

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ/MATHEMATICAL MODELING, NUMERICAL METHODS AND PROGRAM COMPLEXES**DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.167.49> EDN: QQGXR5**МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТАВА МОДИФИЦИРОВАННОГО ВЯЖУЩЕГО МЕТОДОМ МНОГОФАКТОРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА**

Научная статья

**Ильина Л.В.<sup>1</sup>, Вишняков Н.С.<sup>2</sup>, Кряжиков И.А.<sup>3</sup>, Дедова Н.С.<sup>4</sup>, Агеева Я.Д.<sup>5,\*</sup>, Ткач А.А.<sup>6</sup>**<sup>1</sup> ORCID : 0000-0002-8520-4453;<sup>4</sup> ORCID : 0009-0002-2124-1447;<sup>5</sup> ORCID : 0009-0004-5827-0238;<sup>6</sup> ORCID : 0009-0007-5868-8222;<sup>1, 2, 4, 5, 6</sup> Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Новосибирск, Российская Федерация<sup>3</sup> ООО «Брусника Индустриализация», Новосибирск, Российская Федерация

\* Корреспондирующий автор (ya.ageyeva[at]sibstrin.ru)

Предложена: 24.02.2026; Принята: 30.04.2026; Опубликовано: 18.05.2026

**Аннотация**

В работе представлено комплексное исследование закономерностей формирования прочностных характеристик цементных композитов, модифицированных тонкодисперсными минеральными добавками доломитовой и диатомитовой природы, с применением методологии многофакторного планирования эксперимента (МФПЭ) и регрессионного моделирования второго порядка. Актуальность исследования обусловлена необходимостью повышения эксплуатационной надежности, технологической воспроизводимости и ресурсной эффективности бетонных смесей в условиях ужесточения нормативных требований и роста стоимости сырьевых компонентов. На основе трехфакторного трехуровневого полного факторного эксперимента установлены количественные зависимости между содержанием доломита, его дисперсностью, количеством диатомита и показателями прочности бетона при изгибе и сжатии в различные сроки твердения (1, 3, 7 и 28 суток). Получены адекватные квадратичные регрессионные модели, позволяющие описывать нелинейный характер влияния минеральных добавок, учитывать эффекты их взаимодействия и выявлять экстремальные области факторного пространства, соответствующие оптимальной структуре цементного камня. Статистическая обработка результатов с использованием критериев Стьюдента и Фишера подтвердила значимость коэффициентов регрессии и высокую степень согласованности моделей с экспериментальными данными ( $R^2 = 0,82 - 0,97$ ). Показано, что рациональное сочетание содержания и дисперсности добавок обеспечивает интенсификацию пуццоланических реакций, уплотнение микроструктуры и направленное регулирование водопотребности системы, что приводит к повышению прочности и стабильности свойств бетона. Разработанный подход позволяет перейти от эмпирического подбора составов к научно обоснованному прогнозированию характеристик композита, снижая материалоемкость и вариабельность технологических параметров. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании высокоэффективных бетонных смесей и разработке технологических регламентов их промышленного производства.

**Ключевые слова:** бетон, минеральные добавки, доломит, диатомит, многофакторное планирование эксперимента, регрессионное моделирование, оптимизация состава, прочность бетона, пуццоланическая активность, статистический анализ.

**MODELLING THE COMPOSITION OF A MODIFIED BINDING AGENT BY MEANS OF MULTIFACTORIAL EXPERIMENTAL DESIGN**

Research article

**Irina L.V.<sup>1</sup>, Vishnyakov N.S.<sup>2</sup>, Kryazhnikov I.A.<sup>3</sup>, Dedova N.S.<sup>4</sup>, Ageeva Y.D.<sup>5,\*</sup>, Tkach A.A.<sup>6</sup>**<sup>1</sup> ORCID : 0000-0002-8520-4453;<sup>4</sup> ORCID : 0009-0002-2124-1447;<sup>5</sup> ORCID : 0009-0004-5827-0238;<sup>6</sup> ORCID : 0009-0007-5868-8222;<sup>1, 2, 4, 5, 6</sup> Novosibirsk State University of architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russian Federation<sup>3</sup> Brusnika Industrialization LLC, Novosibirsk, Russian Federation

\* Corresponding author (ya.ageyeva[at]sibstrin.ru)

Suggested: 24.02.2026; Accepted: 30.04.2026; Published: 18.05.2026

**Abstract**

The work presents a complex study of the patterns forming the strength characteristics of cement composites modified with finely dispersed mineral additives of dolomite and diatomite nature, using the methodology of multifactorial experimental design (MFED) and second-order regression modelling. The relevance of the study is due to the need to improve the operational reliability, technological reproducibility and resource efficiency of concrete mixes in the context of stricter



regulatory requirements and rising costs of raw materials. Based on a three-factor, three-level full factorial experiment, quantitative correlations were established between the dolomite content, its fineness, the amount of diatomite, and the concrete's flexural and compressive strength at various curing times (1, 3, 7 and 28 days). Appropriate quadratic regression models were obtained, allowing to describe the non-linear nature of the influence of mineral additives, account for the effects of their interaction, and identify extreme regions of the factorial space corresponding to the optimal structure of the cement paste. Statistical analysis of the results using Student and Fisher criteria confirmed the significance of the regression coefficients and the high degree of agreement between the models and the experimental data ( $R^2 = 0.82-0.97$ ). It has been demonstrated that a rational combination of additive content and dispersion enhances pozzolanic reactions, densifies the microstructure and provides targeted control over the system's water demand, thereby improving the strength and stability of the concrete's properties. The developed approach makes it possible to transition from empirical selection of compositions to scientifically grounded prediction of the composite's characteristics, reducing material consumption and the variability of process parameters. The acquired results can be utilised in the design of high-performance concrete mixtures and the development of technical specifications for their industrial production.

