 © Авторы статьи / Authors of the article

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА/DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.126.14 EDN: BOLLVN

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Научная статья

Донцова М.В.[1,*]
[1] ORCID : 0000-0003-2915-0881;
[1] Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (dontsowa.marina2011[at]yandex.ru)

Предложена: 02.10.2022; Принята: 21.11.2022; Опубликована: 16.12.2022

Аннотация

В предыдущих работах Донцовой М.В. для системы с правыми частями специального вида определены достаточные условия, при которых существует единственное локальное решение задачи Коши, у которого гладкость не ниже, чем гладкости начальных условий. В предыдущих работах Донцовой М.В. для системы с правыми частями специального вида определены достаточные условия, при которых существует единственное нелокальное решение задачи Коши. В данной работе приведены примеры задачи Коши для системы с правыми частями специального вида, которая имеет единственное локальное решение. Приведены примеры задачи Коши для системы с правыми частями специального вида, которая имеет единственное нелокальное решение.

Ключевые слова: метод, глобальные оценки, задача Коши.

EXAMPLES OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM WITH RIGHT VALUE OF A SPECIAL FORM

Research article

Dontsova M.[1,*]
[1] ORCID : 0000-0003-2915-0881;
[1] National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

* Corresponding author (dontsowa.marina2011[at]yandex.ru)

Suggested: 02.10.2022; Accepted: 21.11.2022; Published: 16.12.2022

Abstract

In the previous works of M. V. Dontsova, the sufficient conditions for a system with right values of a special form have been identified in which there exists a single local solution of the Cauchy problem, which smoothness is not lower than the smoothness of the initial conditions. The previous works of M. V. Dontsova defines the sufficient conditions for the system with special right value form sections under which there exists a singular non-local solution of the Cauchy problem. In the present work, examples of Cauchy problem for the system with special right value form, which has the only local solution, are given. Examples of the Cauchy problem for a system with special right value form, which has the only non-local solution, are given.

Keywords: method, global estimates, Cauchy problem.

Введение

Различные исследования проводятся по дифференциальным уравнениям в [1], [4], [7], [10].

Рассмотрим

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (a_1(t)u(t,x) + b_1(t)v(t,x))\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2(t)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c_1(t)u(t,x) + g_1(t)v(t,x))\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{cases} \quad (1)$$

где $u(t,x), v(t,x)$- неизвестные функции, $a_1(t),\ b_1(t),\ b_2(t),\ c_1(t),\ g_1(t)-$ известные функции, $a_2,\ g_2-$ известные константы, с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ \ v(0,x) = \varphi_2(x), \quad (2)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)-$ известные функции,

на $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}$.

Обозначим

$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| \Big| i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\},$$

$$l = \max\{\sup_{[0,T]} |a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]} |b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]} |b_2(t)|,\ \sup_{[0,T]} |c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]} |g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\},$$

$\bar{C}^2(R)-$ пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными первого и второго порядка на R,

 © Авторы статьи / Authors of the article

$C([0,T])$- пространство функций, определенных и непрерывных на $[0,T]$.

В [1] при

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) > 0,\ b_1(t) < 0,\ b_2(t) < 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \leq 0, \quad x \in R,$$

установлено, что для любого $T \leqslant \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение.

В [1] при

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) > 0,\ b_1(t) < 0,\ b_2(t) < 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \leq 0, \quad x \in R,$$

установлено, что для любого $T > 0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение.

Пример 1. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + ((5t+10)u - (3t+1)v)\partial_x u(t,x) = 20u(t,x) - (3t+4)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + ((6t+21)u - (3t+5)v)\partial_x v(t,x) = 21v(t,x), \end{cases} \tag{3}$$

где $u(t,x), v(t,x)$- неизвестные функции.

