

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ/MECHANICS OF FLUIDS, GAS AND PLASMA

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.165.87 EDN: ZRAWXE

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЛИННЫХ ВОЛН ЖИДКОСТИ С ВИХРЯМИ И ДАВЛЕНИЕМ

Научная статья

Тимченко Т.В.[1,] *, Краснослободцева Т.П.[2]
[2] ORCID : 0000-0002-5435-2023;
[1, 2] МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (timchenkotv[at]yandex.ru)

Аннотация

Исследование вертикальных движений в приближении «мелкой воды» — сложная и малоизученная задача. В работе проведён соответствующий анализ сильно нелинейных движений жидкости на «мелкой воде» с вертикальными движениями, которые описываются уравнениями Бенни и их модификациями. Для длинных волн в завихренной жидкости установлена связь с движениями газа и разряженной плазмы. Показано, что динамика идеальной одномерной жидкости определяется решениями кинетического уравнения власовского типа, которые и были проанализированы. Построены новые точные решения, описывающие сильно нелинейные волновые движения с внешним давлением, что позволяет анализировать на этой основе такие явления, как цунами при набегании волны на берег. Точные аналитические решения в нелинейной гидродинамике крайне ценны для верификации численных моделей. В работе использованы методы группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: автомодельные решения, сильно нелинейные волны, «мелкая вода», функция распределения, характеристическая функция, интегро-дифференциальные уравнения, разрушение плотины.

EXACT SOLUTIONS IN THE THEORY OF NONLINEAR LONG WAVES IN FLUIDS WITH VORTEXES AND PRESSURE

Research article

Timchenko T.V.[1,] *, Krasnoslobodtseva T.P.[2]
[2] ORCID : 0000-0002-5435-2023;
[1, 2] MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation

* Corresponding author (timchenkotv[at]yandex.ru)

Abstract

The study of vertical motions in the “shallow” water approach is a complex and understudied problem. This paper presents an analysis of highly nonlinear fluid motions in 'shallow' water with vertical motions, which are described by Benney equations and their modifications. For long waves in a vortex fluid, a connection with the movements of gas and rarefied plasma has been established. It has been shown that the dynamics of an ideal one-dimensional fluid is determined by solutions of the Vlasov-type kinetic equation, which have been analysed. New exact solutions have been constructed that describe strongly nonlinear wave motions with external pressure, which allows to study phenomena such as tsunamis when waves hit the shore. Exact analytical solutions in nonlinear hydrodynamics are extremely valuable for verifying numerical models. The work uses methods of group analysis of partial differential equations.

Keywords: automodel solutions, highly nonlinear waves, 'shallow' water, distribution function, characteristic function, integro-differential equations, dam break.

Введение

Описание распространения волн в завихренной жидкости является актуальной проблемой математического моделирования вообще и математической теории волн в частности [1]. Основные известные результаты относятся к теории потенциальных волн [2], [3]. Описание волновых процессов в завихренной жидкости находится в начале своего становления. Диапазон практического применения получаемых результатов простирается от моделирования разрушительных цунами в прибрежной зоне океана до вычисления силовых характеристик воздействия развитых волн на корабли и прибрежные сооружения [4].

Процесс распространения длинных волн (по сравнению с толщиной завихренного слоя жидкости) описывается системой уравнений Бенни [5], которую мы приведем в одномерном (по пространственной переменной) случае:

$$u_t + uu_x - u_y\left(\int_0^y u_x dy\right) + h_x = 0; h_t + \left(\int_0^h u dy\right)_x = 0. \quad (1)$$

Здесь t — время, x — пространственная координата, $h(t,x)$ — неизвестная высота свободной поверхности однородной тяжёлой жидкости, $(g \neq 0)$, $u(t,x,y)$ — горизонтальная компонента скорости жидкости. Индекс внизу означает производную по соответствующей переменной. В рассматриваемой системе координат ускорение свободного падения g=1 плотность жидкости также равна 1.

Задачи с неизвестной свободной границей трудно решать, поэтому весьма важной представляется проблема сведения системы (1) к уравнениям, которые не содержат в себе неизвестной свободной поверхности, в данном случае к некоторым интегро-дифференциальным уравнениям, сродни возникающим в теории бесстолкновительной плазмы.