**Keywords:** concrete, mineral additives, dolomite, diatomite, multifactorial experimental design, regression modelling, composition optimisation, concrete strength, pozzolanic activity, statistical analysis.

## Введение

Современное строительство характеризуется ростом требований к качеству, долговечности и экономической эффективности строительных материалов, прежде всего бетона, как основного конструкционного материала в гражданском и промышленном строительстве. В условиях развития рынка недвижимости [1, С. 56], сопровождающегося ужесточением нормативных требований, ростом стоимости сырьевых ресурсов и необходимостью сокращения сроков возведения объектов, особую актуальность приобретает задача рационального подбора состава бетонной смеси и ее технологических параметров.

Традиционные эмпирические методы проектирования составов бетона, основанные на последовательных однофакторных экспериментах [2, С. 57], не позволяют в полной мере учитывать взаимное влияние компонентов смеси и технологических режимов на конечные свойства бетона. Это приводит к перерасходу материалов, нестабильности качества и снижению воспроизводимости результатов при промышленном производстве. Применение методов многофакторного планирования эксперимента (МФПЭ) [3, С. 103], [4, С. 157] позволяет системно исследовать влияние состава бетонной смеси и технологических параметров (водоцементного отношения, расхода цемента, заполнителей, добавок, режимов перемешивания и твердения) на основные показатели качества бетона. Использование данного подхода обеспечивает получение математических моделей, адекватно описывающих отклик системы —  $Y$ , и позволяет выявить влияние взаимодействия факторов эксперимента  $x_n$ , что принципиально важно для оптимизации разрабатываемого состава. Ранее метод МФПЭ был успешно применен для улучшения технологических характеристик сухих строительных смесей. Были получены адекватные регрессионные модели, описывающие зависимость водоудерживающей способности, подвижности и расслаиваемости от содержания органоминеральных добавок (редиспергируемого полимерного порошка, метилцеллюлозы, гидратной извести и волокна) [5, С. 67].

Цель исследования — разработать математическую модель зависимости прочности цементного композита от параметров модифицированного вяжущего: содержания доломита, дисперсности доломита и количества диатомита, а также определить рациональные значения факторов на основе многофакторного планирования эксперимента.

Задачи исследования:

1. Сформировать математическое факторное пространство эксперимента, включающее три независимые переменные:  $x_1$  — содержание доломита;  $x_2$  — дисперсность доломита;  $x_3$  — содержание диатомита.
2. Построить матрицу полного факторного эксперимента  $3^3$  и определить функции отклика: прочность при изгибе и сжатии в возрасте 1, 3, 7 и 28 суток.
3. Получить квадратичные регрессионные модели.
4. Оценить статистическую значимость и адекватность моделей по критериям Стьюдента, Фишера и коэффициенту детерминации  $R^2$ , а также определить рациональные сочетания факторов, обеспечивающие повышение прочности бетона.

Научная новизна исследования заключается в установлении математически описанных нелинейных зависимостей прочности цементных композитов от совместного влияния доломитовой и диатомитовой добавок с учетом дисперсности доломита. В отличие от традиционного эмпирического подбора состава, в работе предложен расчетно-статистический подход, позволяющий прогнозировать прочность бетона на разных сроках твердения по регрессионным моделям второго порядка.

Оригинальность исследования состоит в том, что для системы «цемент — доломит — диатомит» прочностные характеристики рассматриваются не как результат изолированного влияния отдельных компонентов, а как функция трех взаимосвязанных факторов. Это позволило учесть линейные, квадратичные и парные эффекты взаимодействия факторов, выявить экстремальные области факторного пространства и перейти от опытного подбора состава к математически обоснованной оптимизации модифицированного вяжущего.

## Методы и принципы исследования

В системе МФПЭ план эксперимента представляется в виде матрицы планирования, строки которой соответствуют отдельным опытам, а столбцы отражают уровни контролируемых и управляемых параметров исследуемого процесса. В рамках настоящего исследования в качестве откликов процесса были приняты показатели прочности бетона при изгибе —  $R_{изг}$  и при сжатии  $R_{сж}$ , определенное в возрасте 1, 3, 7 и 28 суток твердения. Выбор

минеральных добавок для данного исследования (доломит и диатомит) обусловлен успешным опытом применения аналогичных по механизму действия компонентов (диопсид и известняк) [6, С. 2]. В качестве факторов исследуемого эксперимента, влияющих на свойства образцов, приняты:  $x_1$  — количество добавки доломита, % от массы цемента;  $x_2$  — дисперсность доломита, мкм;  $x_3$  — количество диатомита, % от массы цемента.

Современные исследования в области моделирования свойств бетона показывают, что наиболее информативными являются регрессионные модели, учитывающие не только линейный вклад факторов, но и эффекты их взаимодействия [7, С. 30]. Математическое описание модели выполнялось в виде регрессионной зависимости свойств бетонной смеси от вида и дисперсности используемых добавок. В общем виде описание может быть представлено выражением:

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon \quad (1)$$

где  $Y$  — функция отклика, случайная величина;

$x_1, x_2, \dots, x_n$  — независимые переменные, факторы исследуемого эксперимента;

$\varepsilon$  — случайная ошибка измерений.

