

## МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ/MECHANICS OF FLUIDS, GAS AND PLASMA

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.170.37> EDN: KZXWEM

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ В ТРУБОПРОВОДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ COMSOL MULTIPHYSICS

Научная статья

Смолин С.В.<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация

\* Корреспондирующий автор (smolinsv[at]inbox.ru)

Предложена: 07.05.2026; Принята: 10.07.2026; Опубликовано: 17.08.2026

**Аннотация**

В работе изучается распределение давления при гидравлическом ударе в трубопроводе для вязкой жидкости. Гидравлический удар всегда был областью изучения, которая интересна исследователям вследствие его сложных проявлений. Благодаря развитию численных методов изучение гидравлического удара и его эффектов может быть представлено с использованием программы математического моделирования, например программного комплекса COMSOL Multiphysics. Для математического описания гидравлического удара в трубопроводе применена широко известная в литературе модель в виде системы двух уравнений гидродинамики — уравнения непрерывности и уравнения импульсов. С помощью этой математической формулировки с соответствующими начальными и граничными условиями производится численное решение этой системы двух нелинейных уравнений методом конечных элементов, используя COMSOL Multiphysics с целью моделирования распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе для коэффициента трения Черчила.

Дополнительно (только при определенных условиях — модель коэффициента трения Стокса) можно использовать линеаризованную модель в виде одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа. Тогда в первом приближении предлагается более простое аналитическое описание в трубопроводе только основных физических характеристик гидравлического удара: например, коэффициента затухания, периода колебаний ударной волны давления, а для зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода предложена более общая формула, которая включает фундаментальную формулу Н.Е. Жуковского.

Результаты работы можно рассматривать как примеры численного моделирования распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе методом конечных элементов с применением COMSOL Multiphysics, а предложенные формулы для ламинарного режима могут быть использованы для более простого аналитического описания гидравлического удара и прогнозирования в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара.

**Ключевые слова:** моделирование гидравлического удара, вязкая жидкость, программный комплекс COMSOL Multiphysics, формула, Н.Е. Жуковский.

## MODELING OF PRESSURE DISTRIBUTION AT THE WATER HAMMER IN THE PIPELINE, USING THE COMSOL MULTIPHYSICS

Research article

Smolin S.V.<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

\* Corresponding author (smolinsv[at]inbox.ru)

Suggested: 07.05.2026; Accepted: 10.07.2026; Published: 17.08.2026

**Abstract**

The paper studies the pressure distributions at the water hammer in the pipeline for a viscous fluid. The water hammer has always been an area of study, which is interesting to researchers due to its complex phenomena. Thanks to the development of numerical methods, the study of water hammer and its effects can be performed using mathematical simulation programs, for example, the Comsol Multiphysics software package. For the mathematical description of a water hammer in the pipeline, a widely known model in the literature in the form of system of two hydrodynamical equations — the momentum and continuity equations is used. Using this mathematical statement with corresponding initial and boundary conditions, the numerical solution of this system of two nonlinear equations by a finite element method is yielded, using the Comsol Multiphysics, for modeling of pressure distribution at the water hammer in the pipeline for the Churchill friction factor.

In addition (only under certain conditions — the Stokes friction factor model) it is possible to use the linearized model in the form of the one differential partial equation of the second order of hyperbolic type. Then, as a first approximation, the simpler analytical description in the pipeline only of the basic physical characteristics of a water hammer: for example, the damping factor, the period of oscillations of a shock wave of pressure is offered. And for the dependence of pressure amplitude from time in certain section of the pipeline is offered more general formula which includes the Zhukovsky's fundamental formula.

Results of work can be considered as examples of numerical modeling of pressure distribution at the water hammer in the pipeline by a finite element method, using the Comsol Multiphysics, and the offered formulas for the laminar regime can be used for more simple analytical description of a water hammer and forecasting in the pipeline of the basic physical characteristics of a water hammer.

**Keywords:** modeling of water hammer, viscous fluid, Comsol Multiphysics software package, formula, N.E. Zhukovsky.

### Введение

Несанкционированное отключение или внештатное включение насосов напорных гидросистем, некорректное маневрирование трубопроводной запорно-регулирующей арматурой, аварийное срабатывание отсечных клапанов и т.п., т.е. относительно быстрое изменение скорости потока капельной жидкости может приводить к возникновению в таких системах гидравлических ударов — периодическому повышению давления, которое характеризуется прежде всего амплитудой и частотой колебаний. В результате гидравлических ударов наблюдаются порывы трубопроводов и разгерметизация соединений, которые могут вызвать вторичные аварии или травмы обслуживающего персонала. Кроме того, случаются выходы из строя элементов насоса, поломки запорно-регулирующей аппаратуры, изгибы трубопроводов, нарушение элементов крепления.