Кинетическое уравнение для описания длинноволновых движений в завихренной жидкости

Введем бесконечную систему моментов

$$A^n = A^n(t,x) = \int_0^{h(t,x)} (u(t,x,y))^n dy. \tag{2}$$

Бенни было показано, что система уравнений (1) порождает бесконечную систему уравнений для моментов

$$A_t^n + A_x^{n+1} + nA^{n-1}A_x^0 = 0, \quad n = 0,1,2,3,\dots \tag{3}$$

Пусть существует функция распределения (плотность вероятности) *f(t,x,v)* которую далее пока будем записывать как *f(v)* рассматривая переменные *t,x* как параметры. Для *f(v)* определим характеристическую функцию как

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-ikv}dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}v^n dv = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} v^n f dv = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{(-ik)^n}{n!}. \tag{4}$$

Здесь:

$$A^n = \int_{-\infty}^{\infty} f v^n dv. \tag{5}$$

Тогда корректно следующее выражение функции *f(v)*, через моменты функции *f:*

$$\begin{gathered} f(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{ikv}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}A^n e^{ikv}dv = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}A^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)^n e^{ikv}dv = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}A^n\delta^{(n)}(v) \end{gathered} \tag{6}$$

Обозначение $\delta^{(n)}(v) = \frac{d^n\delta(v)}{dv^n}$ – производная функционала Дирака соответствующего порядка. Таким образом, по данным моментам функция распределения *f(v)* восстанавливается однозначно, как обобщенная функция, действующая, например, на функции из пространства Шварца по переменному *v*. Такие функции обладают моментами $A^n = \int_{-\infty}^{\infty} f v^n dv$ для любого целого неотрицательного числа *n*.

Справедлива следующая теорема:

Если функция распределения определена с помощью формулы $f(t,x,v) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}A^n(t,x)\delta^{(n)}(v)$, где моменты $A^n(t,x)$ удовлетворяют бесконечной моментной системе уравнений (3), тогда функция распределения $f(t,x,v) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}A^n(t,x)\delta^{(n)}(v)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x,v)dv\right) = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Оно состоит в прямой проверке. Именно:

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\frac{\partial A^n}{\partial t}}{n!}\delta^{(n)}(v); \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\frac{\partial A^n}{\partial x}}{n!}\delta^{(n)}(v); \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f dv\right) = \frac{\partial A^0}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n A^n}{n!}\delta^{(n+1)}(v). \end{gathered} \tag{8}$$

Рассматривая написанные выражения как обобщенные функции, вычислим их действия на основные функции из пространства Шварца $v^n\eta(v)$ где $\eta(v)$ — некоторая произвольная бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 в некоторой окрестности нуля и равная нулю вне большой окрестности нуля. Опуская для кратности в записи $\eta(v)$, будем писать v^n вместо $v^n\eta(v)$. Применим обобщенную функцию $\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x,v)dv\right)$ последовательно к v^n. Тогда получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t},1\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\frac{\partial A^n}{\partial t}}{n!}\delta^{(n)}(v),1\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^0\frac{\partial A^0}{\partial t}}{0!}\delta^{(0)}(v)_s 1\right) = \frac{\partial A^0}{\partial t};$$

Аналогично $\left(v\frac{\partial f}{\partial x},1\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x},v\right) = \frac{\partial A^1}{\partial x}$. Таким образом, получено первое уравнение цепочки $\frac{\partial A^0}{\partial t} + \frac{\partial A^1}{\partial x} = 0.$ Применение оператора к v^n дает бесконечную систему уравнений $A_t^n + A_x^{n+1} + nA^{n-1}A_x^0 = 0, \quad n = 0,1,2,3,\dots$ Таким образом, моментная цепочка Бенни построена.

Если моменты цепочки позволяют получить непрерывную быстро убывающую на бесконечности функцию *f(v)*, то цепочка уравнений может быть получена прямым вычислением интегралов от уравнения (7). Уравнение (7) является уравнением с самосогласованным полем, аналогичное тем уравнениям, которые были построены для плазмы А.А. Власовым.

