



РАДИОФИЗИКА/RADIOPHYSICS

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.168.45> EDN: TYFSWI

КАНОНИЧЕСКИЕ ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ГИРОТРОПНЫХ ВОЛНОВОДОВ ПРИ КАСАТЕЛЬНОМ НАМАГНИЧИВАНИИ

Научная статья

Ширапов Д.Ш.^{1,*}, Итигилов Г.Б.²¹ ORCID : 0000-0001-8060-1479;^{1,2} Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (shir48[at]mail.ru)

Предложена: 25.01.2026; Принята: 06.05.2026; Опубликовано: 17.06.2026

Аннотация

Из обобщенных формул Гельмгольца гибридных HE- и EH- электромагнитных волн для ферритовых волноводов с произвольными ортогональными формами поперечного сечения при произвольном намагничивании, учитывающие тепловые потери, получены соответствующие канонические общие уравнения Гельмгольца относительно продольных составляющих электромагнитного поля для ферритовых волноводов при касательном намагничивании с учетом тепловых потерь. Полученные канонические общие уравнения Гельмгольца HE- и EH- электромагнитных волн позволяют на едином методологическом уровне перейти к конкретным типам ферритовых волноводов с криволинейными ортогональными формами поперечного сечения и определить конкретные уравнения Гельмгольца HE- и EH- электромагнитных волн, учитывающие тепловые потери, для касательно намагниченных ферритовых волноводов с прямоугольной, круглой и эллиптической формами поперечного сечения для последующей постановки и решения соответствующих краевых задач.

Ключевые слова: формулы Гельмгольца, касательное намагничивание, ферритовый волновод, электромагнитное поле, краевая задача, электромагнитные волны.

CANONICAL GENERAL HELMHOLTZ EQUATIONS OF HYDROTROPIC WAVEGUIDES WITH TANGENTIAL MAGNETIZATION

Research article

Shirapov D.S.^{1,*}, Itigilov G.B.²¹ ORCID : 0000-0001-8060-1479;^{1,2} East Siberia State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russian Federation

* Corresponding author (shir48[at]mail.ru)

Suggested: 25.01.2026; Accepted: 06.05.2026; Published: 17.06.2026

Abstract

From the generalized Helmholtz formulas for hybrid HE and EN electromagnetic waves in ferrite waveguides with arbitrary orthogonal cross-sectional shapes and arbitrary magnetization, which take into account thermal losses, the corresponding canonical general Helmholtz equations for the longitudinal components of the electromagnetic field for the case of tangential magnetization are obtained. The obtained canonical general Helmholtz equations of HE- and EH- electromagnetic waves allow us to proceed to specific types of ferrite waveguides with curvilinear orthogonal cross-sectional shapes at a single methodological level and to determine the specific Helmholtz equations of hybrid electromagnetic waves for tangentially magnetized ferrite rectangular, circular, and elliptical waveguides, in which energy losses occur in the form of thermal heating and will be the subject of further research as corresponding boundary problems after the determination of the boundary conditions.

Keywords: Helmholtz formulas, tangential magnetization, ferrite waveguide, electromagnetic field, thermal losses, hybrid electromagnetic wave.

Введение

В сверхвысокочастотной (СВЧ) технике, в том числе в волноводах, широко используются ферриты [1], [2], [3], [5], что объясняется их уникальными свойствами. Это обусловлено тем, что фазовая скорость, затухание и поляризация распространяющейся в ферритовой среде электромагнитной волны (ЭМВ) зависят от величины напряженности внешнего намагничивающего магнитного поля и его направления относительно направления распространения волны, которые можно менять как по величине, так и по направлению, что открывает широкие возможности для управления параметрами ЭМВ. Экспериментальные данные, представленные в [6], свидетельствуют о том, что тангенс угла диэлектрических потерь для феррошпинели, широко используемые в СВЧ-технике, принимает значительных величин находящихся в диапазоне $(2,5-25) \cdot 10^{-4}$. Это означает, что намагниченные гиротропные волноводы подвержены ощутимому нагреву, вследствие чего изменяются значения диэлектрического и магнитного проницаемостей феррита, оказывающие значимое воздействие как на их собственные параметры, так и на характеристики (критическая частота, полоса пропускания, фазовая и групповая скорости, волновое сопротивление) распространяющихся в них волн. В

связи с этим, представляется необходимым проведение всестороннего анализа данного термодинамического процесса в ферритовых волноводах.