### Основные результаты

На первом этапе моделирования использован план первого порядка, обеспечивающий получение линейной аппроксимации с учетом взаимодействий исследуемых факторов:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 \quad (2)$$

где  $x_1, x_2, x_3$  — значение факторов;

$b_0$  — свободный член уравнения регрессии, равный значению отклика при отсутствии влияния факторов;

$b_1, b_2, b_3$  — коэффициенты регрессии, указывающие на влияние определенного фактора;

$b_{12}, b_{13}, b_{23}$  — коэффициенты произведения факторов, свидетельствующие о наличии взаимодействия между ними.

Данный способ моделирования применяется для первичной оценки влияния каждого из исследуемых факторов на прочность системы. Коэффициенты  $b_i$  позволяют количественно определить вклад содержания доломита, его дисперсности и количество диатомита в формировании прочности бетона в различные сроки твердения. Члены взаимодействия  $b_{ij}$ ,  $x_i, x_j$  отражают совместное влияние количества добавки и ее дисперсности, что принципиально важно, поскольку увеличение содержания добавки при недостаточной дисперсности может приводить к эффекту разуплотнения структуры. Таким образом, линейная модель используется для выявления доминирующих факторов и их парных взаимодействий, а также для предварительного отбора рациональных областей факторного пространства. Для построения линейного уравнения регрессии независимые факторы должны варьироваться не менее, чем на двух уровнях, при этом количество строк в матрице планирования вычисляется как  $2^n$ .

На втором этапе моделирования использован план второго порядка, предназначенный для получения квадратичной регрессионной модели:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^3 b_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^3 b_{ij} x_i^2 \quad (3)$$

где  $b_{ij}$  — коэффициенты регрессии  $i$ -го фактора, возведенные в степень квадрата.

Уравнение (3) вводится для учета нелинейного характера влияния минеральных добавок на прочностные характеристики бетонной смеси. Квадратичные члены регрессии -  $b_{11}x_1^2$  и  $b_{22}x_2^2$  позволяют определить предельные значения содержания доломита и его дисперсности, при повышении которых наблюдается снижение прочности вследствие ухудшения гранулометрического состава или роста водопотребности смеси. Квадратичный член —  $b_{33}x_3^2$  отражает оптимальный диапазон содержания диатомита, при котором достигается максимальный эффект пуццоланической активности. Таким образом, квадратичная модель используется для поиска экстремума функции отклика и определения оптимальных сочетаний количества и дисперсности минеральных добавок.

Для построения регрессионной модели второго порядка независимые факторы должны варьироваться не менее чем на трех уровнях, что обусловлено необходимостью оценки квадратичных эффектов факторов. В данном случае использован трехуровневый план эксперимента, в котором реализуются все возможные сочетания  $n$  факторов на трех уровнях варьирования. Такой план представляет собой полный факторный эксперимент с числом строк в матрице планирования, равным  $3^n$ . При трех факторах количество опытов составляет 27, что обеспечивает возможность статически обоснованной оценки коэффициентов квадратичной регрессионной модели. Число неизвестных коэффициентов данной модели определяется уравнением:

$$d = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (4)$$

где  $n$  — число факторов.

В целях упрощения построения регрессионной модели и повышения корректности анализа в работе осуществлен переход от натуральных значений факторов к кодированным безразмерным переменным, определяемым соотношением:

$$x'_i = (x_i - x_{i0}) \cdot \frac{1}{\Delta x_i} \quad (5)$$

где  $x_i$  — натуральное значение  $i$ -го фактора;

$x_{i0}$  — значение  $i$ -го фактора на нулевом уровне (центральный уровень варьирования);

$\Delta x_i$  — половина интервала варьирования фактора;

$x'_i$  — кодированное (безразмерное) значение  $i$ -го фактора.

Кодированные факторы принимают значение +1 при верхнем уровне фактора:  $x_i = x_{iВ}$  и -1 при нижнем уровне фактора  $x_i = x_{iН}$ , при этом нулевое значение соответствует центральному уровню варьирования. Использование кодированных факторов позволяет исключить влияния различий в размерностях и диапазонах изменения факторов, а также обеспечить сопоставимость их вкладов в формирование функции отклика.

Для определения интервала варьирования  $i$ -го фактора воспользуемся формулой:

$$\Delta x'_i = 0,5 \cdot (x_{iВ} - x_{iН}) \quad (6)$$

Тогда обратный переход от кодированных переменных к натуральным значениям факторов осуществляется согласно уравнению:

$$x_i = x_{0i} + \Delta x_i \cdot x'_i \quad (7)$$

Планы второго порядка формировались путем дополнения базового плана первого порядка  $2^n$ , предназначенного для построения линейной регрессионной модели, дополнительными опытами. Эти опыты включали комбинации, в которых по меньшей мере один фактор принимал нулевой уровень, что позволило учесть нелинейный характер влияния факторов и обеспечить возможность оценки квадратичных членов регрессионного уравнения.

