

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА/STRUCTURAL MECHANICS

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.171.50> EDN: BVYFKR

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ КОССЕРА ПО КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ С ИЗВЕСТНЫМИ КЛАССИЧЕСКИМИ ЖЕСТКОСТЯМИ

Научная статья

Головченко Ю.Ю.^{1,*}, Лалин В.В.²¹ORCID : 0000-0003-2980-2173;²ORCID : 0000-0003-3850-424X;^{1,2} Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (yurijgolovchenko99[at]gmail.com)

Предложена: 27.05.2026; Принята: 04.09.2026; Опубликовано: 17.09.2026

Аннотация

В статье рассматривается аналитический метод оценки постоянных линейной изотропной среды Коссера по краевым задачам с известными классическими жесткостями. В качестве базовых задач выбраны кручение прямоугольного бруса, антикластический и синкластический осесимметричный изгиб круглой тонкой пластины. Для каждой из рассмотренных задач построены аналитические вилки жесткости системы. Верхняя оценка определялась при помощи вариационного принципа Лагранжа, а нижняя при помощи вариационного принципа Кастильяно. Сопоставляя полученные оценки с жесткостью системы из классической теории упругости, были получены замкнутые вилки, чувствительные к разным наборам постоянных микрополярной среды. Доказано, что выбранные краевые задачи позволяют сформировать замкнутую аналитическую систему, из которой возможно определить диапазоны допустимых значений для постоянных микрополярной среды ($\alpha, \beta, \gamma, \kappa$).

Ключевые слова: среда Коссера, микрополярная среда, кручение бруса, антикластический изгиб, синкластический изгиб, параметры среды Коссера.

EVALUATION OF THE PARAMETERS OF COSSERAT LINEAR ISOTROPIC MEDIUM USING BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH KNOWN CLASSICAL STIFFNESSES

Research article

Golovchenko Y.Y.^{1,*}, Lalin V.V.²¹ORCID : 0000-0003-2980-2173;²ORCID : 0000-0003-3850-424X;^{1,2} Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation

* Corresponding author (yurijgolovchenko99[at]gmail.com)

Suggested: 27.05.2026; Accepted: 04.09.2026; Published: 17.09.2026

Abstract

The article examines an analytical method for assessing the constants of a linear isotropic Cosserat medium using boundary value problems with known classical stiffnesses. The basic problems selected are the twisting of a rectangular beam, and the anticlastic and synclastic axisymmetric bending of a thin circular plate. For each of the studied problems, analytical stiffness ranges of the system have been constructed. The upper estimate was determined using Lagrange's variational principle, and the lower estimate using Castigliano's variational principle. By comparing the obtained evaluations with the system stiffness from classical elasticity theory, closed-form ranges were obtained that are sensitive to different sets of constants of a micropolar medium. It has been proven that the selected boundary value problems allow the formation of a closed analytical system, from which it is possible to determine the ranges of admissible values for the constants of the micropolar medium ($\alpha, \beta, \gamma, \kappa$).

Keywords: Cosserat medium, micropolar medium, twisting of a beam, anticlastic bending, synclastic bending, Cosserat medium parameters.

Введение

Материалы с хорошо выраженной микро- или макроструктурой, очень часто могут проявлять свойства, которые плохо описываются классической теорией упругости. К таким эффектам можно отнести локальные повороты частиц материала, моментные напряжения или же масштабные эффекты для интегральных характеристик образцов. Наиболее естественным будет использование среды Коссера (или же микрополярной среды) для описания подобных явлений. В ней наряду с полем перемещений учитывается также поле микроповоротов, что позволяет хорошо описывать не только обобщенное поведение материала, но и локальные эффекты, возникающие от взаимодействия его частиц [1], [2]. Использование среды Коссера позволяет учесть не только микроструктуру материала, но и возникающие за счет нее масштабные эффекты, которые напрямую влияют на деформационный отклик тела, что невозможно при использовании классической теории упругости [3], [4].

Значительный интерес к микрополярной среде в современной науке, обусловлен необходимостью создания корректных математических моделей для ячеистых материалов, композитов, пен, трещиноватых горных пород и

гранулированных сред. Так, в работах Z. Rueger и R.S. Lakes [5], [6], [7], C. Atkinson, C.D. Coman и J. Aldazabal [8], R. Abreu и S. Durand [9] авторы указывают, что при деформациях кручения и изгиба образцов, у которых хотя бы один характерный размер сопоставим с размером ячейки микроструктуры, микрополярные эффекты становятся весьма ощутимыми. Например, образцы в виде тонкого стержня, давали значительно большую жесткость на изгиб и кручение, чем предполагалось из классической теории упругости. В работах [6], [7], [8] дополнительно были экспериментально получены зависимости интегральных характеристик от характерного размера микроструктуры.

В отечественной науке также активно ведутся исследования в данной области. Рассматриваются как общие постановки для среды Коссера, так и ее использование, применительно к стержневым и континуальным моделям среды. Так, в статье [10], А.А. Илюхин и Д.В. Тимошенко рассматривают среду Коссера, применительно к стержневым моделям. В работах Ю.Н. Радаева [11], В.В. Корепанова и соавторов [12] рассматриваются вариационные и ковариантные формулировки микрополярной среды, а также численные и аналитические решения различных задач с использованием среды Коссера. Отдельно стоит отметить труды И.Ю. Смолина [13], А.В. Романова [14], В.Н. Аптукова М.А. Барулиной [15]. В них описаны исследования, направленные на определение констант среды Коссера, через их связь с некоторыми интегральными механическими величинами. Эти работы хорошо показывают, что проблемы, связанные с определением констант среды Коссера, являются актуальными не только для теоретического, но и для прикладного развития науки.