Для системы уравнений (3) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 20 + 8arctgx,\ v(0,x) = \varphi_2(x) = 20 - arctgx. \tag{4}$$

Задача (3), (4) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \leq t \leq T,\ x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = 5t + 10 > 0,\ b_1(t) = -3t - 1 < 0,\ b_2(t) = -3t - 4 < 0,$$
$$c_1(t) = 6t + 21 > 0,\ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = \frac{8}{1+x^2} > 0,\ \varphi_2'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$
$$a_2 = 20,\ g_2 = 21,$$
$$l = \max\{\sup_{[0,T]} |a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]} |b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]} |b_2(t)|,\ \sup_{[0,T]} |c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]} |g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\} = 6T + 21,$$
$$\varphi_1''(x) = -\frac{16x}{(1+x^2)^2},\ \varphi_2''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2},$$
$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| \Big| i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\} = 20 + 4\pi,$$
$$\min\left(\frac{1}{25(20+4\pi)(6T+21)}, \frac{1}{10(6T+21)}\right) = \frac{1}{25(20+4\pi)(6T+21)},$$

то получаем, что для любого $0 \leq t \leq T_1$, где $T_1 = \frac{1}{25(20+4\pi)(6T+21)}$, задача Коши (3), (4) имеет единственное решение.

Пример 2. Рассмотрим систему вида (3). Для системы уравнений (3) определим начальные условия (4).

Задача (3), (4) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \leq t \leq T,\ x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = 5t + 10 > 0,\ b_1(t) = -3t - 1 < 0,\ b_2(t) = -3t - 4 < 0,$$
$$c_1(t) = 6t + 21 > 0,\ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = \frac{8}{1+x^2} > 0,\ \varphi_2'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$

то получаем, что для любого $T > 0$ задача Коши (3), (4) имеет единственное решение.

В [2] при

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) > 0,\ b_1(t) > 0,\ b_2(t) > 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0, \quad x \in R,$$

установлено, что для любого $T \leqslant \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение.

В [2] при

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) > 0,\ b_1(t) > 0,\ b_2(t) > 0,\ c_1(t) > 0,\ g_1(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) \geq 0,\ \varphi_2'(x) \geq 0, \quad x \in R,$$

установлено, что для любого $T > 0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение.

Пример 3. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + ((5t+10)u + (3t+1)v)\partial_x u(t,x) = 20u(t,x) + (3t+4)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + ((6t+21)u + (3t+5)v)\partial_x v(t,x) = 21v(t,x), \end{cases} \tag{5}$$

где $u(t,x), v(t,x)$- неизвестные функции.

 © Авторы статьи / Authors of the article

Для системы уравнений (5) определим начальные условия:

$$u(0,x)=\varphi_1(x)=25+8arctgx,\ \ v(0,x)=\varphi_2(x)=20+arctgx. \tag{6}$$

Задача (5), (6) определена на

$$\Omega_T=\{(t,x)\,|0\le t\le T,\ x\in(-\infty,+\infty),T>0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in\bar{C}^2(R),\ \ a_1(t),b_1(t),b_2(t),c_1(t),g_1(t)\in C([0,T]),$$
$$a_1(t)=5t+10>0,\ \ b_1(t)=3t+1>0,\ \ b_2(t)=3t+4>0,$$
$$c_1(t)=6t+21>0,\ \ g_1(t)=3t+5>0,\quad t\in[0,T],$$
$$\varphi_1'(x)=\tfrac{8}{1+x^2}>0,\ \ \varphi_2'(x)=\tfrac{1}{1+x^2}>0,\quad x\in R,$$
$$a_2=20,\ \ g_2=21,$$
$$l=\max\{\sup_{[0,T]}|a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_2(t)|,\ \sup_{[0,T]}|c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\}=6T+21,$$
$$\varphi_1''(x)=-\tfrac{16x}{(1+x^2)^2},\ \ \varphi_2''(x)=-\tfrac{2x}{(1+x^2)^2},$$
$$C_\varphi=\max\{\sup_R\left|\varphi_i^{(l)}\right|\Big|i=1,2,\ l=\overline{0,2}\Big\}=25+4\pi,$$
$$\min\Big(\tfrac{1}{25(25+4\pi)(6T+21)},\tfrac{1}{10(6T+21)}\Big)=\tfrac{1}{25(25+4\pi)(6T+21)},$$

то получаем, что для любого $0\le t\le T_2$, где $T_2=\frac{1}{25(25+4\pi)(6T+21)}$, задача Коши (5), (6) имеет единственное решение.

Пример 4. Рассмотрим систему вида (5). Для системы уравнений (5) определим начальные условия (6).