Описание классической теории мелкой воды (shallow water) и их вихревых обобщений

Пусть горизонтальная компонента скорости жидкости *u(t,x)* не зависит от переменной *y*.

Тогда $A^m = \int_0^h (u(t,x))^m dy = (u(t,x))^m h(t,x)$; $A^0 = \int_0^h (u(t,x))^0 dy = h(t,x)$.

Характеристическая функция в этом случае принимает вид:

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!}(u(t,x))^n h(t,x) = h(t,x)e^{-\mathrm{iiv}(t,x)} \quad (9)$$

Тогда функция распределения будет иметь вид

$$f(t,x,v) = \frac{1}{2\pi} h(t,x) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iku(t,x) + ikv)dv = h(t,x)\delta(v - u(t,x)). \quad (10)$$

При этом функции *h(t,x), u(t,x)* удовлетворяют классической системе уравнений мелкой воды

$$\begin{cases} h_t + \left(\int_0^{h(t,x)} u(t,x,y)dy\right)_x = 0, \\ u_t + uu_x + h_x = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Рассмотрим теперь случай линейной зависимости функции скорости по переменной *y* таким образом $u(t,x,y)=u^0(t,x)+\ u^1(t,x)y$. Заданный функциональный вид решения с необходимостью приводит к тому, что $u^1(t,x)=c=const$ и возникает уравнения мелкой воды в завихренной жидкости

$$\begin{cases} h_t^0 + \left(u^0 h\right)_x + \left(c\frac{(h)^2}{2}\right)_x = 0, \\ u_t^0 + u^0 u_x^0 + h_x = 0. \end{cases} \quad (12)$$

В этом случае ряд $f(t,x,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A^n(t,x)\delta^{(n)}(v)$ может быть просуммирован, и функция распределения примет следующий вид $f(t,x,v) = -\frac{1}{u^1}\left(\Theta\left(v - u^0 - u^1 h\right) - \Theta\left(v - u^0\right)\right)$. Здесь $\Theta(v)-$ функция Хевисайда.

Аналогично рассматриваются произвольные полиномиальные аппроксимации горизонтальной скорости по переменной $y : u(t,x,y) = \sum_{n=1}^{N} u^n(t,x) \cdot (y)^n$.

Примером точного решения системы (12) являются обобщение автомодельного решения уравнений мелкой воды $h(t,x) = \frac{1}{t}$; $u(t,x) = \frac{x}{t} + \frac{c}{t}y$.

Постоянная величина *c* находится из начальных условий.

Уравнение (7) имеет «автомодельную» переменную $\eta = x/t$. Фактически подобная ситуация наблюдается, если задача не содержит конечный горизонтальный масштаб. Классическая проблема указанного типа — задача о разрушении плотины. В стандартной теории мелкой воды она решается с помощью метода характеристик [6]. Для уравнений Бенни $u=u(t,x,y)$, так что $u_y \neq 0$. Это означает, что есть вертикальное «перемешивание» и фактически в задаче возникает дисперсия за счет появления характерных размеров у вихревых образований в жидкости. Ситуация по сравнению с классической теории мелкой воды гораздо более сложная, но в кинетическом виде допускающая качественный анализ. При использовании уравнений Бенни возможен корректный учёт возвратного течения при набегании волны на берег, так что рассматриваемая задача имеет важное практическое значение.

Роль частного решения — «разрушения плотины» играет автомодельное решение *f(x/t,v)*. Для автомодельного решения получается уравнение от двух независимых переменных

$$(v - \eta)f_\eta - f_v \int_{-\infty}^{+\infty} f_\eta dv = 0. \quad (13)$$

Следуя методам, развитым для кинетической теории плазмы [7], решения уравнения (7) ищутся в виде $f(t,x,v) = f(h(t,x),v), h(t,x) = A^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f dv$. В новых переменных уравнение имеет вид

$$f_h h_t + h_x\left(v f_h - f_v\right) = 0. \quad (14)$$

Следовательно, $h_t/h_x = f_v/f_h - v = \mu(h)$, где $\mu(h)$ – произвольная функция свободной поверхности, которая также является неизвестной. Отсюда находим, что $f_h(v-\mu) - f_v = 0$.