Несмотря на значительное количество теоретических исследований, задача определения констант среды Коссера все еще является наиболее актуальной, ввиду ее значительной трудоемкости. Как было отмечено в обзорной статье S. Hassanpour и G.R. Herpler [4], реальных экспериментальных данных об определении констант среды Коссера не так много, а степень их достоверности сильно варьируется. Это связано напрямую с высокой сложностью проведения самих экспериментов, а также их значительной чувствительности к постановке испытания. С другой стороны, комбинация аналитического и экспериментального подходов, может позволить существенно облегчить как формирование постановки эксперимента, так и его верификацию [5], [7], [14].

В данной работе рассматривается аналитический подход к оценке констант среды Коссера, который основан на решении краевых задач с известными классическими жесткостями. Фактически, определяется допустимая область значений, которые могут принимать постоянные микрополярной среды (α , β , γ , κ). В статье рассматриваются три задачи: кручение прямоугольного бруса, антикластический и синкластический изгиб тонкой круглой пластины. Такой выбор краевых задач напрямую связан с тем, что они рассматривают различные типы деформационного состояния и структуру тензора кривизны среды Коссера. Так, задача кручения описывает сдвиговые деформации и позволяет оценить вклад антисимметричной части, а также связанных с ней моментных эффектов (что соответствует комбинации (κ , $2\alpha + \gamma$)). Изгибные задачи чувствительны к параметру κ и моментным постоянным α и β . Однако в общем случае, эти постоянные входят в энергетические выражения в виде связанных комбинаций. Следовательно, для их разделения необходимо использовать постановки с различной структурой тензора кривизны. Антикластический и синкластический изгиб являются частными случаями деформации изгиба с разной структурой ненулевых компонент тензора кривизны. Тем самым они позволяют выделить более простые комбинации: (κ , α) и (κ , β), соответственно. Таким образом, выбранные задачи образуют минимальный необходимый набор постановок для построения замкнутой системы аналитических ограничений на постоянные среды Коссера.

Целью исследования является вывод аналитических вилок для констант среды Коссера через краевые задачи с известными классическими жесткостями. Для достижения цели формируются соответствующие постановки, через которые определяются верхние и нижние оценки жесткости системы, после чего выполняется их сопоставление с эталонными классическими жесткостями систем. Из систем неравенств определяются итоговые вилки для параметров α , β , γ , κ .

Методы и принципы исследования

2.1. Основные математические соотношения модели среды

В статье рассматривается линейная изотропная среда Коссера в трехмерной постановке. Ее кинематическое состояние описывается через вектор перемещений (1) и вектор микроповоротов (2).

$$u = (u_1, u_2, u_3)^T \quad (1)$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \quad (2)$$

Симметричная и антисимметричная части вектора компонент тензора деформаций, а также вектор компонент тензора кривизны записываются в виде (3-5).

$$\varepsilon^S = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})^T \quad (3)$$

$$\varepsilon^A = (w_1, w_2, w_3)^T \quad (4)$$

$$\rho = (\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{21}, \rho_{22}, \rho_{23}, \rho_{31}, \rho_{32}, \rho_{33})^T \quad (5)$$

Геометрические соотношения записываются в виде (6–8) [4], [10].

$$\varepsilon^S = A_1 u \quad (6)$$

$$\rho = A_2 \varphi \quad (7)$$

$$\varepsilon^A = A_3 u - 2\varphi \quad (8)$$

где A_1, A_2, A_3 – матрицы дифференцирования (9-11) [16].

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dy} & 0 & \frac{d}{dx} & 0 & \frac{d}{dz} \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} \end{pmatrix}^T \quad (9)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 & \frac{d}{dy} & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 0 & 0 & \frac{d}{dy} & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} & 0 & 0 & \frac{d}{dy} & 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{pmatrix}^T \quad (10)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{d}{dz} & \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dz} & 0 & -\frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dy} & \frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix}^T \quad (11)$$

Симметричная и антисимметричная части вектора компонент тензора напряжений, а также вектор компонент тензора моментных напряжений записываются в виде (12-14) [4], [10].

$$\sigma^S = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T \quad (12)$$

$$\sigma^A = (T_1, T_2, T_3)^T \quad (13)$$

$$M = (M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33})^T \quad (14)$$

Уравнения равновесия записываются в виде (15, 16).

$$A_1^T \sigma^S + A_3^T \sigma^A + K = 0 \quad (15)$$

$$A_2^T M + 2\sigma^A + e = 0 \quad (16)$$

где K, e — векторы объемных сил и объемных моментов соответственно. Во всех задачах, рассмотренных в работе, исследовались постановки при $K = 0, e = 0$.

Физические соотношения можно записать в виде (17–19) [4], [10].

$$\sigma^S = D \varepsilon^S \quad (17)$$

$$\sigma^A = B \varepsilon^A \quad (18)$$

$$M = C \rho \quad (19)$$

Где D — классическая матрица упругих констант Ламе; B — матрица, характеризующая связь антисимметричной части деформаций с антисимметричной частью напряжений через постоянную κ ; C — матрица, содержащая дополнительные постоянные среды Коссера α, β, γ .