Для проведения подобного анализа требуется наличие частных уравнений Гельмгольца, зависящих от формы и направления намагниченности, определенных относительно продольных составляющих электромагнитного поля (ЭМП), для гибридных *HE*- и *EH*- волн, распространяющихся в намагниченных ферритовых волноводах, в которых имеет место потери энергии в виде джоулева нагрева. Такие уравнения могут быть определены из соответствующих канонических общих уравнений Гельмгольца, определенных относительно продольных составляющих ЭМП.

Поэтому целью настоящего исследования является вывод канонических общих уравнений Гельмгольца для *HE*- и *EH*- волн касательно намагниченных ферритовых волноводов с произвольной формой поперечного сечения. Отметим, что в статье приведены результаты, полученные для продольно намагниченных ферритовых волноводов, в которых происходят потери энергии в виде теплового нагрева.

Канонические общие уравнения

Ранее в [7] были получены обобщенные формулы Гельмгольца, описывающие *HE*- и *EH*- волны в произвольно намагниченных ферритовых волноводах с произвольной формой поперечного сечения и учитывающие тепловые потери. Для достижения поставленной в статье цели из обобщенных формул последовательно выводятся соответствующие общие формулы и канонические общие уравнения Гельмгольца.

Из [7] следует, что обобщенная формула Гельмгольца *HE*- волны имеет вид

$$\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z + j\gamma (\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - j\omega^2 \epsilon' (l H_1 + m H_2) + \omega^2 \epsilon' \mu_{33} H_z = 0, \quad (1)$$

где H_1, H_2, H_z — составляющие магнитного поля;

γ — постоянная распространения;

j — комплексное число;

ϵ — абсолютная диэлектрическая проницаемость феррита;

ω — циклическая частота;

$\epsilon' = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость феррита;

тензор магнитной проницаемости феррита

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & jk & jl \\ -jk & \mu_{22} & jm \\ -jl & -jm & \mu_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$k = \frac{\omega Y \mu_0 M_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$, $\mu_0 = 12,56 \cdot 10^{-7} \frac{\text{ГН}}{\text{М}}$ — магнитная постоянная, $Y = \frac{e}{m_0} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$ — гиромагнитное отношение, $\omega_0 = Y \mu_0 H_0$ — угловая частота свободной прецессии магнитного момента, H_0 — напряженность постоянного внешнего магнитного поля, M_0 — постоянная составляющая намагниченности; $\mu = \mu_0 + \mu_0 \frac{Y \mu_0 M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$;

$$\delta_1 = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + \Gamma_{21}^2 \right); \quad \delta_2 = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} + \Gamma_{12}^1 \right); \quad \nabla_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i}, i = 1, 2;$$

h_1, h_2 — коэффициенты Ламэ [8]; q_1, q_2 — обобщенные поперечные координаты;

$$\Delta_{11} = \delta_1 \nabla_1 = \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1 \right) \frac{\partial}{\partial q_1}$$

$$\Delta_{22} = \delta_2 \nabla_2 = \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} + \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2 \right) \frac{\partial}{\partial q_2};$$

$\Gamma_{12}^1, \Gamma_{21}^2$ — символы Кристоффеля [9].

Также из работы [7] имеем обобщенную формулу Гельмгольца *EH*- волны

$$\mu_{11} \Delta_{11} E_z + \mu_{22} \Delta_{22} E_z + j\gamma (\mu_{11} \delta_1 E_1 + \mu_{22} \delta_2 E_2) + \omega (\mu_{11} m \delta_1 - \mu_{22} l \delta_2) H_z + \\ + \gamma k \omega (-l H_1 - m H_2 - j \mu_{33} H_z) - \omega^2 \epsilon' (k^2 - \mu_{11} \mu_{22}) E_z + j\omega (lk \delta_1 + mk \delta_2) \cdot H_z = 0. \quad (3)$$

где E_1, E_2, E_z — составляющие электрического поля.