Натуральные значения факторов, соответствующие кодированным уровням приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Значение факторов варьирования

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.167.49.1>

Наименование фактора	Условное обозначение	Уровень варьирования факторов		
		-1	0	1
Количество доломита, %	$x_1$	3	6	9
Дисперсность доломита, мкм	$x_2$	20	40	60
Количество диатомита, %	$x_3$	4	8	12

Матрица планирования полного факторного эксперимента  $3^3$  обладает рядом важных функциональных свойств, обеспечивающих корректность статистической обработки экспериментальных данных:

1. Симметричность — сумма элементов каждого столбца, соответствующего факторам  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  равна нулю. Данное свойство обеспечивает независимость оценки свободного члена регрессионного уравнения от влияния факторов и позволяет получить несмещенные оценки средних значений прочности бетона при изгибе и сжатии.

2. Ортогональность — сумма произведений соответствующих элементов любых двух столбцов различных факторов равна нулю. Это свойство гарантирует статистическую независимость оценок коэффициентов регрессии, что особенно важно при анализе совместного влияния содержания доломита, его дисперсности и количества диатомита на прочностные характеристики бетона.

Матрица планирования полного факторного эксперимента  $3^3$  приведена в таблице 2.

Таблица 2 - Матрица планирования эксперимента

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.167.49.2>

№ состава	Матрица		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-1	-1	-1
2	-1	-1	0
3	-1	-1	+1
4	-1	0	-1
5	-1	0	0
6	-1	0	+1
7	-1	+1	-1
8	-1	+1	0
9	-1	+1	+1
10	0	-1	-1
11	0	-1	0
12	0	-1	+1
13	0	0	-1



№ состава	Матрица		
	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>
14	0	0	0
15	0	0	+1
16	0	+1	-1
17	0	+1	0
18	0	+1	+1
19	+1	-1	-1
20	+1	-1	0
21	+1	-1	+1
22	+1	0	-1
23	+1	0	0
24	+1	0	+1
25	+1	+1	-1
26	+1	+1	0
27	+1	+1	+1

На основании сформированной матрицы планирования и экспериментальных данных были выполнены расчеты коэффициентов регрессии квадратичных моделей для показателей прочности бетона при изгибе и сжатии в возрасте 1, 3, 7, 28 суток твердения. Определение коэффициентов регрессии осуществлялось методом наименьших квадратов и использованием кодированных значений факторов. С учетом ортогональности плана оценки коэффициентов регрессии вычислялись независимо друг от друга, согласно уравнению:

$$F_b = \sum_{i=1}^k (y_j - y'_j)^2 \quad (8)$$

где  $y_j$  — значения отклика, полученные экспериментально;  
 $y'_j$  — значения отклика, вычисленные по уравнению регрессии;  
 $k$  — число строк в матрице планирования, равное числу опытов.

В рамках принятой статистической модели погрешностей, учитывая щей некоррелированность и равноточность результатов измерений отклика, задача минимизации функции приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$X^T X b = X^T y \quad (9)$$

где  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}^T$  — вектор экспериментальных значений отклика;  
 $X$  — матрица планирования эксперимента размерностью  $k(n+1)$ , включающая столбец единиц, столбцы значений факторов и их комбинаций;

$b = \{b_0, b_1, \dots, b_d\}^T$  — вектор искомых значений коэффициентов регрессии.

Решение системы (9) методом наименьших квадратов при использовании обратной матрицы имеет вид:

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (10)$$

Данное выражение справедливо для случая однократных опытов. В условиях настоящего исследования, когда в каждой точке плана, соответствующей определенной комбинации значений факторов, проводилось  $n$  параллельных испытаний образцов, в качестве элементов вектора  $y$  использовались средние значения отклика. Такой подход позволяет снизить влияние случайных погрешностей, обусловленных технологической неоднородностью бетонной смеси и разбросом прочностных характеристик образцов, и обеспечивает повышение достоверности оценки коэффициентов регрессии.

На основании результатов испытаний на прочность при продолжительности твердения 1 сутки построено семейство регрессионных моделей второго порядка для:

1. Определения прочности при изгибе после 1, 3, 7, 28 суток:

$$y_{1_{изг}}(x_1 x_2 x_3) = 4,07 - 0,22x_1 - 0,01x_2 + 0,12x_3 + 0,001x_1^2 - 0,01x_3^2 \quad (11)$$

$$y_{3_{изг}}(x_1 x_2 x_3) = 4,18 - 0,1x_1 - 0,02x_2 + 0,47x_3 - 0,014x_1^2 - 0,03x_3^2 \quad (12)$$

$$y_{7_{изг}}(x_1 x_2 x_3) = 6,59 - 0,1x_1 - 0,03x_2 + 0,24x_3 + 0,002x_2^2 - 0,02x_3^2 \quad (13)$$

$$y_{28_{изг}}(x_1 x_2 x_3) = 9,26 - 0,13x_1 - 0,03x_2 + 0,30x_3 - 0,01x_1^2 + 0,002x_2^2 - 0,02x_3^2 \quad (14)$$

2. Определения прочности при сжатии после 1, 3, 7, 28 суток:



$$y1_{sg}(x_1, x_2, x_3) = 18,06 + 0,43x_1 - 0,18x_2 + 2,42x_3 - 0,18x_1^2 + 0,001x_2^2 - 0,14x_3^2 \quad (15)$$

$$y3_{sg}(x_1, x_2, x_3) = 22,4 - 0,27x_1 - 0,12x_2 + 3,24x_3 - 0,11x_1^2 + 0,001x_2^2 - 0,19x_3^2 \quad (16)$$

$$y7_{sg}(x_1, x_2, x_3) = 30,51 - 0,57x_1 - 0,2x_2 + 4,07x_3 - 0,13x_1^2 + 0,001x_2^2 - 0,24x_3^2 \quad (17)$$

$$y28_{sg}(x_1, x_2, x_3) = 40,96 - 0,57x_1 - 0,24x_2 + 5,84x_3 - 0,19x_1^2 + 0,001x_2^2 - 0,34x_3^2 \quad (18)$$