Задача (5), (6) определена на

$$\Omega_T=\{(t,x)\,|0\le t\le T,\ x\in(-\infty,+\infty),T>0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in\bar{C}^2(R),\ \ a_1(t),b_1(t),b_2(t),c_1(t),g_1(t)\in C([0,T]),$$
$$a_1(t)=5t+10>0,\ \ b_1(t)=3t+1>0,\ \ b_2(t)=3t+4>0,$$
$$c_1(t)=6t+21>0,\ \ g_1(t)=3t+5>0,\quad t\in[0,T],$$
$$\varphi_1'(x)=\tfrac{8}{1+x^2}>0,\ \ \varphi_2'(x)=\tfrac{1}{1+x^2}>0,\quad x\in R,$$

то получаем, что для любого $\mathrm{T}>0$ задача Коши (5), (6) имеет единственное решение.

В [3] при

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in\bar{C}^2(R),\ \ a_1(t),b_1(t),b_2(t),c_1(t),g_1(t)\in C([0,T]),$$
$$a_1(t)<0,\ \ b_1(t)<0,\ \ b_2(t)\ge 0,\ \ c_1(t)<0,\ \ g_1(t)<0,\quad t\in[0,T],$$
$$\varphi_1'(x)\le 0,\ \ \varphi_2'(x)\le 0,\quad x\in R,$$

установлено, что для любого $T\leqslant\min(\frac{1}{25C_\varphi l},\frac{1}{10l})$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение.

В [3] при

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in\bar{C}^2(R),\ \ a_1(t),b_1(t),b_2(t),c_1(t),g_1(t)\in C([0,T]),$$
$$a_1(t)<0,\ \ b_1(t)<0,\ \ b_2(t)\ge 0,\ \ c_1(t)<0,\ \ g_1(t)<0,\quad t\in[0,T],$$
$$\varphi_1'(x)\le 0,\ \ \varphi_2'(x)\le 0,\quad x\in R,$$

установлено, что для любого $\mathrm{T}>0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение.

Пример 5. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases}\partial_t u(t,x)-((5t+10)u+(3t+1)v)\partial_x u(t,x)=20u(t,x)+(3t+4)v(t,x),\\ \partial_t v(t,x)-((6t+27)u+(3t+5)v)\partial_x v(t,x)=27v(t,x).\end{cases} \tag{7}$$

Для системы уравнений (7) определим начальные условия:

$$u(0,x)=\varphi_1(x)=20-arctgx,\ \ v(0,x)=\varphi_2(x)=1-arctgx. \tag{8}$$

Задача (7), (8) определена на

$$\Omega_T=\{(t,x)\,|0\le t\le T,\ x\in(-\infty,+\infty),T>0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in\bar{C}^2(R),\ \ a_1(t),b_1(t),b_2(t),c_1(t),g_1(t)\in C([0,T]),$$
$$a_1(t)=-5t-10<0,\ \ b_1(t)=-3t-1<0,\ \ b_2(t)=3t+4>0,$$
$$c_1(t)=-6t-27<0,\ \ g_1(t)=-3t-5<0,\quad t\in[0,T],$$
$$\varphi_1'(x)=-\tfrac{1}{1+x^2}<0,\ \ \varphi_2'(x)=-\tfrac{1}{1+x^2}<0,\quad x\in R,$$
$$a_2=20,\ \ g_2=27,$$
$$l=\max\{\sup_{[0,T]}|a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_2(t)|,\ \sup_{[0,T]}|c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\}=6T+27,$$
$$\varphi_1''(x)=\tfrac{2x}{(1+x^2)^2},\ \ \varphi_2''(x)=\tfrac{2x}{(1+x^2)^2},$$
$$C_\varphi=\max\{\sup_R\left|\varphi_i^{(l)}\right|\Big|i=1,2,\ l=\overline{0,2}\Big\}=20+\tfrac{\pi}{2},\quad \min\Big(\tfrac{1}{25(20+\frac{\pi}{2})(6T+27)},\tfrac{1}{10(6T+27)}\Big)=\tfrac{1}{25(20+\frac{\pi}{2})(6T+27)},$$

 © Авторы статьи / Authors of the article

то получаем, что для любого $0 \le t \le T_3$, где $T_3 = \frac{1}{25(20+\frac{\pi}{2})(6T+27)}$, задача Коши (7), (8) имеет единственное решение.