Плотность потенциальной энергии определяется по формуле (20).

$$W = \frac{1}{2} (\varepsilon^S)^T D \varepsilon^S + \frac{1}{2} (\varepsilon^A)^T B \varepsilon^A + \frac{1}{2} \rho^T C \rho \quad (20)$$

Через напряжения плотность потенциальной энергии записывается в виде выражения (21).

$$W^* = \frac{1}{2} (\sigma^S)^T D^{-1} \sigma^S + \frac{1}{2} (\sigma^A)^T B^{-1} \sigma^A + \frac{1}{2} (M)^T C^{-1} M \quad (21)$$

2.2. Принцип построения аналитических вилок для постоянных среды Коссера

Для рассматриваемых в работе задач строятся две оценки жесткости системы. Верхняя оценка определяется через вариационный принцип Лагранжа, на основе выбранного кинематически допустимого анзаца. Для этого задается некоторое поле перемещений и микроповоротов, которое удовлетворяет выбранным кинематическим граничным условиям задачи. Из геометрических соотношений, определяются векторы деформаций $\varepsilon^S, \varepsilon^A, \alpha$. Далее определяется плотность потенциальной энергии W . После интегрирования по объему тела, определяется полная потенциальная энергия Π . При наличии в анзаце некоторого внутреннего параметра, по нему выполняется минимизация потенциальной энергии. Из минимума потенциальной энергии Π определяется верхняя оценка жесткости для рассматриваемой задачи.

Нижняя оценка жесткости системы определяется при помощи вариационного принципа Кастильяно, для чего выбирается некоторый статически допустимый анзац, включающий в себя σ^S, σ^A, M . Выбранный анзац должен

удовлетворять уравнениям равновесия, а также силовым и моментным условиям на границах. После проверки статической допустимости, определяется плотность потенциальной энергии W^* , а после ее интегрирования по объему — потенциальная энергия Π^* . Через обобщенную силовую или моментную реакцию, определяется связь между выбранными параметрами анзаца и некоторой интегральной характеристикой нагружения. После минимизации Π^* , определяется нижняя оценка жесткости системы.

Таким образом, для каждой задачи может быть получена аналитическая вилка оценки жесткости системы. Так как в работе рассматриваются задачи, для которых известны жесткости из классической теории упругости, общий вид вилки можно записать в виде (22).

$$K_{\text{низ}} \leq K_{\text{эталон}} \leq K_{\text{верх}} \quad (22)$$

где $K_{\text{эталон}}$ — жесткость рассматриваемой системы из классической теории упругости.

Благодаря такому сопоставлению появляется возможность получить систему ограничений на постоянные среды Коссера.

Подход, который используется в статье, опирается на тот факт, что классическая эталонная жесткость имеет ясный механический смысл и известна независимо от дополнительных постоянных среды Коссера. Благодаря этому, отклонение жесткости системы в микрополярной постановке, от эталонного значения, позволяет определить диапазоны возможных значений, которые могут принимать постоянные микрополярной среды.

Основные результаты

3.1. Кручение бруса

В задаче рассматривается прямоугольный параллелепипед $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3): -a \leq x_1 \leq a, -b \leq x_2 \leq b, -c \leq x_3 \leq c\}$. Принята ортогональная система координат (x_1, x_2, x_3) , кручение происходит вокруг оси x_1 .

Эталонная классическая жесткость для такой задачи кручения определяется по формуле (23) [17].

$$K_{\text{к}}^{\text{эталон}} = \frac{8\mu bc(b^2 + c^2)}{3} \quad (23)$$

где μ — модуль сдвига.

В качестве кинематических граничных условий принято поле перемещений, которое соответствует кручению с некоторой интенсивностью θ : $u_1 = 0$, $u_2 = -\theta \cdot x_1 \cdot x_3$, $u_3 = \theta \cdot x_1 \cdot x_2$ на $d\Omega$. Для микроповоротов принимается условие свободной поверхности по граням.

Для верхней оценки принимается кинематически допустимый анзац (24).

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -\theta x_1 x_3 \\ \theta x_1 x_2 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} qx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

где θ — заданная интенсивность кручения; q — внутренний параметр анзаца.

По выбранной методике вычисляется верхняя оценка крутильной жесткости (25).

$$K_{\text{к}}^{\text{верх}} = 4bc \left(\frac{2\mu + \kappa}{3} (b^2 + c^2) + \frac{4a^2 \kappa (2\alpha + \gamma)}{8a^2 \kappa + 3(2\alpha + \gamma)} \right) \quad (25)$$

Для нижней оценки принимается статически допустимый анзац (24).

$$\sigma^S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -sx_3 \\ sx_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^A = \begin{pmatrix} -lx_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} l(x_1^2 - a^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

где s, l — параметры статически допустимого анзаца.

По выбранной методике определяется нижняя оценка крутильной жесткости (27).

$$K_{\text{к}}^{\text{низ}} = 4bc \left(\frac{4a^4}{9 \left(\frac{3a^4}{15(2\alpha + \gamma)} + \frac{a^2}{3\kappa} \right)} + \frac{\mu(c^2 + b^2)}{3} \right) \quad (27)$$

3.2. Антикластический изгиб тонкой круглой пластины

В задаче рассматривается тонкая круглая пластина с радиусом R и толщиной h $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 \leq R, -h/2 \leq x_3 \leq h/2\}$. Для системы принимается ортогональная система координат (x_1, x_2, x_3) , где x_1, x_2 — лежат в плоскости пластины, x_3 — перпендикулярная плоскости пластины.