При касательном намагничивании для *HE*- и *EH*- волн составляющие тензора магнитной проницаемости феррита (2) имеют вид [10]

$$\mu_{22} = \mu_{11}, \mu_{11} = \mu_{33} = \mu, k = m = 0, l \neq 0. \quad (4)$$

Тогда из обобщенной формулы (1) с учетом составляющих тензора магнитной проницаемости феррита для касательного намагничивания (4) определится общая формула Гельмгольца *HE*- волны для касательно намагниченных ферритовых волноводов с произвольной формой поперечного сечения

$$\Delta_{11} H_z + \Delta_{22} H_z + j\gamma (\delta_1 H_1 + \delta_2 H_2) - j\omega^2 \epsilon' l H_1 + \omega^2 \epsilon' \mu H_z = 0 \quad (5)$$

Аналогично, учитывая составляющие тензора магнитной проницаемости феррита при касательном намагничивании (4) из обобщенной формулы (3), определим общую формулу Гельмгольца *EH*- волны

$$\mu \Delta_{11} E_z + \mu_{11} \Delta_{22} E_z + j\gamma (\mu \delta_1 E_1 + \mu_{11} \delta_2 E_2) - \omega \mu_{11} | \delta_2 H_z + \omega^2 \epsilon' \mu_{11} E_z = 0 \quad (6)$$

Отметим, что общие формулы Гельмгольца (5) и (6) содержат все составляющие ЭМП, что представляет определенные трудности при дальнейшем выводе соответствующих частных уравнений Гельмгольца, зависящих от направления намагниченности и формы ферритового волновода.

Поэтому, следующим шагом для определения канонических общих уравнений Гельмгольца, описывающих распространение *HE*- и *EH*- волн в касательно намагниченных ферритовых волноводах с поперечным сечением произвольной формы, является исключение из формул (5) и (6) всех поперечных составляющих ЭМП.

Для решения этой локальной задачи обратимся к работе [11], где эти составляющие ЭМП были получены для аналогичных волноводных касательно намагниченных структур и представлены ниже

$$\begin{cases} E_1 = -\frac{j\gamma}{b^2} \left\{ \nabla_1 E_z + \frac{\omega\mu_1}{\gamma} \nabla_2 H_z \right\}, \\ E_2 = -\frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \nabla_2 E_z - \left(\frac{\omega\mu}{\gamma} \nabla_1 + \omega l \right) H_z \right\}, \\ H_1 = \frac{j\gamma}{a^2} \left\{ \frac{\omega\epsilon'}{\gamma} \nabla_2 E_z - \left(\nabla_1 + \frac{\omega^2\epsilon' l}{\gamma} \right) H_z \right\}, \\ H_2 = -\frac{j\gamma}{b^2} \left\{ \frac{\omega\epsilon'}{\gamma} \nabla_1 E_z + \nabla_2 H_z \right\}, \end{cases} \quad (7)$$

где $a^2 = \omega^2\epsilon'\mu - \gamma^2$, $b^2 = \omega^2\epsilon'\mu - \gamma^2$.

Далее, подставляя поперечные составляющие ЭМП из (7) в общую формулу (5), получим каноническое общее уравнение Гельмгольца *HE*- волны относительно продольных составляющих ЭМП для ферритовых волноводов с поперечным сечением произвольной формы при условии касательного намагничивания

$$\begin{aligned} \Delta_{11} H_Z + \frac{\mu_{\parallel}}{\mu} \frac{a^2}{b^2} \Delta_{22} H_Z + \left(c^2 + \gamma \frac{l}{\mu} \frac{\Gamma_{21}}{h_1} \right) H_Z = \\ = \frac{\gamma}{\omega\mu} \frac{b^2 - a^2}{a^2} \Delta_{12} E_Z + \omega\epsilon' \frac{l}{\mu} \nabla_2 E_Z, \end{aligned} \quad (8)$$

где $c^2 = \omega^2\epsilon' \frac{\mu^2 - l^2}{\mu} - \gamma^2$, $\Delta_{12} = \delta_1 \nabla_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial q_2}$.

Данное уравнение описывает распространение *HE*- волны в ферритовых волноводах с поперечным сечением произвольной формы при касательном намагничивании.

Аналогично, подставляя поперечные составляющие ЭМП из (7) в общую формулу (6), получим каноническую форму общего уравнения Гельмгольца *EH*- волны

$$\frac{a^2}{b^2} \Delta_{11} E_Z + \Delta_{22} E_Z + a^2 E_Z = \frac{\gamma}{\omega\epsilon'} \frac{b^2 - a^2}{a^2} \Delta_{12} H_Z - \omega l \delta_2 H_Z. \quad (9)$$

Уравнение (9) описывает распространение *EH*- волны в ферритовых волноводах с поперечным сечением произвольной формы при касательном намагничивании.

Формулы (8) и (9) являются каноническими общими уравнениями Гельмгольца, описывающие распространение *HE*- и *EH*- электромагнитных волн, в касательно намагниченных ферритовых волноводах с поперечными сечениями произвольной формы и содержат только продольные составляющие ЭМП.

