонансном режиме изначально ориентирован на разработку эффективного динамического гасителя колебаний. Вместе с тем подходы, заложенные Ден-Гартогом, могут быть распространены на задачи проектирования вибрационных технологических машин, расчётные схемы которых эквивалентны схемам двухмассовых гасителей колебаний. Способ локального выравнивания амплитудно-частотной характеристик только за счет выбора параметров механической системы представляет интерес для широкого класса технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагружений. В работе представлен вариант развития подхода Ден-Гартога на примере системы с двумя степенями свободы и одним демпфером. Можно полагать, что общий способ повышения эффективности заключается в разработке обобщённого критерия динамического качества, позволяющего выбирать наилучшие амплитудно-частотные характеристики из множества допустимых исходя из специфики задачи. Данный подход может быть обобщён на расчётные схемы механических колебательных системы с



тремя и более степенями свободы, что создаёт методологическую основу для решения задач синтеза резонансных режимов работы вибрационных технологических машин с заданным динамическим качеством.

Перспективы развития включают: переход к стохастическим возмущениям, распространение на вращательные движения, экспериментальную верификацию метода идентификации параметров, интеграцию с Industry 4.0 для создания самонастраивающихся машин.

Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору Иркутского национального исследовательского технического университета Зедгенизову Виктору Георгиевичу. Научные консультации и ценные замечания, полученные в ходе обсуждений с ним, позволили авторам обратиться к проблеме «плато» амплитудно-частотных характеристик и сосредоточиться на её анализе, что в конечном счёте способствовало раскрытию динамического качества вибрационных технологических машин резонансного типа.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Деменченко О.Г., Восточно-Сибирский институт Министерства внутренних дел Российской Федерации, Иркутск Российская Федерация
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.172.4.5>

Acknowledgement

The authors express their sincere gratitude to Professor Zedgenizov Viktor Georgievich of Irkutsk National Research Technical University. The scientific advice and valuable comments received during discussions with him made it possible for the authors to address the issue of the 'plateau' in the amplitude-frequency characteristics and to focus on its analysis, which ultimately contributed to a better understanding of the dynamic behaviour of resonance-type vibrating process machinery.

Conflict of Interest

None declared.

Review

Demenchenok O.G., East-Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of the Russian Federation, Irkutsk Russian Federation
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.172.4.5>

Список литературы / References

1. Крюков Б.И. Динамика вибрационных машин резонансного типа / Б.И. Крюков. — Киев: Наукова думка, 1967. — 208 с.
2. Лавендел Э.Э. Вибрации в технике: Вибрационные процессы и машины: в 6 т / Э.Э. Лавендел. — Москва: Машиностроение, 1981. — Т. 4. — 509 с.
3. Альтшуль Г.М. Динамика резонансной вибромашины с равночастотной подвеской рабочего органа и дебалансным возбудителем колебаний / Г.М. Альтшуль, А.М. Гуськов, Г.Я. Пановко // Обогащение руд. — 2022. — № 1. — С. 51–55.
4. Darabont D.C. Digital Approaches for Mitigating Occupational Vibration Exposure in the Context of Industry 4.0 / D.C. Darabont, L.-I. Cioca, D.O. Badea // Safety. — 2025. — № 11. — P. 31. — DOI: 10.3390/safety11020031
5. Eliseev S.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects / S.V. Eliseev, A.V. Eliseev. — Cham: Springer International Publishing, 2020. — 521 p.
6. Shamseldin A. AI-driven optimization of dynamic vibration absorbers with hydraulic amplifier and mechanical inerter integration / A. Shamseldin, M.A. Abido, A. Alofi // Front. Mech. Eng.. — 2024. — № 10. — P. 1464692. — DOI: 10.3389/fmech.2024.1464692
7. Ден-Гартог Дж.П. Механические колебания / Дж.П. Ден-Гартог. — Москва: ГИФМЛ, 1960. — 580 с.
8. Panovko G. Resonant adjustment of vibrating machines with unbalance vibroexciter. Problems and solutions / G. Panovko // Smart Innovation, Systems and Technologies. — 2020. — № 154. — P. 51–62.
9. Зедгенизов В.Г. Исследование влияния основных параметров двухмассовой колебательной системы на её динамические характеристики / В.Г. Зедгенизов, С.Х. Файзов // iPolytech Journal. — 2022. — № 26. — С. 164–172. — DOI: 10.21285/1814-3520-2022-2-164-172.
10. Han Y-X. Dynamic behavior of a two-mass nonlinear fractional-order vibration system / Y-X. Han, J-X. Zhang, Y-L. Wang // Front. Phys.. — 2024. — № 12. — P. 1452138. — DOI: 10.3389/fphy.2024.1452138
11. Svyshch T. Modeling the operation of an eccentric-pendulum resonant vibration stand for testing aviation industry products / T. Svyshch // Vibroengineering Procedia. — 2025. — № 59. — P. 34–40. — DOI: 10.21595/vp.2025.25064
12. Kapalo R. Mathematical modeling of the operation of a resonant vibration stand with an inertial exciter and hydraulic coupling for testing aviation industry products / R. Kapalo // Vibroengineering Procedia. — 2025. — № 59. — P. 28–33. — DOI: 10.21595/vp.2025.25059
13. Елисеев С.В. Динамическое гашение колебаний: введение дополнительных связей, рычажные взаимодействия и физические эффекты / С.В. Елисеев, В.Б. Кашуба, Н.Ж. Кинаш // Вестник Иркутского государственного технического университета. — 2017. — № 21. — С. 10–23.
14. Lyan I.P. Estimated Parameters of the Elastic Suspension of a Resonant Vibration Machine. / I.P. Lyan, G.Y. Panovko, A.E. Shokhin // J. Mach. Manuf. Reliab. — 2025. — № 54. — P. 703–712. — DOI: 10.1134/S1052618825700323
15. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles / A.V. Eliseev. — Hershey: IGI Global, 2023. — 288 p. doi: 10.4018/978-1-6684-7237-8
16. Tian Q. The damping of the dynamic vibration absorber / Q. Tian // Sci Rep. — 2025. — № 15. — P. 1391. — DOI: 10.1038/s41598-025-98320-5