Эталонная классическая жесткость для такой задачи кручения определяется по формуле (28) [18].

$$K_{\text{антик}}^{\text{эталон}} = \frac{4\pi}{3} \mu R^2 h^3 \quad (28)$$

В качестве кинематических граничных условий принимается поле перемещений, которое соответствует антикластическому изгибу с некоторой интенсивностью θ : $u_1 = -2 \cdot \theta \cdot x_2 \cdot x_3$, $u_2 = -2 \cdot \theta \cdot x_1 \cdot x_3$, $u_3 = 2 \cdot \theta \cdot x_1 \cdot x_2$ на $d\Omega$. Для микроповоротов принимается условие свободной поверхности по всем граням.

Для получения верхней оценки выбирается кинематически допустимый анзац (29).

$$u = \begin{pmatrix} -2\theta x_2 x_3 \\ -2\theta x_1 x_3 \\ 2\theta x_1 x_2 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} qx_1 \\ -qx_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

где θ — заданная интенсивность антикластического изгиба; q — внутренний параметр анзаца.

По выбранной методике вычисляется верхняя оценка жесткости системы (30).

$$K_{\text{антик}}^{\text{верх}} = \frac{4\pi}{3} \mu R^2 h^3 + \frac{8\pi\alpha\kappa h R^4}{\kappa R^2 + 2\alpha} \quad (30)$$

Для вычисления нижней оценки принимается статически допустимый анзац (31).

$$\sigma^S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4sx_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma^A = \begin{pmatrix} -lx_1 \\ lx_2 \\ 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} l(r^2 - R^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -l(r^2 - R^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

где s, l — параметры статически допустимого анзаца; $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Нижняя граница для жесткости системы может быть записана в виде выражения (32).

$$K_{\text{антик}}^{\text{низ}} = \frac{2\pi}{3} \mu R^2 h^3 + \frac{12\pi\alpha\kappa h R^4}{2\kappa R^2 + 3\alpha} \quad (32)$$

3.3. Синкластический изгиб тонкой круглой пластины

В задаче также рассматривается тонкая круглая пластина с радиусом R и толщиной h $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, -h/2 \leq x_3 \leq h/2\}$. Система координат аналогична предыдущей задаче.

Эталонная классическая жесткость для синкластического изгиба определяется выражением (33) [18].

$$K_{\text{синк}}^{\text{эталон}} = \frac{2\pi\mu(3\lambda+2\mu)}{3(\lambda+2\mu)} R^2 h^3 \quad (33)$$

В качестве кинематических граничных условий используется поле перемещений, которое соответствует осесимметричному синкластическому изгибу с некоторой интенсивностью θ : $u_1 = -2 \cdot \theta \cdot x_1 \cdot x_3$, $u_2 = -2 \cdot \theta \cdot x_2 \cdot x_3$, $u_3 = \theta \cdot (x_1^2 + x_2^2)$ на $d\Omega$. Для микроповоротов принимается условие свободной поверхности по всем граням.

Для получения верхней части вилки, принимается кинематически допустимый анзац (34).

$$u = \begin{pmatrix} -2\theta x_1 x_3 \\ -2\theta x_2 x_3 \\ \theta(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} qx_2 \\ -qx_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

где θ — заданная интенсивность синкластического изгиба; q — внутренний параметр анзаца.

По используемой методике вычисляется итоговая верхняя оценка жесткости (35).

$$K_{\text{синк}}^{\text{верх}} = \frac{2\pi}{3} (\lambda + \mu) R^2 h^3 + \frac{8\pi\beta\kappa h R^4}{\kappa R^2 + 2\beta} \quad (35)$$

Для получения нижней части вилки, принимается статически допустимый анзац (36).

$$\sigma^S = \begin{pmatrix} -4sx_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -lx_1 \\ -lx_2 \end{pmatrix}, \sigma^A = \begin{pmatrix} -lx_2 \\ lx_1 \\ 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 \\ l(r^2 - R^2) \\ 0 \\ -l(r^2 - R^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

где s, l — параметры статически допустимого анзаца.

Нижняя оценка жесткости, вычисленная по используемой методике, записана в виде выражения (37).

$$K_{\text{синк}}^{\text{низ}} = \frac{\pi\mu(3\lambda+2\mu)}{6(\lambda+\mu)} R^2 h^3 + \frac{4\pi h R^4}{\frac{1}{4\mu} + \frac{1}{4\kappa} + \frac{R^2}{6\beta}} \quad (37)$$

3.4. Итоговые аналитические вилки для констант среды Коссера

Для оценки κ используются вилки 1-3 задач. На их основе формируется ряд ограничений, которые задают его нижнюю границу (38).

$$\kappa > \max \left(\frac{\mu(b^2+c^2)}{4a^2}, \frac{\mu h^2}{6R^2}, \frac{h^2\mu(3\lambda+2\mu)^2}{96R^2(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)-h^2(3\lambda+2\mu)^2} \right) \quad (38)$$

В рамках рассмотренных задач, получить аналитическую верхнюю границу для κ невозможно, так как из задач, которые замыкаются через известные интегральные характеристики (в рассмотренных случаях это жесткости), κ входит в вилки в связи с другими константами. Ввиду этого, на основе работы [6], было принято верхнее ограничение (39) данной константы.

$$\kappa = \frac{2\mu N^2}{1-N^2} \quad (39)$$

где N — параметр микрополярной связи.