Заключение

В данной статье была поставлена задача определения канонических общих уравнений Гельмгольца для гибридных *HE*- и *EH*- волн, содержащие только продольные составляющие ЭМП. Для достижения поставленной цели были использованы, полученные ранее в [7], обобщенные формулы для *HE*- и *EH*- электромагнитных волн в произвольно намагниченных ферритовых волноводах с криволинейными формами поперечных сечений, учитывающие диссипацию тепловой энергии. Для этого вначале из обобщенных формул были определены общие формулы Гельмгольца *HE*- (5) и *EH*- электромагнитных волн (6) ферритовых волноводов с произвольными формами поперечного сечения энергии, при касательно намагничивании и содержащие все составляющие напряженностей ЭМП.

Затем из этих общих формул Гельмгольца были выведены соответствующие канонические общие уравнения Гельмгольца гибридных *HE*- (8) и *EH*- электромагнитных волн (9), определенные относительно только продольных составляющих ЭМП.

Основные выводы:

1) для ферритовых продольно намагниченных волноводов с произвольными криволинейными формами поперечных сечений получено общее каноническое уравнение Гельмгольца *HE*- волны (8), учитывающее потери энергии в виде тепла и содержащее только продольные составляющие ЭМП;

2) для ферритовых продольно намагниченных волноводов с произвольными криволинейными формами поперечных сечений получено общее каноническое уравнение Гельмгольца *EH*- волны (9), учитывающее потери энергии в виде тепла и содержащее только продольные составляющие ЭМП.

Канонические общие уравнения Гельмгольца (8) и (9) необходимы для последующего вывода частных уравнений *HE*- и *EH*- волн касательно намагниченных ферритовых волноводов с прямоугольным, круглым и эллиптическим формами, которые после определения краевых условий, позволят сформулировать и решить соответствующие этим волноводам граничные задачи для получения дисперсионных уравнений.

**Конфликт интересов**

Не указан.

Рецензия

Сообщество рецензентов Международного научно-исследовательского журнала
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.168.45.1>

Conflict of Interest

None declared.

Review

Community of Reviewers of the International Research Journal
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.168.45.1>

Список литературы / References

1. Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах / А.Л. Микаэлян. — Ленинград: Госэнергоиздат, 1963. — 664 с.
2. Лакс Б. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримангнетики / Б. Лакс, К. Баттон. — Москва: Мир, 1965. — 676 с.
3. Капустин С.А. Комплексные волны круглого экранированного волновода с аксиальным продольно-намагниченным ферритовым стержнем / С.А. Капустин, А.В. Назаров, С.Б. Раевский // Антенны. — 2020. — № 1. — С. 34–40. — DOI: [10.18127/j03209601-202001-05](https://doi.org/10.18127/j03209601-202001-05).
4. Артёмов М.Л. Направление совершенствования характеристик перспективных антенных систем / М.Л. Артёмов, О.В. Афанасьев, М.П. Сличенко // Радиотехника. — 2023. — Т. 86, № 5. — С. 184–198. — DOI: [10.18127/j00338486-202305-19](https://doi.org/10.18127/j00338486-202305-19).
5. Гуськов А.Б. Быстродействующие ферритовые фазовращатели типа Реджиа-Спенсера для современных ФАР / А.Б. Гуськов, Н.В. Михайлов, А.Е. Страшинова [и др.] // Антенны. — 2021. — № 5. — С. 27–36.
6. Устинов А. Ферритовые материалы для устройств СВЧ-электроники. Основные критерии выбора / А. Устинов, В. Кочемасов, Е. Хасьянова // СВЧ-электроника. — 2015. — № 8. — С. 86–92.
7. Итигилов Г.Б. Обобщенные, общие и частные уравнения Гельмгольца гиротропных волноводов / Г.Б. Итигилов, Д.Ш. Ширапов, В.А. Кравченко // Радиотехника. — 2023. — Т. 87, № 12. — С. 137–148. — DOI: [10.18127/j00338486-202312-15](https://doi.org/10.18127/j00338486-202312-15).
8. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. — Москва: Наука, 1967. — 780 с.
9. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — Москва: Наука, 1973. — 832 с.
10. Итигилов Г.Б. Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в гиротропных волноводах / Г.Б. Итигилов, Д.Ш. Ширапов. — Улан-Удэ: Издательство Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, 2022. — 154 с.
11. Итигилов Г.Б. Обобщенные, общие и частные формулы поперечных компонент электромагнитного поля гиротропных волноводов, учитывающие тепловые потери / Г.Б. Итигилов, Д.Ш. Ширапов, В.А. Кравченко // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. — 2024. — № 3. — С. 16–24. — DOI: [10.24412/2221-2574-2024-3-16-24](https://doi.org/10.24412/2221-2574-2024-3-16-24).