В уравнениях (11–18) коэффициенты представлены в натуральных единицах, что необходимо для прямой интерпретации результатов в контексте экспериментов. Использование натуральных значений позволяет оценить влияние конкретного количества добавки доломита или диатомита и их дисперсности на прочностные характеристики бетонной смеси, измеряемые в экспериментах. Это обеспечивает практическую применимость моделей: прямой использование полученных коэффициентов для корректировки состава смеси без дополнительных пересчетов. Для оценки статической значимости коэффициентов использовалась стандартная Т-статистика:

$$T_{bj} = \frac{b_j}{S_{bj}} \quad (19)$$

где  $S_{bj}^2$  — выборочная дисперсия коэффициента;

$S^2$  — оценка обобщенной дисперсии;

Сравнение рассчитанных  $T_{bj}$  с критическим значением  $t_{1-2, k-d} = 2,11$  при  $\alpha = 0,05$ , позволило определить какие коэффициенты являются статистически значимыми. В ходе анализа экспериментальных данных было выявлено, что для некоторых коэффициентов линейных и квадратичных членов условие  $T_{bj} > t_{крит}$  не выполняется. Эти коэффициенты были исключены их окончательной версии уравнений (11–18), так как их влияние на отклик в рамках проведенного эксперимента статистически не подтверждено. Данный подход обеспечивает простоту и адекватность моделей, исключая малозначимые параметры и снижая вероятность переобучения модели на экспериментальных данных. Выбор уровня значимости  $\alpha = 0,05$  обусловлен практическими данными, применяемыми в инженерных и строительных исследованиях [8, С. 9], где этот уровень обеспечивает баланс между вероятностью ошибки первого рода (ложноположительной значимости коэффициента) и чувствительностью теста. Критическое значение  $t$  статистики определяется разностью между числом опытов и числом коэффициентов модели второго порядка. По таблице распределения Стьюдента [9, С. 98] для  $\alpha = 0,05$  и  $k - d = 17$  степеней свободы двухсторонний критический квантиль равен 2,11. Это значение означает, что если рассчитанное  $T_{bj}$  больше 2,11 — коэффициент статистически значим на уровне 5% вероятности ошибки.

Также для определения качества предложенных моделей для каждого из уравнений (11–18) был вычислен множественный коэффициент детерминации  $R^2$ , который отражает долю вариации отклика, объясненную изменением факторов ( $0 \leq R^2 \leq 1$ ). Для проверки статистической значимости всей регрессионной модели применялся критерий Фишера:

$$F = \frac{R^2(k-d)}{(1-R^2)(d-1)} \quad (20)$$

Значения множественного коэффициента детерминации и критерия Фишера для уравнений (11–18) приведены в таблице 3.

Таблица 3 - Значения  $R^2$  и F

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.167.49.3>

Исследуемый параметр	Количество дней	Обозначение коэффициента	
		$R^2$	F
Прочность на изгиб	1	0,97	866,77
Прочность на изгиб	3	0,84	60,77
Прочность на изгиб	7	0,88	83,95
Прочность на изгиб	28	0,92	137,50
Прочность на сжатие	1	0,96	303,75
Прочность на сжатие	3	0,96	276,4
Прочность на сжатие	7	0,96	280,65
Прочность на сжатие	28	0,82	54,56

Рассчитанные значения критерия Фишера сравнивались с квантилем распределения Фишера  $F_{1-\alpha; 2; k-3}$ . Для выбранного уровня значимости  $\alpha = 0,05$  критическое значение составило 3,403. Сравнение показало, что все уравнения нелинейной множественной регрессии являются статистически значимыми на данном уровне доверия. Анализ данных, представленных в таблице 3, свидетельствует о том, что построенные уравнения адекватно описывают

зависимость прочностных свойств бетонной смеси от состава и дисперсности минеральных добавок и хорошо согласуются с экспериментальными результатами.

Для наглядной иллюстрации влияния факторов на отклик были построены тернарные графики (Рис. 1) и (Рис. 2) представляющие собой поверхность отклика, зависящего от трех факторов. Каждая точка графика соответствует расчетам по формулам (11–18) для конкретного набора значений  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . Тернарные графики построены с использованием программного пакета STATISTICA [10] и отображают изолинии отклика, что позволяет визуально оценить взаимное влияние факторов и согласовать математические модели с экспериментальными наблюдениями.