На основе данных из литературных источников можно определить значение N для разных типов материалов:

- $N = [0,01; 0,1]$ — для материалов без ярко выраженной микроструктуры. К ним можно отнести: сталь, чугун [6].
- $N = [0,1; 0,3]$ — для связных материалов с выраженной микроструктурой. К ним можно отнести бетон, ненарушенный скальный массив, глинистый грунт [8].
- $N = [0,3; 0,6]$ — для гранулярных материалов с выраженной макроструктурой частиц. К ним можно отнести трещиноватый скальный массив, песок, разные типы песчаных и скальных грунтов [9].
- $N = [0,6; 1]$ — для материалов с ярко выраженной микрополярной структурой. К ним относятся композиты, пены, кость [5].

На основе второй задачи, определяется вилка для параметра α , которая может быть записана в виде (40).

$$0 \leq \alpha \leq \frac{2\mu h^2 \kappa R^2}{3(6\kappa R^2 - \mu h^2)} \quad (40)$$

На основе третьей задачи вычисляется итоговая вилка для постоянной β (41).

$$0 \leq \beta \leq \frac{2\kappa\mu R^2 h^2 (3\lambda+2\mu)^2}{3(96\kappa R^2(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)-h^2(\kappa+\mu)(3\lambda+2\mu)^2)} \quad (41)$$

На основе первой задачи определяется итоговая вилка для γ (42).

$$0 \leq \gamma \leq \frac{8a^2\kappa\mu(b^2+c^2)}{5(4a^2\kappa-\mu(b^2+c^2))} \quad (42)$$

3.5. Верификация методики

Для верификации полученных аналитических вилок рассмотрим расчетный пример на основе экспериментальных данных. В работе [19] рассмотрена полимерная решетка с размером ячейки 9-10 мм, для которой экспериментальным путем были получены следующие постоянные: $\mu = 1,495$ МПа, $\lambda = 0,166$ кПа, $l_t = 9,4$ мм, $l_b = 8,8$ мм, $N = 0,99$, $\Psi = 1$, $\beta/\gamma = 0,5$, где E — модуль упругости материала, l_t — крутильная характеристическая длина, определяемая формулой (43), l_b — изгибная характеристическая длина, определяемая формулой (44), Ψ — полярное отношение, характеризующее относительный вклад моментных постоянных (определяется по формуле (45)). Постоянная κ в статье [19] определяется по формуле (39).

$$l_t = \sqrt{\frac{\beta+\gamma}{2G}} \quad (43)$$

$$l_b = \sqrt{\frac{\gamma}{4G}} \quad (44)$$

$$\Psi = \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \quad (45)$$

Переходя от экспериментальных данных к постоянным средам Коссера, получим:

$$\kappa = \frac{2\mu N^2}{1-N^2} = \frac{2 \cdot 1,495 \cdot 0,99^2}{1-0,99^2} = 147,28 \text{ МПа}$$

$$\gamma = 4\mu l_b^2 = 4 \cdot 1,495 \cdot 8,8^2 = 463,16 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^2$$

$$\beta = 0,8\gamma = 0,5 \cdot 463,16 = 231,58 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^2$$

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{\Psi} - (\beta + \gamma) = \frac{231,58 + 463,16}{1} - (231,58 + 463,16) = 0$$

В качестве исходных данных о геометрии образца для задачи кручения принимаем $a = 200$ мм, $b = c = 20$ мм, а для задачи изгиба $R = 1000$ мм, $h = 100$ мм.

Тогда по формуле (38), нижняя граница для κ равна:

$$\kappa > \max(0,00748; 0,00249; 0,00036) = 0,00748 \text{ МПа}$$

Ограничение для κ выполняется.

По формуле (40), определим ограничение для параметра α :

$$0 \leq \alpha_{\text{эксн}} = 0 \leq 1661,40 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^2$$

Ограничение для α выполняется.

По формуле (41), определим ограничение для параметра β :

$$0 \leq \beta_{\text{эксн}} = 231,58 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^2 \leq 241,07 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^2$$

Ограничение для β выполняется.

По формуле (42), определим ограничение для параметра γ :

$$0 \leq \gamma_{\text{эксн}} = 463,16 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^2 \leq 478,50 \text{ МПа} \cdot \text{мм}^2$$

Ограничение для γ выполняется.

Обсуждение

Результаты, полученные в данной работе, показывают, что краевые задачи с известными классическими жесткостями могут быть использованы как аналитический инструмент для определения допустимых диапазонов постоянных среды Коссера. Главным преимуществом такого подхода является возможность оценки микрополярных констант через известные величины из классической теории упругости.