Пример 6. Рассмотрим систему вида (7). Для системы уравнений (7) определим начальные условия (8).

Задача (7), (8) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ b_1(t) = -3t - 1 < 0,\ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$
$$c_1(t) = -6t - 27 < 0,\ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0,\ \varphi_2'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$

то получаем, что для любого $\mathrm{T} > 0$ задача Коши (7), (8) имеет единственное решение.

Пример 7. Рассмотрим систему вида (7). Для системы уравнений (7) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 21 - arctgx,\ v(0,x) = \varphi_2(x) = 2 - arctgx. \tag{9}$$

Задача (7), (9) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ b_1(t) = -3t - 1 < 0,\ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$
$$c_1(t) = -6t - 27 < 0,\ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0,\ \varphi_2'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$
$$a_2 = 20,\ g_2 = 27,$$
$$l = \max\{\sup_{[0,T]}|a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_2(t)|,\ \sup_{[0,T]}|c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\} = 6T + 27,$$
$$\varphi_1''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2},\ \varphi_2''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2},$$
$$C_\varphi = \max\{\sup_R\left|\varphi_i^{(l)}\right| \Big| i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\Big\} = 21 + \frac{\pi}{2},$$
$$\min\left(\frac{1}{25(21+\frac{\pi}{2})(6T+27)}, \frac{1}{10(6T+27)}\right) = \frac{1}{25(21+\frac{\pi}{2})(6T+27)},$$

то получаем, что для любого $0 \le t \le T_4$, где $T_4 = \frac{1}{25(21+\frac{\pi}{2})(6T+27)}$, задача Коши (7), (9) имеет единственное решение.

Пример 8. Рассмотрим систему вида (7). Для системы уравнений (7) определим начальные условия (9).

Задача (7), (9) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ b_1(t) = -3t - 1 < 0,\ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$
$$c_1(t) = -6t - 27 < 0,\ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0,\ \varphi_2'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$

то получаем, что для любого $\mathrm{T} > 0$ задача Коши (7), (9) имеет единственное решение.

Пример 9. Рассмотрим систему вида (7). Для системы уравнений (7) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 30 - arctgx,\ v(0,x) = \varphi_2(x) = 5 - arctgx. \tag{10}$$

Задача (7), (10) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ b_1(t) = -3t - 1 < 0,\ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$
$$c_1(t) = -6t - 27 < 0,\ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0,\ \varphi_2'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$
$$a_2 = 20,\ g_2 = 27,$$
$$l = \max\{\sup_{[0,T]}|a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_2(t)|,\ \sup_{[0,T]}|c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\} = 6T + 27,$$
$$\varphi_1''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2},\ \varphi_2''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2},$$
$$C_\varphi = \max\{\sup_R\left|\varphi_i^{(l)}\right| \Big| i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\Big\} = 30 + \frac{\pi}{2},$$
$$\min\left(\frac{1}{25(30+\frac{\pi}{2})(6T+27)}, \frac{1}{10(6T+27)}\right) = \frac{1}{25(30+\frac{\pi}{2})(6T+27)},$$

то получаем, что для любого $0 \le t \le T_5$, где $T_5 = \frac{1}{25(30+\frac{\pi}{2})(6T+27)}$, задача Коши (7), (10) имеет единственное решение.

Пример 10. Рассмотрим систему вида (7). Для системы уравнений (7) определим начальные условия (10).

 © Авторы статьи / Authors of the article

Задача (7), (10) определена на
$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$
Так как
$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ \ b_1(t) = -3t - 1 < 0,\ \ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$
$$c_1(t) = -6t - 27 < 0,\ \ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = -\tfrac{1}{1+x^2} < 0,\ \ \varphi_2'(x) = -\tfrac{1}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$
то получаем, что для любого $\mathrm{T} > 0$ задача Коши (7), (10) имеет единственное решение.