Поэтому гидравлическим ударом называется резкое изменение давления в трубопроводе вследствие быстрого (мгновенного) изменения скорости движения капельной жидкости. Когда клапан закрывается быстро в сети труб, это дает толчок гидравлическому переходному процессу — волне давления, известной как гидравлический удар [1]. Распространение этих гидравлических переходных процессов может в экстремальных случаях вызывать аварии систем труб вследствие созданных сверхдавлений.

Гидравлический удар как часть гидродинамики всегда интересовал исследователей вследствие его сложных проявлений. Например, в работе [2] представлен очень детальный обзор теории и практики гидравлического удара на 2005 год. В последующие годы в литературе имеются по крайней мере два разных подхода к моделированию трения на внутренней поверхности трубы во время моделирования гидравлического удара. Первая группа состоит из моделей, основанных на мгновенных изменениях в локальной и конвективной производных скорости, а вторая группа — модели, основанные на интеграле свертки и полной истории течения. Более популярные модели — это модели из первой группы, их использование требует эмпирических коэффициентов. Вторая группа все еще недооценена, даже если основана на хороших теоретических законах и не требует любых эмпирических коэффициентов. Это несомненно связано со сложностью вычислений интеграла свертки. А в последние несколько лет для примера представлены в хронологическом порядке следующие работы. В статье [3] проведено численное исследование кавитационного течения при гидравлическом ударе. Анализ нестационарных моделей трения, используемых в техническом (инженерном) программном обеспечении для анализа гидравлического удара, выполнен в программе WANDA [4]. Точная и эффективная схема, включающая нестационарное трение для переходного течения (потока) в трубе, предложена в [5]. Эффекты времен и законов закрытия в трубопроводе шарового клапана при гидравлическом ударе рассмотрены в работе [6]. Моделирование гидравлического удара, используя упрощенную основанную на свертке нестационарную модель трения, предлагается в [7]. В этой работе предложено новое улучшенное эффективное решение интеграла свертки (применяя интегральное преобразование Лапласа), которое характеризуется использованием упрощенной весовой функции, состоящей только из двух экспоненциальных членов. Такой подход значительно содействует численным расчетам базовых параметров течения (давления и скорости). Далее [8] представлен энергетический анализ квазидвумерной модели трения для моделирования переходных течений (потоков) в вязкоупругих трубах. Гидродинамика сглаженных (гладких) частиц с нестационарной моделью трения для течения в трубах при гидравлическом ударе рассмотрена в [9]. Источники затухания при гидравлическом ударе и сравнение различных методов для моделирования закрытия клапана при гидравлическом ударе с программой CFD представлены в [10], [11] соответственно. А новые успехи в проблемах гидравлического удара (обзор) подробно изложены в статье [12].

Физическое моделирование гидравлического удара в реальных условиях очень трудное. Из-за размеров систем трубопроводов проведение исследования в реальных масштабах невозможно. Однако благодаря развитию численных методов изучение гидравлического удара и его эффектов может быть представлено с использованием программы математического моделирования, например программного комплекса Comsol Multiphysics.

Поэтому рассмотрим краевую задачу о распространении скачка давления в трубопроводе с начальной скоростью жидкости  $u_0$  в исходном состоянии. Допустим, что в начальный момент времени  $t = 0$  в сечении  $x = 0$  и в трубопроводе начальное давление  $p_0$ , а в сечении  $x = l$  произошло скачкообразное изменение давления  $\Delta P$  (например, при мгновенном закрытии клапана), которое действует в течение всего времени процесса вплоть до установления стационарного состояния. Требуется найти распределение давления при гидравлическом ударе по длине трубопровода во времени [13], решая численно систему двух нелинейных уравнений гидродинамики.

Исходя из изложенного, цель работы:

1) использовать Comsol Multiphysics [13] на примере конкретной вязкой жидкости для численного моделирования распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе методом конечных элементов;

2) предложить для ламинарного режима упрощенный вариант для первого приближенного аналитического описания (формулы) в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара: например, коэффициента затухания, зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода, периода колебаний ударной волны давления, если возможно использовать линеаризованную модель в виде одного уравнения гиперболического типа.

### Математические модели

Полная математическая постановка задачи по определению распределения давления в трубопроводе при гидравлическом ударе в виде системы двух нелинейных уравнений гидродинамики (уравнения непрерывности и уравнения импульсов), используя COMSOL MULTIPHYSICS, будет [13]

$$A \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (A \rho \vec{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p - f_D \frac{\rho}{2d} \vec{u} |\vec{u}| + \rho \vec{g}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$p(x, 0) = p_0 = \text{const}; \quad \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0 = \text{const}; \quad (3)$$

$$p(0, t) = p_0 = \text{const}; \quad p(l, t) = \Delta P_J = \text{const}. \quad (4)$$

Здесь  $p(x, t)$  — давление;  $x$  — продольная координата;  $t$  — время;  $\vec{u}(x, t)$  — вектор тангенциальной скорости жидкости [13];  $\nabla$  — дифференциально-векторный оператор набла;  $\rho = \text{const}$  — плотность жидкости;  $A$  — площадь поперечного сечения трубы;  $f_D$  — коэффициент трения Дарси (или коэффициент гидравлического сопротивления);  $d$  — внутренний диаметр трубы;  $\vec{g}$  — вектор ускорения свободного падения;  $p_0$  — начальное давление в трубе и в точке  $x = 0$ ;  $u_0$  — начальная скорость жидкости в трубе;  $\Delta P_J$  — увеличение (скачок) давления, приложенного в точке  $x = l$  и действующего в течение всего времени процесса вплоть до установления стационарного состояния ( $\Delta P_J > p_0$ );  $l$  — длина трубопровода.