Откуда следует, что можно заменить функцию *h* на μ, и получить уравнения

$$f_\mu(v-\mu) - h_\mu f_v = 0, \quad h_t + \mu(h)h_x = 0. \quad (15)$$

Решая методом характеристик уравнения (15), можно найти общий интеграл характеристической системы $h = F(x - \mu(h)t)$. Здесь *F* – произвольная функция, определяемая из начальных или краевых условий. Обращая функции, получим $x - \mu(h)t = D(h)$, где *D* – произвольная функция. Выразив *D* через величину μ, в итоге получим решение в виде

$$x = \mu t + R(\mu), \quad (16)$$

где $R(\mu)$ является произвольной гладкой функцией. Таким образом, при $R=0$ решение (16) соответствует классическому автомодельному решению уравнения.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Если $\tilde{f}(x/t,v)-$ решение уравнения (13), то функция $\tilde{f}(\mu,v)$ также будет решением уравнения (13), где зависимость μ от переменных *x,t* определится из уравнения (16) с произвольной функцией $R(\mu)$.

Смысл получаемых решений выясняется из уравнений (13), это решения типа простых волн. Следовательно, решения уравнений (15) получается из простых волн с помощью функционального преобразования (16), так что практически во всех значимых случаях, решение будет иметь особенности, типа бора (гидравлический скачок = ударная волна при газодинамической аналогии).

Указанные решения обобщают классические решения в теории мелкой воды и в газовой динамике. Этим самым определяется обширный класс решений в жидкости с распределенными вихрями, которые можно назвать неоклассическими [8].

Другой обширный класс решений появляется, когда наличие вертикального перемешивания в жидкости становится определяющим. Например, при разрушении плотины «недалеко» от плотины. Но и в этом случае в качестве нулевого приближения берется неоклассическое решение, а малая вихревая дисперсия может быть учтена методами возмущений, что предполагает, конечно, численное моделирование [4], [9], [10].

Кинетическое описание опрокидывания длинной волны в завихренной жидкости

Плоскопараллельное движение жидкости в модели Бенни без источников и стоков точно соответствует бесстолкновительной динамике нейтрального газа, т.е. рассматривается следующее уравнение:

$$f + vf = 0. \tag{17}$$

Простота уравнения (17) и возможность его общего решения полезны для качественного анализа задачи, причем с обобщением выводов на нелинейную область. Важно сравнивать на классической задаче динамику плоскопараллельных движений в модели Бенни и классической нелинейной теории мелкой воды.

Рассмотрим задачу о распаде плотины в рамках чисто инерционного подхода, описывающегося уравнением (17). Общее решение уравнения (17) имеет вид

$$f(t, x, v) = F(x - vt, v). \tag{18}$$

Здесь F — произвольная функция. Необходимо отметить, что в отличие от обычно рассматриваемого случая здесь одна степень свободы в пространстве скоростей v. При $t=0$ имеем

$$\begin{gathered} f(0, x, v) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\theta(-x), \\ \theta(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 1, x \ge 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{19}$$

Здесь m,k,T — константы задачи. Искомая функция распределения примет следующую форму

$$f(t, x, v) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\theta(vt - x) \tag{20}$$

Отсюда находятся плотность числа частиц газа (высота свободной поверхности жидкости) и средняя макроскопическая скорость газа

$$\begin{cases} n(t, x) = \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{t}\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)\right], \\ u(t, x) = \frac{n_0}{n(t,x)}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \exp\left[-\frac{m}{2kT}\frac{x^2}{t^2}\right]. \end{cases} \tag{21}$$

Где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt -$ интеграл вероятностей. Решение (21) автомодельно, так как в задаче нет характерного размера.

Изложенной модельной задаче соответствует классическая задача о разрушении плотины в рамках гиперболической теории мелкой воды. Начальные условия

$$u = 0, x \in R, h = \begin{cases} 0, x \ge 0 \\ H_0, x \le 0 \end{cases} \tag{22}$$

Решение находится с помощью теории простых волн, а именно

$$\begin{cases} \sqrt{h} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{H_0} - \frac{x}{t}\right), \\ u = \frac{2}{3}\left(\sqrt{H_0} + \frac{x}{t}\right), \end{cases} \tag{23}$$

при $-\sqrt{H_0} \le \frac{x}{t} \le 2\sqrt{H_0}$. Из (23) следует, что фронт $h=0$ движется по закону $x = 2t\sqrt{H_0}$, т.е. со скоростью $2\sqrt{H_0}$, а фронт $h=H_0$ движется в противоположную сторону, так что $x = -t\sqrt{H_0}$.