Список литературы на английском языке / References in English

1. Kryukov B.I. Dinamika vibracionny'x mashin rezonansnogo tipa [Dynamics of resonant-type vibration machines] / B.I. Kryukov. — Kiev: Naukova dumka, 1967. — 208 p. [in Russian]
2. Lavendel E.E. Vibratsii v tekhnike [Vibrations in Engineering]: Vibrational Processes and Machines: in 6 vol / E.E. Lavendel. — Moscow: Mashinostroenie, 1981. — Vol. 4. — 509 p. [in Russian]
3. Al'tshul' G.M. Dinamika rezonansnoj vibromashiny' s ravnochastotnoj podveskoj rabocheho organa i debalansny'm vzbuditelem kolebanij [Dynamics of a resonant vibration machine with equal-frequency suspension of the working body and unbalance vibration exciter] / G.M. Al'tshul', A.M. Gus'kov, G.Ya. Panovko // Ore Beneficiation. — 2022. — № 1. — P. 51–55. [in Russian]
4. Darabont D.C. Digital Approaches for Mitigating Occupational Vibration Exposure in the Context of Industry 4.0 / D.C. Darabont, L.-I. Cioca, D.O. Badea // Safety. — 2025. — № 11. — P. 31. — DOI: 10.3390/safety11020031
5. Eliseev S.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects / S.V. Eliseev, A.V. Eliseev. — Cham: Springer International Publishing, 2020. — 521 p.
6. Shamseldin A. AI-driven optimization of dynamic vibration absorbers with hydraulic amplifier and mechanical inerter integration / A. Shamseldin, M.A. Abido, A. Alofi // Front. Mech. Eng.. — 2024. — № 10. — P. 1464692. — DOI: 10.3389/fmech.2024.1464692
7. Den-Gartog Dzh.P. Mexanicheskie kolebaniya [Mechanical Vibrations] / Dzh.P. Den-Gartog. — Moscow: GIFML, 1960. — 580 p. [in Russian]
8. Panovko G. Resonant adjustment of vibrating machines with unbalance vibroexciter. Problems and solutions / G. Panovko // Smart Innovation, Systems and Technologies. — 2020. — № 154. — P. 51–62.
9. Zedgenizov V.G. Issledovanie vliyaniya osnovny'x parametrov dvuxmassovoj kolebatel'noj sistemy' na ee dinamicheskie xarakteristiki [Influence of the main parameters of a dual-mass oscillation system on its dynamic characteristics] / V.G. Zedgenizov, S.X. Fajzov // iPolytech Journal. — 2022. — № 26. — P. 164–172. — DOI: 10.21285/1814-3520-2022-2-164-172. [in Russian]
10. Han Y-X. Dynamic behavior of a two-mass nonlinear fractional-order vibration system / Y-X. Han, J-X. Zhang, Y-L. Wang // Front. Phys.. — 2024. — № 12. — P. 1452138. — DOI: 10.3389/fphy.2024.1452138
11. Svyshch T. Modeling the operation of an eccentric-pendulum resonant vibration stand for testing aviation industry products / T. Svyshch // Vibroengineering Procedia. — 2025. — № 59. — P. 34–40. — DOI: 10.21595/vp.2025.25064
12. Kapalo R. Mathematical modeling of the operation of a resonant vibration stand with an inertial exciter and hydraulic coupling for testing aviation industry products / R. Kapalo // Vibroengineering Procedia. — 2025. — № 59. — P. 28–33. — DOI: 10.21595/vp.2025.25059
13. Eliseev S.V. Dinamicheskoe gashenie kolebanij: vvedenie dopolnitel'ny'x svyazej, ry'chazhny'e vzaimodejstviya i fizicheskie e'ffekty' [Dynamic vibration damping: introduction of additional constraints, lever interactions and physical effects] / S.V. Eliseev, V.B. Kashuba, N.Zh. Kinash // Bulletin of Irkutsk State Technical University. — 2017. — № 21. — P. 10–23. [in Russian]
14. Lyan I.P. Estimated Parameters of the Elastic Suspension of a Resonant Vibration Machine. / I.P. Lyan, G.Y. Panovko, A.E. Shokhin // J. Mach. Manuf. Reliab. — 2025. — № 54. — P. 703–712. — DOI: 10.1134/S1052618825700323
15. Eliseev A.V. Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles / A.V. Eliseev. — Hershey: IGI Global, 2023. — 288 p. doi: 10.4018/978-1-6684-7237-8
16. Tian Q. The damping of the dynamic vibration absorber / Q. Tian // Sci Rep. — 2025. — № 15. — P. 1391. — DOI: 10.1038/s41598-025-98320-5