Скорость звука в капельной упругой жидкости, текущей в трубе с упругими стенками, т.е. скорость распространения ударной волны — волны гидравлического возмущения  $c$  дается выражением [14], [15]:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{k} + \frac{\rho d}{\delta E}, \quad (5)$$

где  $k$  — модуль упругости жидкости;  $\delta$  — толщина стенки трубы;  $E$  — модуль упругости материала стенки трубы.

Представленная формула для определения скорости звука в капельной упругой жидкости ( $c$ ) справедлива при  $u/c < 1$  и  $(p - p_0)/E < 1$ , где  $u$  — скорость жидкости.

Дополнительно (только при определенных условиях — модель коэффициента трения Стокса [13]) можно использовать линеаризованную модель в виде одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа. Тогда, используя результаты, подробно представленные в безразмерных переменных и параметрах в работе [16], предлагается упрощенный вариант в размерных переменных для первого приближенного аналитического описания в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара в виде следующего уравнения

$$(p - p_0)_1 = \Delta P_J \exp(-a \cdot t) \cos \left( a \sqrt{\pi^2 Fo_r - 1} \cdot t \right), \quad (6)$$

где  $\Delta P_J$  — фундаментальная формула Н.Е. Жуковского [1]

$$\Delta P_J = \rho c u_0, \quad (7)$$

которая определяет увеличение (скачок) амплитуды давления гидравлического удара, например, при мгновенном закрытии клапана в конце трубопровода  $x = l$  в начальный момент времени  $t = 0$ , а  $u_0$  может быть и средней скоростью жидкости до закрытия клапана. В целом уравнение (6) математически описывает затухающие гармонические колебания [17].

Величина  $a$  для ламинарного режима, учитывая формулу Пуазейля для коэффициента гидравлического сопротивления, приводится к виду [14], [15]

$$a = \frac{16\mu}{d^2}, \quad (8)$$

где  $\mu$  — кинематическая вязкость жидкости.

По физическому смыслу коэффициент  $a$  (8) определяет коэффициент затухания колебаний (6) [17].

Для примера в [15] приведены результаты вычислений конкретной задачи о распределении давления нефти (вязкой жидкости) в стальном трубопроводе для ламинарного режима течения, используя (8).

Круговая или циклическая частота затухающих колебаний  $\omega$ , принимая во внимание (6), находится по формуле

$$\omega = a \sqrt{\pi^2 Fo_r - 1}, \quad (9)$$

где безразмерный параметр  $Fo_r = \text{const}$ , характеризующий гидравлическое сопротивление жидкости, учитывающий ее вязкость, скорость звука в ней, коэффициент гидравлического сопротивления, а также длину трубопровода, определяется так

$$Fo_r = \frac{c^2}{4a^2 l^2}. \quad (10)$$

Тогда согласно формуле  $T = 2\pi/\omega$ , период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{a \sqrt{\pi^2 Fo_r - 1}}. \quad (11)$$

При необходимости можно определить логарифмический декремент затухания  $\chi = aT$  и добротность колебательной системы  $Q = \pi/\chi$  [17].

В соответствии с видом функции (6) затухающие колебания можно рассматривать как гармонические колебания частоты  $\omega$  с амплитудой, изменяющейся по закону

$$(p - p_0)_{1 \max} = \Delta P_J \exp(-a \cdot t). \quad (12)$$

Таким образом, для описания зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода предложена более общая формула (12), которая включает фундаментальную формулу Н.Е. Жуковского  $\Delta P_J$  (7), описывающую увеличение (скачок) амплитуды давления гидравлического удара, например, при мгновенном закрытии клапана в конце трубопровода  $x = l$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

На качественном физическом уровне ясно, что этот колебательный процесс (6), (12) должен затухать из-за затрат энергии на трение и деформацию стенок трубы [1]. Предложенная формула (12) это подтверждает, а коэффициент затухания колебаний  $a$  (8) зависит от кинематической вязкости жидкости и внутреннего диаметра трубы. Поэтому коэффициент затухания  $a$  (8) будет увеличиваться с увеличением кинематической вязкости жидкости и с уменьшением внутреннего диаметра трубы, что естественно и должно происходить.

В результате предлагается более простой (упрощенный, «инженерный») вариант для первого приближенного аналитического описания в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара: например, коэффициента затухания  $a$  (8), зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода  $(p - p_0)_{1 \max}$  (12), периода колебаний ударной волны давления  $T$  (11).