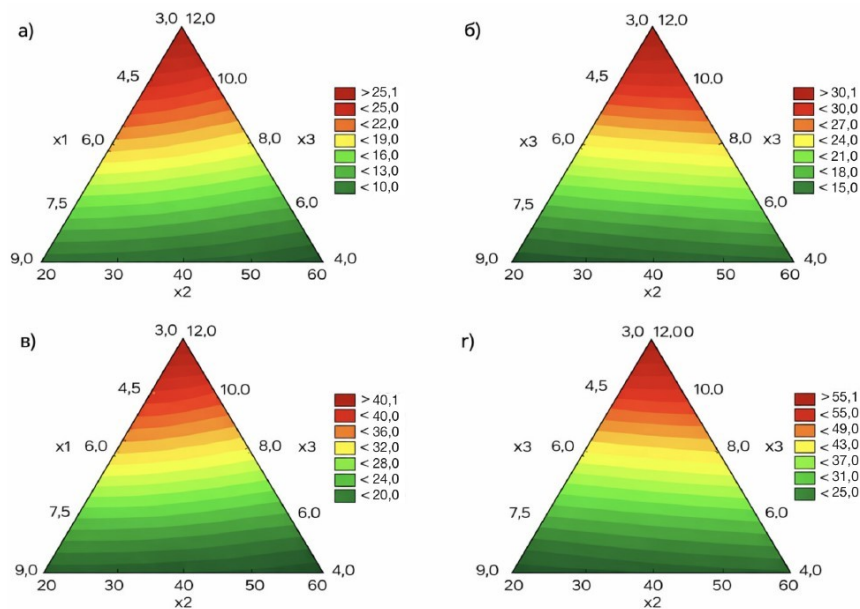


Рисунок 1 - Графики зависимости прочности при изгибе от количества доломита ( $x_1$ ), дисперсности доломита ( $x_2$ ), количества диатомита ( $x_3$ ) для разной продолжительности твердения:  
 а - 1 сутки; б - 3 суток; в - 7 суток; г - 28 суток  
 DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.167.49.4>

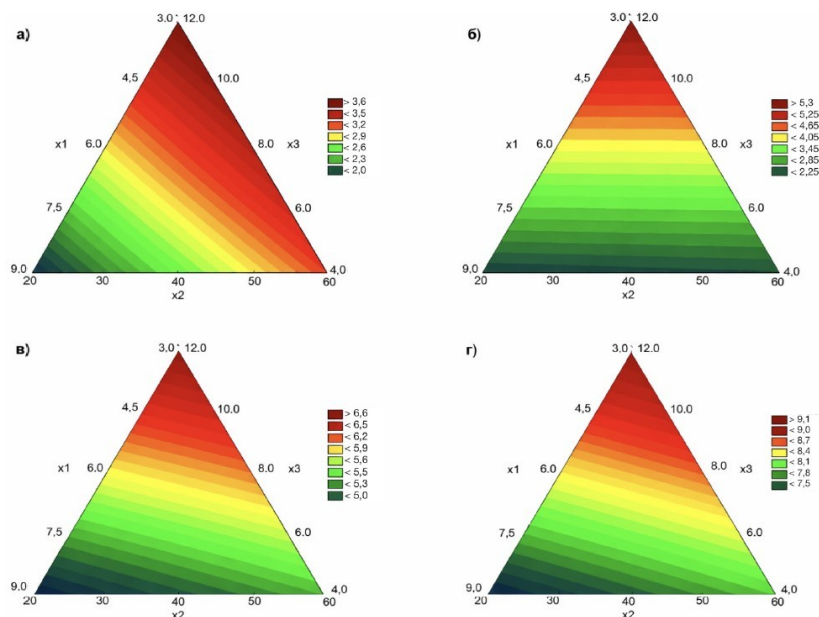


Рисунок 2 - Графики зависимости прочности при сжатии от количества доломита ( $x_1$ ), дисперсности доломита ( $x_2$ ), количества диатомита ( $x_3$ ) для разной продолжительности твердения:  
 а - 1 сутки; б - 3 суток; в - 7 суток; г - 28 суток  
 DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.167.49.5>



Одной из важнейших характеристик корректности проведения экспериментальных исследований является воспроизводимость результатов [11], [12], отражающая степень близости значений отклика, полученных при повторных испытаниях в идентичных условиях.

В рамках настоящего исследования воспроизводимость оценивалась на основе серийных испытаний образцов, выполненных в каждой точке плана эксперимента. Для определения прочности при изгибе использовались серии из трёх образцов, а для прочности при сжатии — из шести образцов, что соответствует общепринятым требованиям к испытаниям строительных материалов.

Для каждой точки плана вычислялось среднее значение отклика и выполнялась оценка результатов с использованием выборочной дисперсии.

Для сопоставления степени разброса результатов при различных уровнях отклика рассчитывался коэффициент вариации. Анализ полученных значений показал, что коэффициент вариации для прочности при изгибе находится в пределах 2,8–4,6%, а для прочности при сжатии — в пределах 3,5–5,8%, что соответствует высокой степени воспроизводимости результатов для материалов на основе цементных вяжущих.

Для проверки однородности дисперсий, являющейся необходимым условием корректности применения методов регрессионного анализа, использовался критерий Кохрена [13]:

$$G = \frac{\max(s_j^2)}{\sum_{j=1}^k s_j^2}, \quad (21)$$

где  $k$  — число точек плана эксперимента.

В результате расчётов получено значение критерия  $G = 0,21$ .

Критическое значение критерия Кохрена при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , числе опытов  $k = 27$  и числе повторностей  $r = 3-6$  составляет  $G_{кр} = 0,35$ . т.к условие  $G < G_{кр}$  выполняется можно сделать вывод об однородности дисперсий экспериментальных данных.

Однородность дисперсий является необходимым условием корректного применения метода наименьших квадратов при оценке коэффициентов регрессионных моделей. Выполнение данного условия свидетельствует об отсутствии систематического увеличения разброса отклика при изменении факторов и обеспечивает статистическую состоятельность полученных моделей.