В работах об определении постоянных среды Коссера, как правило, рассматривается экспериментальный подход, численные расчеты или же обратные задачи [4], [5], [6], [7]. Использование таких методик позволяет определить конкретные значения параметров для выбранного материала, однако являются весьма трудоемкими с точки зрения практической реализации. Кроме того, результаты, получаемые таким образом являются очень чувствительными к геометрии образца, типу нагружения и методике испытаний в целом [4]. В настоящей работе, основной акцент сделан на аналитическом определении допустимых диапазонов постоянных среды Коссера через краевые задачи с известными классическими жесткостями рассмотренных систем. Каждая из предлагаемых задач несет самостоятельную информацию о постоянных микрополярной среды. Совокупность этих задач образует аналитическую систему, которая связывает классические жесткости с микрополярными.

В работах об исследовании среды Коссера, задачи на кручение и изгиб часто рассматриваются как наиболее чувствительные к проявлению микрополярных эффектов. В трудах [6], [7], [14] анализируются задачи кручения, в которых описано влияние микрополярной среды на жесткость системы, деформацию сечений и проявление масштабного эффекта. Z. Rueger, R.S. Lakes отмечают, что при изгибе образцов с размером сечения, сопоставимым с размером ячейки микроструктуры, отклик материала существенно отличается от классического прогноза [5], [6]. Таким образом, применяемая в данной работе методика, хорошо согласуется с существующими исследованиями, так как опираются на наиболее чувствительные к микрополярным эффектам задачи.

Полученные оценки явно указывают на наличие масштабных эффектов в среде Коссера. Если в классической теории упругости, некоторые геометрические величины описывают главным образом саму жесткость, то в микрополярной среде они дополнительно определяют чувствительность задачи к искомым постоянным. Другими словами, размер образца следует воспринимать как дополнительную ступень оценки констант среды Коссера не только для определенного материала, но и для конкретного масштаба задачи.

В связи с вышесказанным возникает необходимость ввода требований к размерам тел, которые могут быть рассмотрены в выбранных краевых задачах. Ввиду того, что при малых значениях N , эффекты среды Коссера выражены слабо, необходимо подбирать такие геометрические характеристики для рассматриваемых тел, чтобы вклад их микроструктуры оказывал ощутимое влияние на интегральный отклик задачи. При уменьшении поперечного сечения рассматриваемого тела, при постоянной длине, размерный эффект, свойственный среде Коссера проявляется сильнее. Это обусловлено увеличением отношения внутреннего характерного размера материала к характерному размеру тела [6]. Для задачи с брусом предлагается принимать следующие размеры образца: $a, b \leq Nc$. Для задач с пластинами рекомендуется использовать классическое условие тонкой пластины: $h \leq 0,1R$.

Такое ограничение на выбор размеров образца позволяет получить ожидаемую чувствительность постановки к микрополярным эффектам и тем самым повысить информативность получаемых аналитических оценок.

Стоит отметить, что полученные вилки нельзя интерпретировать, как точные значения постоянных среды Коссера. С точки зрения практики, полученные интервалы дают представление о допустимых значениях. Это позволяет задавать согласованные значения констант при численном моделировании, или же отсекают экстремальные значения постоянных, которые были получены экспериментальным путем.

Определенные в работе оценки естественно считать основой для дальнейшего уточнения постоянных микрополярной среды, через аналитические, численные или экспериментальные методы.

Область применимости предложенной методики определяется допущениями линейной изотропной среды Коссера, а также способом построения аналитических оценок. Методика ориентирована на материалы с выраженной микро- или макроструктурой: пены, композиты, ячеистые материалы, трещиноватые горные породы и некоторые типы грунтов. Для таких семейств материалов характерный размер внутренней структуры может быть сопоставим с геометрическими размерами образцов, тем самым делая масштабные и микрополярные эффекты заметными в интегральном отклике системы. Однако прямое использование предложенных оценок применительно к материалам с ярко выраженной анизотропией, нерегулярной трещиноватостью или без хорошо прослеживаемой внутренней структуры не будет корректным, так как эти явления не учитываются в принятой линейной изотропной постановке.

Заключение

В работе предложен аналитический метод оценки постоянных среды Коссера через краевые задачи с известной классической жесткостью. В качестве основополагающих были рассмотрены следующие задачи: кручение прямоугольного бруса, антикластический изгиб тонкой круглой пластины и сикластический осесимметричный изгиб тонкой круглой пластины. Для каждой из рассмотренных задач определялись верхние оценки жесткости системы с помощью вариационного принципа Лагранжа, и нижние с помощью вариационного принципа Кастильяно. Полученные оценки сопоставлялись с известными жесткостями из классической теории упругости для получения замкнутых вилок.

По результатам работы, были получены итоговые аналитические вилки для оценки всех констант среды Коссера. Было доказано, что использование классических жесткостей позволяет перейти от общих определяющих соотношений микрополярной среды к допустимым диапазонам ее постоянных. Каждая из выбранных задач чувствительна к определенному набору параметров, что позволяет сформировать единую аналитическую систему. При ее одновременном рассмотрении, возможно определить отдельные диапазоны для каждой постоянной микрополярной среды.

Полученные результаты могут быть использованы в качестве основы для дальнейшего уточнения параметров среды Коссера при помощи экспериментов, численного моделирования, или же дальнейших аналитических изысканий для материалов с ярко выраженной внутренней структурой.

Конфликт интересов

Не указан.

Conflict of Interest

None declared.