### Расчеты и результаты

Расчеты по математическому моделированию распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе для конкретной вязкой жидкости произведены при следующих условиях [16]:  $u_0 = 14,8573$  м/с — начальная скорость жидкости в трубе;  $p_0 = 1,0133 \cdot 10^5$  Па — начальное давление в трубе и в точке  $x = 0$ ;  $\rho = 1100$  кг/м<sup>3</sup> — плотность жидкости;  $k = 1100$  МПа — модуль упругости жидкости;  $\delta = 0,006$  м — толщина стенки трубы;  $d = 0,207$  м — внутренний диаметр трубы;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа — модуль упругости материала стенки трубы;  $\mu = 5,75 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с — кинематическая вязкость жидкости;  $l = 200$  м — длина трубопровода (или расстояние, где к трубопроводу присоединен, например, клапан, регулятор расхода жидкости или регулятор давления);  $e = 0,15$  мм — шероховатость внутренней поверхности трубы; коэффициент трения Дарси  $f_D$  (или коэффициент гидравлического сопротивления) для примера — модель коэффициента трения Черчила (англ. Churchill) [13], [18]

$$f_D = 8 \left[ \left( \frac{8}{Re} \right)^{12} + (A + B)^{-3/2} \right]^{1/12}, \quad (13)$$

где

$$A = \left[ -2,457 \ln \left( \left( \frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \left( \frac{e}{d} \right) \right) \right]^{16}, \quad (14)$$

$$B = \left( \frac{37530}{Re} \right)^{16}. \quad (15)$$

В уравнениях (13)–(15)  $Re$  — это безразмерное число Рейнольдса, которое определяется так

$$Re = \frac{ud}{\mu}. \quad (16)$$

Для ньютоновских однофазных жидкостей модель Черчила для коэффициента трения Дарси  $f_D$  может быть использована для полной области значений  $Re$  (ламинарной, переходной и турбулентной) и полной области  $e/d$ .

По представленным данным скорость звука в капельной упругой жидкости, текущей в трубопроводе с упругими стенками будет равна  $c = 916,7948$  м/с (задача (1)–(5)), величина  $a$  согласно формуле (8) для ламинарного режима будет равняться  $a = 0,0021$  1/с, а безразмерный параметр  $For$ , используя формулу (10), будет равен  $For = 1,1395 \cdot 10^6$ .

Далее для представленной вязкой жидкости в трубопроводе проведено численное решение системы двух нелинейных уравнений гидродинамики (уравнения непрерывности (1) и уравнения импульсов (2)) с начальными (3) и граничными (4) условиями методом конечных элементов, используя модель коэффициента трения Черчила (13)–(16). Поэтому на рисунке 1 представлено распределение давления  $p - p_0$  от времени  $t$  (уравнения (1)–(4)) при  $For = 1,1395 \cdot 10^6$  для  $x = l$  (или по-другому в конце трубопровода) в виде шаговой, ступенчатой функции. Кроме этого, на рисунке 1 в виде горизонтальной линии представлена величина скачка давления по формуле Н.Е. Жуковского (7) при  $t = 0$  и здесь также ясно виден процесс затухания (уменьшения) амплитуды давления со временем.

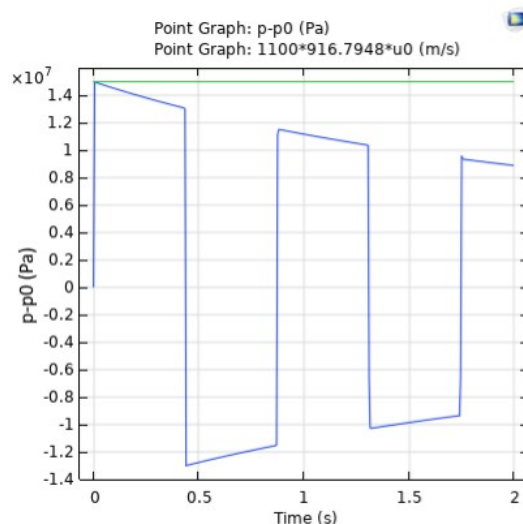


Рисунок 1 - Распределение давления  $p-p_0$  от времени  $t$  (синяя линия, уравнения (1)–(4), модель коэффициента трения Черчиля) для  $x = l = 200$  м при  $For = 1,1395 \cdot 10^6$   
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.170.37.1>

Примечание: горизонтальная зеленая линия представляет величину скачка давления по формуле Жуковского (7) при  $t = 0$

На рисунке 2 представлено распределение давления  $p-p_0$  от времени (уравнения (1)–(4), модель коэффициента трения Черчиля) при  $For = 1,1395 \cdot 10^6$  для  $x = 100$  м, т.е. там, где находится для примера датчик давления. А на рисунке 3 для той же системы уравнений, модели коэффициента трения и  $For = 1,1395 \cdot 10^6$  можно увидеть распределение давления  $p-p_0$  уже вдоль трубопровода длиной 200 м для момента времени  $t = 2$  с.