Пример 11. Рассмотрим систему вида
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - ((5t+10)u(t,x) + (3t+7)v(t,x))\partial_x u(t,x) = 21u(t,x) + (3t+4)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) - ((6t+29)u(t,x) + (3t+5)v(t,x))\partial_x v(t,x) = 27v(t,x), \end{cases} \tag{11}$$

Для системы уравнений (11) определим начальные условия:
$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 40 - 2arctgx,\ \ v(0,x) = \varphi_2(x) = 4 - 2arctgx. \tag{12}$$

Задача (11), (12) определена на
$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$
Так как
$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ \ b_1(t) = -3t - 7 < 0,\ \ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$
$$c_1(t) = -6t - 29 < 0,\ \ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = -\tfrac{2}{1+x^2} < 0,\ \ \varphi_2'(x) = -\tfrac{2}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$
$$a_2 = 21,\ \ g_2 = 27,$$
$$l = \max\{\sup_{[0,T]}|a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_2(t)|,\ \sup_{[0,T]}|c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\} = 6T + 29,$$
$$\varphi_1''(x) = \tfrac{4x}{(1+x^2)^2},\ \ \varphi_2''(x) = \tfrac{4x}{(1+x^2)^2},$$
$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| \Big| i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\Big\} = 40 + \pi,$$
$$\min\left(\tfrac{1}{25(40+\pi)(6T+29)}, \tfrac{1}{10(6T+29)}\right) = \tfrac{1}{25(40+\pi)(6T+29)},$$
то получаем, что для любого $0 \le t \le T_6$, где $T_6 = \frac{1}{25(40+\pi)(6T+29)}$, задача Коши (11), (12) имеет единственное решение.

Пример 12. Рассмотрим систему вида (11). Для системы уравнений (11) определим начальные условия (12).
Задача (11), (12) определена на
$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$
Так как
$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ \ b_1(t) = -3t - 7 < 0,\ \ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$
$$c_1(t) = -6t - 29 < 0,\ \ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = -\tfrac{2}{1+x^2} < 0,\ \ \varphi_2'(x) = -\tfrac{2}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$
то получаем, что для любого $\mathrm{T} > 0$ задача Коши (11), (12) имеет единственное решение.

Пример 13. Рассмотрим систему вида
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - ((5t+10)u(t,x) + (3t+8)v(t,x))\partial_x u(t,x) = 22u(t,x) + (3t+4)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) - ((6t+31)u(t,x) + (3t+5)v(t,x))\partial_x v(t,x) = 27v(t,x), \end{cases} \tag{13}$$

Для системы уравнений (13) определим начальные условия:
$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 60 - 3arctgx,\ \ v(0,x) = \varphi_2(x) = 3 - 3arctgx. \tag{14}$$

Задача (13), (14) определена на
$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$
Так как
$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ \ b_1(t) = -3t - 8 < 0,\ \ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$
$$c_1(t) = -6t - 31 < 0,\ \ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = -\tfrac{3}{1+x^2} < 0,\ \ \varphi_2'(x) = -\tfrac{3}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$
$$a_2 = 22,\ \ g_2 = 27,$$
$$l = \max\{\sup_{[0,T]}|a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_2(t)|,\ \sup_{[0,T]}|c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\} = 6T + 31,$$
$$\varphi_1''(x) = \tfrac{6x}{(1+x^2)^2},\ \ \varphi_2''(x) = \tfrac{6x}{(1+x^2)^2},$$
$$C_\varphi = \max\{\sup_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| \Big| i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\Big\} = 60 + \tfrac{3\pi}{2},$$

 © Авторы статьи / Authors of the article

$$\min\left(\frac{1}{25(60+\frac{3\pi}{2})(6T+31)}, \frac{1}{10(6T+31)}\right) = \frac{1}{25(60+\frac{3\pi}{2})(6T+31)},$$

то получаем, что для любого $0 \le t \le T_7$, где $T_7 = \frac{1}{25(60+\frac{3\pi}{2})(6T+31)}$, задача Коши (13), (14) имеет единственное решение.

Пример 14. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия (14).

Задача (13), (14) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ \ b_1(t) = -3t - 8 < 0,\ \ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$
$$c_1(t) = -6t - 31 < 0,\ \ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = -\frac{3}{1+x^2} < 0,\ \ \varphi_2'(x) = -\frac{3}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$

то получаем, что для любого $T > 0$ задача Коши (13), (14) имеет единственное решение.