### Заключение

Таким образом, проведенное исследование демонстрирует, что методы МФПЭ и регрессионного моделирования второго порядка являются эффективным инструментом для оптимизации состава бетонных смесей, позволяя:

1. Оценить индивидуальное и совместное влияние минеральных добавок на прочностные свойства бетона.
2. Построить адекватные математические модели, пригодные для практического использования в проектировании составов.
3. Обеспечить достоверность прогнозов и снизить неопределенность, связанную с технологической вариабельностью компонентов смеси.
4. Визуализировать влияние факторов на свойства смеси, что облегчает принятие решений при разработке составов бетона.

Полученные результаты имеют прямое практическое применение в гражданском и промышленном строительстве и могут быть использованы при разработке технологических регламентов производства бетонных смесей с повышенной прочностью и стабильностью свойств, что соответствует современным требованиям к качеству, долговечности и экономической эффективности строительных материалов.

### Дополнительные материалы

Дополнительные материалы доступны на онлайн-странице статьи.

### Конфликт интересов

Не указан.

### Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

### Supplementary materials

Supplementary materials are available online on the article's webpage.

### Conflict of Interest

None declared.

### Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

### Список литературы / References

1. Задонский Г. Рынок недвижимости / Г. Задонский // Экономическое развитие России. — 2016. — 23(1). — С. 55–60. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/rynok-nedvizhimosti> (дата обращения: 20.02.26).
2. Степанов К.С. Оптимизация процессов экстракции биологически активных веществ из природного сырья на основе принципа QBD "Качество через разработку" / К.С. Степанов, В.В. Сорокин, Л.Ю. Александрова и др. // Медицинский вестник Башкортостана. — 2025. — 4(118). — С. 55–59. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/optimizatsiya-protsessov-ekstraksii-biologicheskii-aktivnyh-veschestv-iz-prirodnogo-syrya-na-ovnove-printsipa-qbd-kachestvo-cherez> (дата обращения: 20.02.26).



3. Поляков С.И. Регрессионные модели прочности контрольных образцов бетона / С.И. Поляков, Д.А. Зимин, С.Ю. Корж // Информационные технологии в строительных, социальных и экономических системах. — 2020. — 2(20). — С. 103–107. (дата обращения: 20.02.26).
4. Ильина Л.В. Влияние модифицирования цементной матрицы тонкодисперсной минеральной добавкой на её характеристики / Л.В. Ильина, С.М. Анпилов, Д.А. Цекарь // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. — 2025. — 1(62). — С. 155–165. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vliyanie-modifitsirovaniya-tsementnoy-matritsy-tonkodispersnoy-mineralnoy-dobavkoj-na-eyo-harakteristiki> (дата обращения: 20.02.26).
5. Ильина Л.В. Улучшение технологических характеристик сухих смесей модифицированием органоминеральными добавками / Л.В. Ильина, И.Н. Мухина, А.К. Туляганов // Известия высших учебных заведений. Строительство. — 2024. — 12(792). — С. 65–77. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=77102886> (дата обращения: 20.02.26). — DOI: 10.32683/0536-1052-2024-792-12-65-77
6. Il'ina L. Dry building mixture with complex dispersed mineral additives / L. Il'ina, I. Mukhina, A. Teplov // AIP Conference Proceedings. — 2016. — 1698. — P. 07001. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27141909> (accessed: 20.02.26). — DOI: 10.1063/1.4937871
7. Михайлова Н.А. Множественные регрессионные модели прочности бетона на сжатие / Н.А. Михайлова, И.В. Стефаненко // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. — 2017. — 49(68). — С. 30–42. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30008868> (дата обращения: 20.02.26).
8. Материалы и изделия строительные. Статистические методы контроля качества. — Введ. 2012-01-01. — Москва: Стандартинформ, 2011. — 23 с. — URL: <https://files.stroyinf.ru/Data/510/51003.pdf>. (дата обращения: 19.02.26).
9. Миронова Л.И. Основы математической статистики в алгоритмах / Л.И. Миронова, Н.И. Фомин, А.Д. Вилисова. — Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2023. — 108 с. — URL: <https://elar.urfu.ru/handle/10995/127379>. (дата обращения: 19.02.26).
10. Таблицы времен жизни. — URL: [https://lib.uni-dubna.ru/search/files/statistica/glossary/gloss\\_t.html#Categorized%20Contour-Areas%20\(Ternary%20graph\)](https://lib.uni-dubna.ru/search/files/statistica/glossary/gloss_t.html#Categorized%20Contour-Areas%20(Ternary%20graph)) (дата обращения: 19.02.26).
11. Li C. The Effects of Diatomite as an Additive on the Macroscopic Properties and Microstructure of Concrete / C. Li, G Li, D. Chen et al. // Materials. — 2023. — 16(5). — URL: <https://pub.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC10004572/> (accessed: 20.02.26). — DOI: 10.3390/ma16051833
12. Ozcan G. Efficient machine learning models for estimation of compressive strengths of zeolite and diatomite substituting concrete in sodium chloride solution / G. Ozcan, B. Kocak, E. Gulbandilar et al. // Arabian Journal for Science and Engineering. — 2024. — 49(10). — P. 14241–14256. — URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s13369-024-09042-1> (accessed: 20.02.26). — DOI: 10.1007/s13369-024-09042-1
13. Ahmed A. Assessing the effects of supplementary cementitious materials on concrete properties: a review / A. Ahmed // Discover Civil Engineering. — 2024. — 1. — URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s44290-024-00154-z> (accessed: 20.02.26). — DOI: 10.1007/s44290-024-00154-z