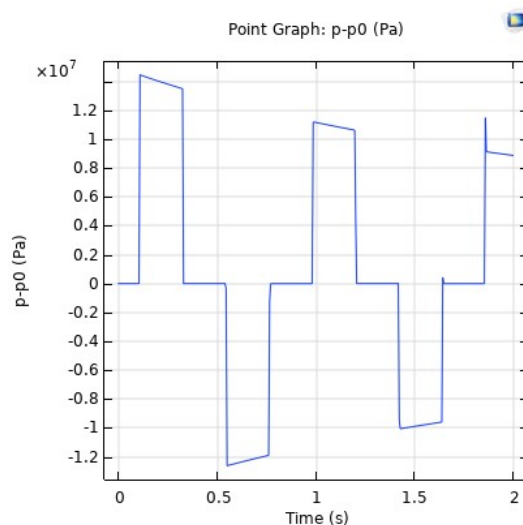


Рисунок 2 - Распределение давления  $p-p_0$  от времени  $t$  (уравнения (1)–(4), модель коэффициента трения Черчиля) при  $For = 1,1395 \cdot 10^6$  для  $x = 100$  м, где находится датчик давления  
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.170.37.2>

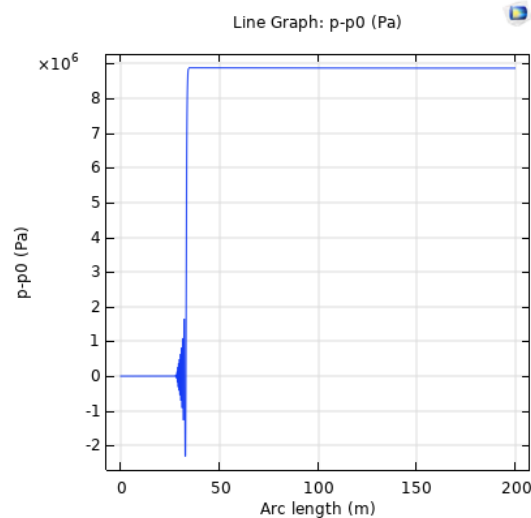


Рисунок 3 - Распределение давления  $p-p_0$  (уравнения (1)–(4), модель коэффициента трения Черчиля) вдоль трубопровода длиной 200 м для момента времени  $t = 2$  с при  $For = 1,1395 \cdot 10^6$   
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.170.37.3>

На рисунках 2 и 3 также видны высокочастотные осцилляции (колебания), индуцированные численно около разрывов в давлении, т.е. там, где резкие, крутые изменения. Эти высокочастотные осцилляции, известные как осцилляции Гиббса, не имеют физического смысла и поэтому должны быть проигнорированы при оценивании результатов на этих рисунках. Осцилляции Гиббса возникают вследствие математических трудностей при разрешении разрывноизменяющейся функции конечным числом элементов сетки.

Поэтому расстояние  $c \cdot dt$  должно быть меньше, чем типичный размер сетки  $dx$ . При численном решении в Comsol Multiphysics было использовано условие Куранта-Фридрикса-Леви  $CFL = c \cdot dt/dx = 0,1$ . Это числовое условие требует, чтобы размер временного шага был меньше времени прохождения волной пространственного шага сетки  $dx$  и оно необходимо для согласования шагов по времени и по пространственной переменной под технические возможности компьютера. Таким образом, выполняется необходимое условие устойчивости разностных схем. Осцилляции Гиббса могут быть ограничены дополнением некоторого количества высокочастотного демпфирования в  $\alpha$  – обобщенный решатель, зависящий от времени, что и было сделано в модели и описано в инструкциях Comsol Multiphysics [13].

Кроме модели Черчиля COMSOL MULTIPHYSICS имеет еще несколько встроенных моделей коэффициентов трения для ньютоновских и неньютоновских жидкостей [13]. Например, для ньютоновской жидкости в ламинарном режиме ( $Re < 2000$ ) имеется коэффициент трения Дарси  $f_D$  независимый от шероховатости внутренней поверхности трубы, который дается моделью (формулой) Стокса (англ. Stokes)

$$f_D = \frac{64}{Re}. \quad (17)$$

Решение нелинейных уравнений (1), (2) возможно лишь путем численного интегрирования. Для упрощения нелинейного уравнения (2) И.А. Чарный [14] для ламинарного режима предложил способ линеаризации второго слагаемого в правой его части, приняв множитель  $f_D u/2d$  постоянным и равным его среднему значению по длине трубы и времени, используя модель Стокса (17), (16)

$$f_D \frac{u}{2d} = \frac{64\mu}{ud} \frac{u}{2d} = 2\alpha = \text{const}. \quad (18)$$

Таким образом, из уравнения (18) после соответствующих сокращений получаем формулу (8) для определения величины  $\alpha$ . Тогда используя (18), уравнение (2) становится линейным. В этом случае с целью упрощения получения аналитического решения уравнения (1) и (2) сводятся к одному гиперболическому уравнению относительно, например давления [15], что позволяет предложить упрощенный вариант для первого приближенного аналитического описания в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара в виде уравнения (6), (7) и соответствующих формул (8)–(12) [16].