Свободная поверхность между фронтами имеет параболическую форму.

При сравнении полученных решений достаточно сопоставить нулевой момент решения уравнения (17), поскольку именно высота свободной поверхности является наблюдаемой величиной. Во-первых, автомодельные переменные одинаковы. В точке $x=0$ при всех t из теории мелкой воды имеем $h = \frac{4}{9}H_0$, а из уравнения (17)

$h = \frac{1}{2} H_0 \left(n_0 \to H_0 \right)$, что является удовлетворительным с вычислительной точки зрения, так как сами уравнения всего лишь приближенны.

Отсюда можно сделать вывод об удовлетворительном при ограниченном времени наблюдения качественном анализе опрокидывания свободной поверхности в рамках приближения длинных волн на основе уравнения (17). С учетом неоднородной глубины можно анализировать на его основе такие явления, как цунами.

Точные решения системы Бенни с внешним давлением

Система уравнений Бенни с давлением имеет следующий вид:

$$u_t + u u_x - u_y \left(\int_0^y u_x dy \right) + h_x + P_x = 0; h_t + \left(\int_0^h u dy \right)_x = 0. \quad (24)$$

Здесь *P(t,x)* — заданное внешнее давление. С помощью уравнения (17) можно строить точные решения уравнения (24), используя внешнее давление, заранее не известное, как условие согласования нулевых моментов. А именно, пусть выполнено условие $h_x(t,x) + P_x(t,x) = 0$.

Тогда уравнение (17) переходит в (24). Общее решение уравнения (17) имеет вид (18), то есть

$$f(t,x,v) = F(x - vt, v).$$

Здесь F — произвольная начальная гладкая функция. Основным результатом, на котором основывается эта конструкция, является одинаковость по форме нулевого моментного уравнения для уравнений (17), (24)

$$A_t^0 + A_x^x = 0.$$

Тогда мы можем выбрать момент $A^0(t,x)$ общим для уравнений (17), (24), так что $P_x(t,x)$ определяется однозначно для всех моментных уравнений (3).

Рассмотрим, например задачу о распространении газа, сосредоточенного в полупространстве $x<0$ при $t=0$ в вакууме. Гидродинамическая задача, которой ей соответствует – задача о распаде плотины, так что вода находится при $x<0$. Тогда мы имеем решение (19), (20), (21). Решение (19) – (21) автомодельно, так как в задаче нет характерного размера. Тогда это соответствует нелинейной задаче (24) с внешним давлением $P(t,x) = -\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{t}\sqrt{\frac{m}{2kT}}\right)\right)$. Так что этой задаче соответствует разрежение атмосферного давления.

Аналогичные результаты можно получить, положив $h(t,x) + P(t,x) = R(t,x)$, где *P(t,x)* – заданная функция. В этом случае получается решение (4) нелинейного уравнения, соответствующие линейному дифференциальному уравнению

$$f_t + v f_x - f_v \left(R_x \right) = 0. \quad (25)$$

Заключение

В работе построены новые интегро-дифференциальные уравнения движения, которые не содержат неизвестной свободной поверхности, что соответствует бесстолкновительной динамике частиц в заданном силовом поле. Это позволяет строить точные решения более общего вида для решения задач в завихренной жидкости с неизвестной свободной поверхностью.

Поэтому рассматриваемая задача имеет важное практическое значение для моделирования экстремальных волновых явлений в задачах гидротехники (разрушение плотин). Полученные результаты открывают новые возможности для описания сложных волновых процессов в природных и технических системах. Вопрос о поведении неизвестной высоты свободной поверхности в настоящее время остается открытым и является предметом дальнейших исследований.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Сообщество рецензентов Международного научно-исследовательского журнала

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.165.87.1

Conflict of Interest

None declared.