Пример 15. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 80 - 4arctgx,\ \ v(0,x) = \varphi_2(x) = 4 - 4arctgx. \tag{15}$$

Задача (13), (15) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ \ b_1(t) = -3t - 8 < 0,\ \ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$
$$c_1(t) = -6t - 31 < 0,\ \ g_1(t) = -3t - 5 < 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi_1'(x) = -\frac{4}{1+x^2} < 0,\ \ \varphi_2'(x) = -\frac{4}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$
$$a_2 = 22,\ \ g_2 = 27,$$
$$l = \max\{\sup_{[0,T]}|a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_2(t)|,\ \sup_{[0,T]}|c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\} = 6T + 31,$$
$$\varphi_1''(x) = \frac{8x}{(1+x^2)^2},\ \ \varphi_2''(x) = \frac{8x}{(1+x^2)^2},$$
$$C_\varphi = \max\{\sup_R\left|\varphi_i^{(l)}\right| \Big| i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\} = 80 + 2\pi,$$
$$\min\left(\frac{1}{25(80+2\pi)(6T+31)}, \frac{1}{10(6T+31)}\right) = \frac{1}{25(80+2\pi)(6T+31)},$$

то получаем, что для любого $0 \le t \le T_8$, где $T_8 = \frac{1}{25(80+2\pi)(6T+31)}$, задача Коши (13), (15) имеет единственное решение.

Пример 16. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия (15).

Задача (13), (15) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ \ b_1(t) = -3t - 8 < 0,\ \ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$

$$\varphi_1'(x) = -\frac{4}{1+x^2} < 0,\ \ \varphi_2'(x) = -\frac{4}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$

то получаем, что для любого $T > 0$ задача Коши (13), (15) имеет единственное решение.

Пример 17. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия:

(16)

Задача (13), (16) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ \ b_1(t) = -3t - 8 < 0,\ \ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$

$$a_2 = 22,\ \ g_2 = 27,$$
$$l = \max\{\sup_{[0,T]}|a_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|b_2(t)|,\ \sup_{[0,T]}|c_1(t)|,\ \sup_{[0,T]}|g_1(t)|,\ |a_2|,\ |g_2|\} = 6T + 31,$$

то получаем, что для любого где задача Коши (13), (16) имеет единственное решение.

Пример 18. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия (16).

 © Авторы статьи / Authors of the article

Задача (13), (16) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ \ b_1(t) = -3t - 8 < 0,\ \ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$

то получаем, что для любого задача Коши (13), (16) имеет единственное решение.

Пример 19. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 120 - 6arctgx,\ \ v(0,x) = \varphi_2(x) = 7 - 6arctgx. \tag{17}$$

Задача (13), (17) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R),\ \ a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0,T]),$$
$$a_1(t) = -5t - 10 < 0,\ \ b_1(t) = -3t - 8 < 0,\ \ b_2(t) = 3t + 4 > 0,$$

$$\varphi_1'(x) = -\tfrac{6}{1+x^2} < 0,\ \ \varphi_2'(x) = -\tfrac{6}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$

то получаем, что для любого задача Коши (13), (17) имеет единственное решение.

Пример 20. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия:

(18)

Задача (13), (18) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Так как

$$\varphi_1'(x) = -\tfrac{7}{1+x^2} < 0,\ \ \varphi_2'(x) = -\tfrac{7}{1+x^2} < 0, \quad x \in R,$$

то получаем, что для любого задача Коши (13), (18) имеет единственное решение.

Пример 21. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 110 - 8arctgx,\ \ v(0,x) = \varphi_2(x) = 9 - 8arctgx. \tag{19}$$

Задача (13), (19) определена на

Аналогично, как в примере 20, мы получаем, что для любого задача Коши (13), (19) имеет единственное решение.

Пример 22. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 35 - 9arctgx,\ \ v(0,x) = \varphi_2(x) = 10 - 9arctgx. \tag{20}$$

Задача (13), (20) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}.$$

Аналогично, как в примере 20, мы получаем, что для любого задача Коши (13), (20) имеет единственное решение.