Но сначала проведены вычисления распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе для той же вязкой жидкости только для ламинарного режима (по аналогии вычислений для нефти в [15]), используя модель коэффициента трения Стокса (17), (16) в COMSOL MULTIPHYSICS [13]. Поэтому на рисунке 4 представлено соответствующее распределение давления  $p-p_0$  от времени  $t$  (уравнения (1)–(4)) при  $For = 1,1395 \cdot 10^6$  для  $x = l$  в виде шаговой, ступенчатой функции.

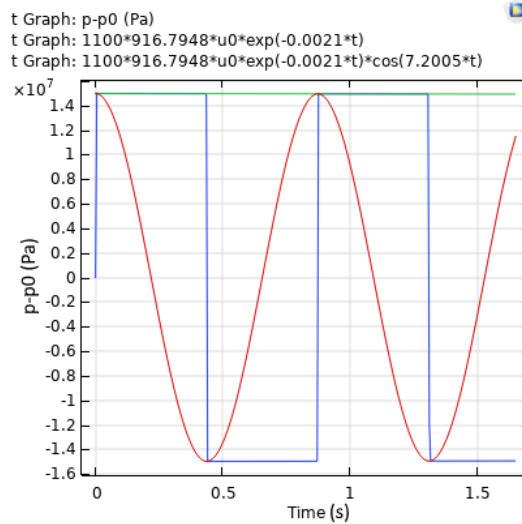


Рисунок 4 - Сравнение распределения давления  $p-p_0$  от времени  $t$  (уравнения (1)–(4) для ламинарного режима, модель коэффициента трения Стокса) для  $x = l = 200$  м при  $For = 1,1395 \cdot 10^6$  (ступенчатая синяя линия), уравнения  $(p-p_0)_1$  (6) (затухающая косинусоида – красная линия) и предсказанной (уравнение (12)) амплитуды давления гидравлического удара  $(p-p_0)_{1max}$  от времени  $t$  (верхняя экспоненциальная зеленая линия)  
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.170.37.4>

Далее найдем первое приближенное решение для более простого (упрощенного) варианта по уравнению (6) и зависимость только амплитуды давления по уравнению (12) от времени. И произведем сравнение на рисунке 4 зависимости давления  $p-p_0$  от времени  $t$  (уравнения (1)–(4), модель коэффициента трения Стокса) для  $x = l$  при  $For = 1,1395 \cdot 10^6$  (ступенчатая синяя линия), уравнения  $(p-p_0)_1$  (6) (затухающая косинусоида – красная линия) и предсказанной (уравнение (12)) амплитуды давления гидравлического удара  $(p-p_0)_{1max}$  (верхняя экспоненциальная зеленая линия).

По числовым данным для задачи ((1)–(4), модель коэффициента трения Стокса) (рис. 4) приближенно определен период колебаний  $T = 0,88$  с, а для уравнения (6) по формуле (11) аналитически (просто) при  $For = 1,1395 \cdot 10^6$  период затухающих колебаний  $T = 0,8726$  с. В результате, при сравнении на рисунке 4 численного решения уравнений (1)–(4) (ступенчатая синяя линия) с первым приближенным аналитическим решением более простого (упрощенного, «инженерного») варианта (затухающая косинусоида — красная линия) для периода колебаний получена относительная погрешность  $\varepsilon = 0,85\%$ , а также практически получено визуальное совпадение с предсказанной (уравнение (12)) амплитудой давления гидравлического удара  $(p-p_0)_{1max}$  от времени  $t$  (верхняя экспоненциальная зеленая линия).

Таким образом, подтверждается справедливость более простого (упрощенного, «инженерного») варианта для первого приближенного аналитического описания в трубопроводе (уравнения (6), (12)) основных физических характеристик гидравлического удара для ламинарного режима, если возможно использовать линеаризованную модель в виде одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа.

### Заключение

Для математического описания гидравлического удара в трубопроводе использована модель в виде системы двух нелинейных уравнений гидродинамики (уравнения непрерывности (1) и уравнения импульсов (2)) с начальными (3) и граничными (4) условиями.

Если возможно для ламинарного режима использовать линеаризованную модель для описания гидравлического удара в виде одного уравнения гиперболического типа, предлагается более простой (упрощенный, «инженерный») вариант для первого приближенного аналитического описания (6) в трубопроводе основных физических характеристик гидравлического удара (формулы): например, коэффициента затухания  $a$  (8), зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода  $(p-p_0)_{1max}$  (12), периода колебаний ударной волны давления  $T$  (11).