Список литературы на английском языке / References in English

1. Mikajeljan A.L. Teorija i primenenie ferritov na sverhvysokih chastotah [Theory and application of ferrites at ultrahigh frequencies] / A.L. Mikajeljan. — Leningrad: Gosjenergoizdat, 1963. — 664 p. [in Russian]
2. Laks B. Sverhvysokochastotnye ferrity i ferrimagnetiki [Microwave ferrites and ferrimagnetics] / B. Laks, K. Batton. — Moscow: Mir, 1965. — 676 p. [in Russian]
3. Kapustin S.A. Kompleksnye volny kruglogo jekranirovannogo volnovoda s aksial'nym prodol'no-namagnichennym ferritovym sterzhnem [Complex waves of a circular shielded waveguide with an axial longitudinally magnetized ferrite rod] / S.A. Kapustin, A.V. Nazarov, S.B. Raevskij // Antenny [Antennas]. — 2020. — № 1. — P. 34–40. — DOI: [10.18127/j03209601-202001-05](https://doi.org/10.18127/j03209601-202001-05). [in Russian]
4. Artjomov M.L. Napravlenie sovershenstvovanija harakteristik perspektivnyh antennyh sistem [Direction for improving the characteristics of advanced antenna systems] / M.L. Artjomov, O.V. Afanas'ev, M.P. Slichenko // Radiotekhnika [Radio Engineering]. — 2023. — Vol. 86, № 5. — P. 184–198. — DOI: [10.18127/j00338486-202305-19](https://doi.org/10.18127/j00338486-202305-19). [in Russian]
5. Gus'kov A.B. Bystrodejstvujushhie ferritovye fazovrashhateli tipa Redzhia-Spensera dlja sovremennyh FAR [High-speed Reggia-Spencer type ferrite phase shifters for modern phased antenna arrays] / A.B. Gus'kov, N.V. Mihajlov, A.E. Strashinova [et al.] // Antenny [Antennas]. — 2021. — № 5. — P. 27–36. [in Russian]
6. Ustinov A. Ferritovye materialy dlja ustrojstv SVCh-jelektroniki. Osnovnye kriterii vybora [Ferrite materials for microwave electronics devices. Basic selection criteria] / A. Ustinov, V. Kochemasov, E. Has'janova // SVCh-jelektronika [Microwave Electronics]. — 2015. — № 8. — P. 86–92. [in Russian]
7. Itigilov G.B. Obobshhennye, obshhie i chastnye uravnenija Gel'mgol'ca girotropnyh volnovodov [Generalized, general and particular Helmholtz equations of gyrotropic waveguides] / G.B. Itigilov, D.Sh. Shirapov, V.A. Kravchenko // Radiotekhnika [Radio Engineering]. — 2023. — Vol. 87, № 12. — P. 137–148. — DOI: [10.18127/j00338486-202312-15](https://doi.org/10.18127/j00338486-202312-15). [in Russian]
8. Ango A. Matematika dlja jelektro- i radioinzhenеров [Mathematics for electrical and radio engineers] / A. Ango. — Moscow: Nauka, 1967. — 780 p. [in Russian]
9. Korn G. Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov [Mathematics handbook for scientists and engineers] / G. Korn, T. Korn. — Moscow: Nauka, 1973. — 832 p. [in Russian]



10. Itgilov G.B. Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya jelektromagnitnyh voln v girotropnyh volnovodah [Mathematical modeling of electromagnetic wave propagation in gyrotropic waveguides] / G.B. Itgilov, D.Sh. Shirapov. — Ulan-Ude: Publishing House of the East Siberian State University of Technology and Management, 2022. — 154 p. [in Russian]

11. Itgilov G.B. Obobshhennye, obshhie i chastnye formuly poperechnykh komponent jelektromagnitnogo polja girotropnyh volnovodov, uchityvajushhie teplovyje poteri [Generalized, general and particular formulas for transverse components of the electromagnetic field of gyrotropic waveguides taking into account thermal losses] / G.B. Itgilov, D.Sh. Shirapov, V.A. Kravchenko // Radiotekhnicheskie i telekommunikacionnye sistemy [Radio Engineering and Telecommunication Systems]. — 2024. — № 3. — P. 16–24. — DOI: 10.24412/2221-2574-2024-3-16-24. [in Russian]