Рецензия

Газиев А.Н., ООО «СТРОЙЦЕНТРАЛЬ», Санкт-Петербург Российская Федерация
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.171.50.1>

Review

Gaziev A.N., STROYCENTRAL LLC, Saint-Petersburg Russian Federation
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.171.50.1>

Список литературы / References

1. Cosserat E. Théorie des corps déformables / E. Cosserat, F. Cosserat. — Paris : A. Hermann et Fils, 1909. — 226 p.
2. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories / A.C. Eringen. — New York : Springer-Verlag, 1999. — Vol. 1: Foundations and Solids. — 325 p.
3. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity / W. Nowacki; transl. by H. Zorski. — Oxford ; New York ; Toronto : Pergamon Press ; Warszawa : PWN—Polish Scientific Publishers, 1986. — 383 p.
4. Hassanpour S. Micropolar elasticity theory: a survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations / S. Hassanpour, G.R. Heppler // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2017. — Vol. 22. — № 2. — P. 224–242. — DOI: [10.1177/1081286515581183](https://doi.org/10.1177/1081286515581183).
5. Rueger Z. Experimental Cosserat elasticity in open-cell polymer foam / Z. Rueger, R.S. Lakes // Philosophical Magazine. — 2016. — Vol. 96. — № 2. — P. 93–111. — DOI: [10.1080/14786435.2015.1125541](https://doi.org/10.1080/14786435.2015.1125541).
6. Rueger Z. Strong Cosserat elastic effects in a unidirectional composite / Z. Rueger, R.S. Lakes // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik [Journal of Applied Mathematics and Physics]. — 2017. — Vol. 68. — № 3. — P. 1–9. — DOI: [10.1007/s00033-017-0796-6](https://doi.org/10.1007/s00033-017-0796-6).
7. Lakes R.S. Reduced warp in torsion of reticulated foam due to Cosserat elasticity: experiment / R.S. Lakes // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik [Journal of Applied Mathematics and Physics]. — 2016. — Vol. 67. — № 3. — P. 1–6. — DOI: [10.1007/s00033-016-0632-4](https://doi.org/10.1007/s00033-016-0632-4).
8. Atkinson C. Couple stresses and the fracture of rock / C. Atkinson, C.D. Coman, J. Aldazabal // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2015. — Vol. 373. — № 2038. — Art. 20140120. — DOI: [10.1098/rsta.2014.0120](https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0120).
9. Abreu R. Understanding Micropolar Theory in the Earth Sciences I: The Eigenfrequency ω_r / R. Abreu, S. Durand // Pure and Applied Geophysics. — 2022. — Vol. 179. — № 3. — P. 915–932. — DOI: [10.1007/s00024-021-02932-7](https://doi.org/10.1007/s00024-021-02932-7).