Для конкретной вязкой жидкости в трубопроводе проведено математическое (численное) моделирование распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе методом конечных элементов, используя COMSOL MULTIPHYSICS и две модели коэффициента трения: Черчила и Стокса.

Проведено сравнение (рис. 4) численного решения системы двух уравнений гидродинамики (1)–(4), используя модель коэффициента трения Стокса, методом конечных элементов с первым приближенным аналитическим решением (6) для более простого (упрощенного, «инженерного») варианта.

Для описания зависимости амплитуды давления от времени в определенном сечении трубопровода предложена более общая формула (12), которая включает фундаментальную формулу Н.Е. Жуковского  $\Delta P_J$  (7).

Получено совпадение максимальной величины давления полного решения  $p-p_0$  от времени  $t$  (уравнения (1)–(4) для модели коэффициента трения Стокса) с предсказанной амплитудой давления  $(p-p_0)_{1max}$  (12) от времени.

**Конфликт интересов**

Не указан.

**Рецензия**

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

**Conflict of Interest**

None declared.

**Review**

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

**Список литературы / References**

1. Физическая энциклопедия : в 5 т. / гл. ред. А.М. Прохоров. — Москва : Советская энциклопедия, 1988. — Т. 1. — 704 с.
2. Ghidaoui M.S. A review of water hammer theory and practice / M.S. Ghidaoui, M. Zhao, D.A. McInnis [et al.] // ASME Applied Mechanics Reviews. — 2005. — Vol. 58. — № 1. — P. 49–76.
3. Urbanowicz K. Numerical investigation of the cavitating flow for constant water hammer number / K. Urbanowicz, A. Bergant, U. Karadžić [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1736. — № 1. — DOI: 10.1088/1742-6596/1736/1/012040.
4. Abdeldayem O.M. Analysis of Unsteady Friction Models Used in Engineering Software for Water Hammer Analysis: Implementation Case in WANDA / O.M. Abdeldayem, D. Ferràs, S. van der Zwan [et al.] // Water. — 2021. — Vol. 13. — № 4. — 15 p. — DOI: 10.3390/w13040495.
5. Zhou L. An accurate and efficient scheme involving unsteady friction for transient pipe flow / L. Zhou, Y. Li, Y. Zhao [et al.] // Journal of Hydroinformatics. — 2021. — Vol. 23. — № 4. — P. 879–896. — DOI: 10.2166/hydro.2021.160.
6. Han Y. Effects of Closing Times and Laws on Water Hammer in a Ball Valve Pipeline / Y. Han, W. Shi, H. Xu [et al.] // Water. — 2022. — Vol. 14. — № 9. — 16 p. — DOI: 10.3390/w14091497.
7. Urbanowicz K. Water Hammer Simulation Using Simplified Convolution-Based Unsteady Friction Model / K. Urbanowicz [et al.] // Water. — 2022. — Vol. 14. — № 19. — 20 p. — DOI: 10.3390/w14193151.
8. Wu K. Energy Analysis of a Quasi-Two-Dimensional Friction Model for Simulation of Transient Flows in Viscoelastic Pipes / K. Wu, Y. Feng, Y. Xu [et al.] // Water. — 2022. — Vol. 14. — 15 p. — DOI: 10.3390/w14203258.
9. Pan T. Smoothed particle hydrodynamics with unsteady friction model for water hammer pipe flow / T. Pan, L. Zhou, C. Ou [et al.] // Journal of Hydraulic Engineering. — 2022. — Vol. 148. — № 2. — DOI: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001966.
10. Vardy A.E. On Sources of Damping in Water Hammer / A.E. Vardy // Water. — 2023. — Vol. 15. — 21 p. — DOI: 10.3390/w15030385.
11. Neyestanaki M.K. Comparison of Different Methods for Modeling Water Hammer Valve Closure with CFD / M.K. Neyestanaki [et al.] // Water. — 2023. — Vol. 15. — № 8. — 14 p. — DOI: 10.3390/w15081510.
12. Urbanowicz K. New Advances in Water Hammer Problems / K. Urbanowicz, H.M. Ramos // Water. — 2023. — Vol. 15. — № 22. — 11 p. — DOI: 10.3390/w15224004.
13. COMSOL Multiphysics 6.1 General-Purpose Simulation Software. — URL: <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics> (accessed: 16.07.2026).
14. Чарный И.А. Неустойчивое движение реальной жидкости в трубах / И.А. Чарный. — Москва : Недра, 1975. — 296 с.
15. Гидравлика / под ред. В.А. Кудинова. — Москва : Юрайт, 2018. — 386 с.
16. Смолин С.В. Моделирование распределения давления при гидравлическом ударе в закладочном трубопроводе подземного рудника / С.В. Смолин, А.Н. Анушенков // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство. — 2025. — № 35. — С. 154–162. — DOI: 10.26160/2658-3305-2025-35-154-162.
17. Савельев И.В. Курс общей физики : в 3 т. / И.В. Савельев. — Москва : Наука, 1982. — Т. 1. — 432 с.
18. Churchill S.W. Friction factor equation spans all fluid-flow regimes / S.W. Churchill // Chemical Engineering. — 1997. — Vol. 84. — № 24. — P. 91–92.