### Список литературы на английском языке / References in English

1. Zadonskij G. Ry'nok nedvizhimosti [Real estate market] / G. Zadonskij // Economic development of Russia. — 2016. — 23(1). — P. 55–60. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/rynok-nedvizhimosti> (accessed: 20.02.26). [in Russian]
2. Stepanov K.S. Optimizaciya processov e'kstrakcii biologicheskii aktivny'x veshhestv iz prirodnoho sy'r'ya na osnove principa QBD "Kachestvo cherez razrabotku" [Optimization of extraction processes of biologically active substances from natural raw materials based on the QBD principle "Quality by design"] / K.S. Stepanov, V.V. Sorokin, L.Yu. Aleksandrova et al. // Bashkortostan Medical Bulletin. — 2025. — 4(118). — P. 55–59. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/optimizatsiya-protsessov-ekstraktsii-biologicheskii-aktivnyh-veshchestv-iz-prirodnogo-syrya-na-osnove-printsipa-qbd-kachestvo-cherez> (accessed: 20.02.26). [in Russian]
3. Polyakov S.I. Regressionny'e modeli prochnosti kontrol'ny'x obrazczov betona [Regression control strength models concrete samples] / S.I. Polyakov, D.A. Zimin, S.Yu. Korzh // Information technologies in construction, social and economic systems. — 2020. — 2(20). — P. 103–107. (accessed: 20.02.26). [in Russian]
4. Il'ina L.V. Vliyanie modifitsirovaniya cementnoj matritsy' tonkodispersnoj mineral'noj dobavkoj na eyo karakteristiki [Influence of modification of cement matrix with fine mineral additive on its characteristics] / L.V. Il'ina, S.M. Anpilov, D.A. Cekar' // FEFU: SCHOOL OF ENGINEERING BULLETIN. — 2025. — 1(62). — P. 155–165. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vliyanie-modifitsirovaniya-tsementnoy-matritsy-tonkodispersnoy-mineralnoy-dobavkoj-na-eyo-harakteristiki> (accessed: 20.02.26). [in Russian]
5. Il'ina L.V. Uluchshenie texnologicheskix karakteristik suxix smesey modifitsirovaniem organomineral'ny'mi dobavkami [Improving dry mixtures technological characteristics by using organomineral additives modification] / L.V. Il'ina, I.N. Muxina, A.K. Tulyaganov // News of Higher Educational Institutions. Construction. — 2024. — 12(792). — P. 65–77. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=77102886> (accessed: 20.02.26). — DOI: 10.32683/0536-1052-2024-792-12-65-77 [in Russian]
6. Il'ina L. Dry building mixture with complex dispersed mineral additives / L. Il'ina, I. Mukhina, A. Teplov // AIP Conference Proceedings. — 2016. — 1698. — P. 07001. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27141909> (accessed: 20.02.26). — DOI: 10.1063/1.4937871
7. Mixajlova N.A. Mnozhestvenny'e regressionny'e modeli prochnosti betona na szhatie [Multiple regression models of concrete compressive strength] / N.A. Mixajlova, I.V. Stefanenko // Bulletin of Volgograd State University of Architecture and



- Civil Engineering. Series: Construction and Architecture. — 2017. — 49(68). — P. 30–42. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30008868> (accessed: 20.02.26). [in Russian]
8. Materialy' i izdeliya stroitel'ny'e. Statisticheskie metody' kontrolya kachestva [Statistical methods for quality control of building materials and components]. — Introduced 2012-01-01. — Moscow: Standartinform, 2011. — 23 p. — URL: <https://files.stroyinf.ru/Data/510/51003.pdf>. (accessed: 19.02.26). [in Russian]
9. Mironova L.I. Osnovy' matematicheskoy statistiki v algoritmax [Fundamentals of mathematical statistics in algorithms] / L.I. Mironova, N.I. Fomin, A.D. Vilisova. — Ekaterinburg: Izdatel'stvo Ural'skogo universiteta, 2023. — 108 p. — URL: <https://elar.urfu.ru/handle/10995/127379>. (accessed: 19.02.26). [in Russian]
10. Tablitsi vremen zhizni [Tables of lifetimes]. — URL: [https://lib.uni-dubna.ru/search/files/statistica/glossary/gloss\\_t.html#Categorized%20Contour-Areas%20\(Ternary%20graph\)](https://lib.uni-dubna.ru/search/files/statistica/glossary/gloss_t.html#Categorized%20Contour-Areas%20(Ternary%20graph)) (accessed: 19.02.26). [in Russian]
11. Li C. The Effects of Diatomite as an Additive on the Macroscopic Properties and Microstructure of Concrete / C. Li, G Li, D. Chen et al. // *Materials*. — 2023. — 16(5). — URL: <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC10004572/> (accessed: 20.02.26). — DOI: 10.3390/ma16051833
12. Ozcan G. Efficient machine learning models for estimation of compressive strengths of zeolite and diatomite substituting concrete in sodium chloride solution / G. Ozcan, B. Kocak, E. Gulbandilar et al. // *Arabian Journal for Science and Engineering*. — 2024. — 49(10). — P. 14241–14256. — URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s13369-024-09042-1> (accessed: 20.02.26). — DOI: 10.1007/s13369-024-09042-1
13. Ahmed A. Assessing the effects of supplementary cementitious materials on concrete properties: a review / A. Ahmed // *Discover Civil Engineering*. — 2024. — 1. — URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s44290-024-00154-z> (accessed: 20.02.26). — DOI: 10.1007/s44290-024-00154-z