Review

Community of Reviewers of the International Research Journal

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.165.87.1

Список литературы / References

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. — Москва: Мир, 1977. — 622 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. — Москва: ЛЕНАНД, 2024. — 416 с.
3. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости / Ф. Дразин. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 288 с.
4. Фалькович Г. Современная гидродинамика / Г. Фалькович. — Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, «Регулярная и хаотическая динамика», 2019. — 252 с.
5. Полянин А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. — Москва: Юрайт, 2025. — 256 с.
6. Краснослободцев А.В. Газодинамические и кинетические аналоги в теории вертикально неоднородной мелкой воды / А.В. Краснослободцев. — Москва: Наука, 1987. — С. 33–71.

7. Гуревич А.В. Нелинейная динамика разреженной плазмы и ионосферная аэродинамика / А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский // Вопросы теории плазмы. — Москва: Наука, 1980. — Т. 10. — С. 3–87.

8. Веденеев В.В. Математическая теория устойчивости плоскопараллельных течений и развитие турбулентности / В.В. Веденеев. — Долгопрудный: Интеллект», 2016. — 152 с.

9. Гурбатов С.Н. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии / С.Н. Гурбатов, О.В. Руденко, А.И. Саичев. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 496 с.

10. Арнольд В.И. Топологические методы в гидродинамике / В.И. Арнольд, Б.А. Хесин. — Москва: МЦНМО, 2020. — 456 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Uizem Dzh. Linejnye i nelinejnye volny [Linear and Nonlinear Waves] / J. Whitham. — Moscow: Mir, 1977. — 622 p. [in Russian]

2. Arnol'd V.I. Matematicheskie metody klassicheskoj mekhaniki [Mathematical Methods of Classical Mechanics] / V.I. Arnold. — Moscow: LENAND, 2024. — 416 p. [in Russian]

3. Drazin F. Vvedenie v teoriyu gidrodinamicheskoj ustojchivosti [Introduction to the Theory of Hydrodynamic Stability] / Ph. Drazin. — Moscow: FIZMATLIT, 2005. — 288 p. [in Russian]

4. Fal'kovich G. Sovremennaya gidrodinamika [Modern Hydrodynamics] / G. Falkovich. — Moscow – Izhevsk: Institute for Computer Research, ‘Regular and Chaotic Dynamics’, 2019. — 252 p. [in Russian]

5. Polyanin A.D. Metody resheniya nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki i mekhaniki [Methods for Solving Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics] / A.D. Polyanin, V.F. Zajcev, A.I. Zhurov. — Moscow: Yurajt, 2025. — 256 p. [in Russian]

6. Krasnoslobodcev A.V. Gazodinamicheskie i kineticheskie analogi v teorii vertikal'no neodnorodnoj melkoj vody [Gas-Dynamic and Kinetic Analogies in the Theory of Vertically Inhomogeneous Shallow Water] / A.V. Krasnoslobodcev. — Moscow: Nauka, 1987. — P. 33–71. [in Russian]

7. Gurevich A.V. Nelinejnaya dinamika razrezhennoj plazmy i ionosfernaya aerodinamika [Nonlinear Dynamics of Rarefied Plasma and Ionospheric Aerodynamics] / A.V. Gurevich, L.P. Pitaevskij // Voprosy teorii plazmy [Problems of Plasma Theory]. — Moscow: Nauka, 1980. — Vol. 10. — P. 3–87. [in Russian]

8. Vedeneev V.V. Matematicheskaya teoriya ustojchivosti ploskoparallel'nyh techenij i razvitie turbulentnosti [Mathematical Theory of Stability of Plane-Parallel Flows and the Development of Turbulence] / V.V. Vedeneev. — Dolgoprudnyj: Intellekt, 2016. — 152 p. [in Russian]

9. Gurbatov S.N. Volny i struktury v nelinejnyh sredah bez dispersii [Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media] / S.N. Gurbatov, O.V. Rudenko, A.I. Saichev. — Moscow: FIZMATLIT, 2011. — 496 p. [in Russian]

10. Arnol'd V.I. Topologicheskie metody v gidrodinamike [Topological Methods in Hydrodynamics] / V.I. Arnold, B.A. Khesin. — Moscow: MCNMO, 2020. — 456 p. [in Russian]