**Список литературы на английском языке / References in English**

1. Fizicheskaya enciklopediya [Physical Encyclopaedia] : in 5 vol. / editor-in-chief A.M. Prokhorov. — Moscow : Soviet Encyclopedia, 1988. — Vol. 1. — 704 p. [in Russian]
2. Ghidaoui M.S. A review of water hammer theory and practice / M.S. Ghidaoui, M. Zhao, D.A. McInnis [et al.] // ASME Applied Mechanics Reviews. — 2005. — Vol. 58. — № 1. — P. 49–76.
3. Urbanowicz K. Numerical investigation of the cavitating flow for constant water hammer number / K. Urbanowicz, A. Bergant, U. Karadžić [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1736. — № 1. — DOI: 10.1088/1742-6596/1736/1/012040.
4. Abdeldayem O.M. Analysis of Unsteady Friction Models Used in Engineering Software for Water Hammer Analysis: Implementation Case in WANDA / O.M. Abdeldayem, D. Ferràs, S. van der Zwan [et al.] // Water. — 2021. — Vol. 13. — № 4. — 15 p. — DOI: 10.3390/w13040495.
5. Zhou L. An accurate and efficient scheme involving unsteady friction for transient pipe flow / L. Zhou, Y. Li, Y. Zhao [et al.] // Journal of Hydroinformatics. — 2021. — Vol. 23. — № 4. — P. 879–896. — DOI: 10.2166/hydro.2021.160.
6. Han Y. Effects of Closing Times and Laws on Water Hammer in a Ball Valve Pipeline / Y. Han, W. Shi, H. Xu [et al.] // Water. — 2022. — Vol. 14. — № 9. — 16 p. — DOI: 10.3390/w14091497.



7. Urbanowicz K. Water Hammer Simulation Using Simplified Convolution-Based Unsteady Friction Model / K. Urbanowicz [et al.] // *Water*. — 2022. — Vol. 14. — № 19. — 20 p. — DOI: 10.3390/w14193151.
8. Wu K. Energy Analysis of a Quasi-Two-Dimensional Friction Model for Simulation of Transient Flows in Viscoelastic Pipes / K. Wu, Y. Feng, Y. Xu [et al.] // *Water*. — 2022. — Vol. 14. — 15 p. — DOI: 10.3390/w14203258.
9. Pan T. Smoothed particle hydrodynamics with unsteady friction model for water hammer pipe flow / T. Pan, L. Zhou, C. Ou [et al.] // *Journal of Hydraulic Engineering*. — 2022. — Vol. 148. — № 2. — DOI: 10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001966.
10. Vardy A.E. On Sources of Damping in Water Hammer / A.E. Vardy // *Water*. — 2023. — Vol. 15. — 21 p. — DOI: 10.3390/w15030385.
11. Neyestanaki M.K. Comparison of Different Methods for Modeling Water Hammer Valve Closure with CFD / M.K. Neyestanaki [et al.] // *Water*. — 2023. — Vol. 15. — № 8. — 14 p. — DOI: 10.3390/w15081510.
12. Urbanowicz K. New Advances in Water Hammer Problems / K. Urbanowicz, H.M. Ramos // *Water*. — 2023. — Vol. 15. — № 22. — 11 p. — DOI: 10.3390/w15224004.
13. COMSOL Multiphysics 6.1 General-Purpose Simulation Software. — URL: <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics> (accessed: 16.07.2026).
14. Charnyj I.A. Neustanovivsheesya dvizhenie real'noj zhidkosti v trubakh [Unsteady motion of a real fluid in pipes] / I.A. Charnyj. — Moscow : Nedra, 1975. — 296 c. [in Russian]
15. Gidravlika [Hydraulics] / edited by V.A. Kudinov. — Moscow : Yurayt, 2018. — 386 p. [in Russian]
16. Smolin S.V. Modelirovanie raspredeleniya davleniya pri gidravlicheskom udare v zakladochnom truboprovode podzemnogo rudnika [Modeling of pressure distribution at the water hammer in the backfill pipeline of underground mine] / S.V. Smolin, A.N. Anushenkov // *Transportnoe, gornoe i stroitel'noe mashinostroenie: nauka i proizvodstvo* [Transport, Mining and Construction Engineering: Science and Production]. — 2025. — № 35. — P. 154–162. — DOI: 10.26160/2658-3305-2025-35-154-162. [in Russian]
17. Savelyev I.V. Kurs obshchej fiziki [Course of General Physics] : in 3 vol. / I.V. Savelyev. — Moscow : Nauka, 1982. — Vol. 1. — 432 p. [in Russian]
18. Churchill S.W. Friction factor equation spans all fluid-flow regimes / S.W. Churchill // *Chemical Engineering*. — 1997. — Vol. 84. — № 24. — P. 91–92.