10. Илюхин А.А. Построение основных соотношений одномерной микрополярной теории упругих стержней / А.А. Илюхин, Д.В. Тимошенко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2008. — Т. 8. — № 4. — С. 52–61. — DOI: 10.18500/1816-9791-2008-8-4-52-61.
11. Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума / Ю.Н. Радаев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. — 2018. — Т. 22. — № 3. — С. 504–517. — DOI: 10.14498/vsgtu1635.
12. Корепанов В.В. Аналитические и численные решения статических и динамических задач несимметричной теории упругости / В.В. Корепанов, М.А. Кулеш, В.П. Матвеев [и др.] // Физическая мезомеханика. — 2007. — Т. 10. — № 5. — С. 77–90.
13. Смолин И.Ю. О применении модели Коссера для описания пластического деформирования на мезоуровне / И.Ю. Смолин // Физическая мезомеханика. — 2005. — Т. 8. — № 3. — С. 49–62.
14. Романов А.В. Масштабные эффекты микрополярной среды в задаче о кручении цилиндрического тела / А.В. Романов // Чебышевский сборник. — 2024. — Т. 25. — № 5 (96). — С. 262–276. — DOI: 10.22405/2226-8383-2024-25-5-262-276.
15. Аптуков В.Н. Градиентные теории упругости и способы идентификации градиентных параметров моделей / В.Н. Аптуков, М.А. Барулина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2025. — № 3 (70). — С. 54–70. — DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-54-70.
16. Huang F.-Y. Two and three-dimensional isoparametric finite elements for axisymmetric micropolar elasticity : dis. ... of Grand PhD in Engineering Science in Mechanical Engineering / F.-Y. Huang. — Newark : New Jersey Institute of Technology, 1986. — 129 p.
17. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж.Н. Гудьер; пер. с англ. М.И. Рейтмана. — Москва : Наука, 1975. — 576 с.
18. Kelly P. Plate Theory / P. Kelly // Solid Mechanics. Part II: Engineering Solid Mechanics — small strain : electronic lecture notes. — Auckland : The University of Auckland, 2013. — Section 6.1. — 68 p.
19. Rueger Z. Strong Cosserat elasticity in a transversely isotropic polymer lattice / Z. Rueger, R.S. Lakes // Physical Review Letters. — 2018. — Vol. 120. — № 6. — Art. 065501. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.065501.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Cosserat E. Théorie des corps déformables [Theory of Deformable Bodies] / E. Cosserat, F. Cosserat. — Paris : A. Hermann et Fils, 1909. — 226 p. [in French]
2. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories / A.C. Eringen. — New York : Springer-Verlag, 1999. — Vol. 1: Foundations and Solids. — 325 p.
3. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity / W. Nowacki; transl. by H. Zorski. — Oxford ; New York ; Toronto : Pergamon Press ; Warszawa : PWN–Polish Scientific Publishers, 1986. — 383 p.
4. Hassanpour S. Micropolar elasticity theory: a survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations / S. Hassanpour, G.R. Heppler // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2017. — Vol. 22. — № 2. — P. 224–242. — DOI: 10.1177/1081286515581183.
5. Rueger Z. Experimental Cosserat elasticity in open-cell polymer foam / Z. Rueger, R.S. Lakes // Philosophical Magazine. — 2016. — Vol. 96. — № 2. — P. 93–111. — DOI: 10.1080/14786435.2015.1125541.
6. Rueger Z. Strong Cosserat elastic effects in a unidirectional composite / Z. Rueger, R.S. Lakes // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik [Journal of Applied Mathematics and Physics]. — 2017. — Vol. 68. — № 3. — P. 1–9. — DOI: 10.1007/s00033-017-0796-6.
7. Lakes R.S. Reduced warp in torsion of reticulated foam due to Cosserat elasticity: experiment / R.S. Lakes // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik [Journal of Applied Mathematics and Physics]. — 2016. — Vol. 67. — № 3. — P. 1–6. — DOI: 10.1007/s00033-016-0632-4.
8. Atkinson C. Couple stresses and the fracture of rock / C. Atkinson, C.D. Coman, J. Aldazabal // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2015. — Vol. 373. — № 2038. — Art. 20140120. — DOI: 10.1098/rsta.2014.0120.
9. Abreu R. Understanding Micropolar Theory in the Earth Sciences I: The Eigenfrequency ω_r / R. Abreu, S. Durand // Pure and Applied Geophysics. — 2022. — Vol. 179. — № 3. — P. 915–932. — DOI: 10.1007/s00024-021-02932-7.
10. Ilyukhin A.A. Postroenie osnovnykh sootnoshenij odnomernoj mikropolyarnoj teorii uprugikh stержnej [The One-Dimensional Micropolar Theory of Elastic Rods Basic Parities Construction] / A.A. Ilyukhin, D.V. Timoshenko // Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika [Proceedings of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics]. — 2008. — Vol. 8. — № 4. — P. 52–61. — DOI: 10.18500/1816-9791-2008-8-4-52-61. [in Russian]
11. Radaev Yu.N. Pravilo mnozhitel'ej v kovariantnykh formulirovках mikropolyarnykh teorii mekhaniki kontinuuma [The rule of multipliers in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics] / Yu.N. Radaev // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki [Bulletin of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]. — 2018. — Vol. 22. — № 3. — P. 504–517. — DOI: 10.14498/vsgtu1635. [in Russian]
12. Korepanov V.V. Analiticheskie i chislennye resheniya staticheskikh i dinamicheskikh zadach nesimmetrichnoj teorii uprugosti [Analytical and Numerical Solutions for Static and Dynamic Problems of the Asymmetric Theory of Elasticity] / V.V. Korepanov, M.A. Kulesh, V.P. Matveenko [et al.] // Fizicheskaya mezomekhanika [Physical Mesomechanics]. — 2007. — Vol. 10. — № 5. — P. 77–90. [in Russian]

13. Smolin I.Yu. O primenении modeli Kossera dlya opisaniya plasticheskogo deformirovaniya na mezourovne [On the application of the Cosserat model to the description of plastic deformation at the mesoscale] / I.Yu. Smolin // Fizicheskaya mezomekhanika [Physical Mesomechanics]. — 2005. — Vol. 8. — № 3. — P. 49–62. [in Russian]
14. Romanov A.V. Masshtabnye ehffekty mikropolyarnoj sredy v zadache o kruchenii tsilindricheskogo tela [Size effects of micropolar medium in problem on the cylindrical body torsion] / A.V. Romanov // Chebyshevskij sbornik [Chebyshev Collection]. — 2024. — Vol. 25. — № 5 (96). — P. 262–276. — DOI: 10.22405/2226-8383-2024-25-5-262-276. [in Russian]
15. Aptukov V.N. Gradientnye teorii uprugosti i sposoby identifikatsii gradientnykh parametrov modelej [Gradient Elasticity Theories and Methods for Identifying Gradient Model Parameters] / V.N. Aptukov, M.A. Barulina // Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika [Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics]. — 2025. — № 3 (70). — P. 54–70. — DOI: 10.17072/1993-0550-2025-3-54-70. [in Russian]
16. Huang F.-Y. Two and three-dimensional isoparametric finite elements for axisymmetric micropolar elasticity : dis. ... of Grand PhD in Engineering Science in Mechanical Engineering / F.-Y. Huang. — Newark : New Jersey Institute of Technology, 1986. — 129 p.
17. Timoshenko S.P. Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity] / S.P. Timoshenko, J.N. Goodier; transl. from Eng. by M.I. Reitman. — Moscow : Nauka, 1975. — 576 p. [in Russian]
18. Kelly P. Plate Theory / P. Kelly // Solid Mechanics. Part II: Engineering Solid Mechanics — small strain : electronic lecture notes. — Auckland : The University of Auckland, 2013. — Section 6.1. — 68 p.
19. Rueger Z. Strong Cosserat elasticity in a transversely isotropic polymer lattice / Z. Rueger, R.S. Lakes // Physical Review Letters. — 2018. — Vol. 120. — № 6. — Art. 065501. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.065501.