Пример 23. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 36 - 10arctgx,\ \ v(0,x) = \varphi_2(x) = 11 - 10arctgx. \tag{21}$$

Задача (13), (21) определена на

Аналогично, как в примере 20, мы получаем, что для любого $T > 0$ задача Коши (13), (21) имеет единственное решение.

Пример 24. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 37 - 11arctgx,\ \ v(0,x) = \varphi_2(x) = 12 - 11arctgx. \tag{22}$$

Задача (13), (22) определена на

Аналогично, как в примере 20, мы получаем, что для любого задача Коши (13), (22) имеет единственное решение.

 © Авторы статьи / Authors of the article

Пример 25. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия:

(23)

Задача (13), (23) определена на

Аналогично, как в примере 20, мы получаем, что для любого $T > 0$ задача Коши (13), (23) имеет единственное решение.

Пример 26. Рассмотрим систему вида (13). Для системы уравнений (13) определим начальные условия:

(24)

Задача (13), (24) определена на

$$\Omega_T = \{(t, x) \,|0 \le t \le T,\ x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

Аналогично, как в примере 20, мы получаем, что для любого $T > 0$ задача Коши (13), (24) имеет единственное решение.

Заключение

В данной работе рассмотрена система с правыми частями специального вида. Приведены примеры, из которых следует, что при определенных условиях существует задача Коши для системы с правыми частями специального вида с единственным локальным решением. Приведены примеры, из которых следует, что при определенных условиях существует задача Коши для системы с правыми частями специального вида с единственным нелокальным решением.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида / М.В. Донцова // Журнал Средневолжского математического общества. — 2018. — Т. 20. — № 4. — с. 384-394.
2. Донцова М.В. Разрешимость задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями f1=a2u(t,x) + b2(t)v(t,x), f2=g2v(t,x) / М.В. Донцова // Уфимский математический журнал. — 2019. — Т. 11. — № 1. — с. 26-38.
3. Dontsova M.V. Solvability of the Cauchy Problem for a Quasilinear System in Original Coordinates / M.V. Dontsova // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 249. — № 6. — p. 918-928.
4. Zikirov O.S. Solvability of a Mixed Problem with an Integral Condition for a Third-Order Hyperbolic Equation / O.S. Zikirov, D.K. Kholikov // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 245. — № 3. — p. 323-331.
5. Zikirov O.S. On boundary-value problem for hyperbolic-type equation of the third order / O.S. Zikirov // Lithuanian Mathematical Journa. — 2007. — Vol. 47. — № 4. — p. 484-495.
6. Zikirov O.S. On solvability of the Dirichlet problem for the third-order hyperbolic equation / O.S. Zikirov // Lithuanian Mathematical Journal. — 2010. — Vol. 50. — № 2. — p. 239-247.
7. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А.В. Бицадзе. — Москва: Наука, 1966. — 203 с.
8. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — Москва: Наука, 1981. — 448 с.
9. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. — Новосибирск: НГУ, 1983. — 84 с.
10. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — Москва: Мир, 1968. — 527 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Dontsova M.V. Usloviya nelokalnoi razreshimosti sistemi kvazilineinikh uravnenii pervogo poryadka s pravimi chastyami spetsialnogo vida [The nonlocal solvability conditions for a system of quasilinear equations of the first order special right-hand sides] / M.V. Dontsova // Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva [Journal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva]. — 2018. — Vol. 20. — № 4. — p. 384-394. [in Russian]
2. Dontsova M.V. Razreshimost zadachi Koshi dlya sistemi kvazilineinikh uravnenii pervogo poryadka s pravimi chastyami f1=a2u(t,x) + b2(t)v(t,x), f2=g2v(t,x) [Solvability of Cauchy problem for a system of first order quasilinear equations with right-hand sides f1=a2u(t,x) + b2(t)v(t,x), f2=g2v(t,x)] / M.V. Dontsova // Ufimskii matematicheskii zhurnal [Ufa Mathematical Journal]. — 2019. — Vol. 11. — № 1. — p. 26-38. [in Russian]

 © Авторы статьи / Authors of the article

3. Dontsova M.V. Solvability of the Cauchy Problem for a Quasilinear System in Original Coordinates / M.V. Dontsova // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 249. — № 6. — p. 918-928.

4. Zikirov O.S. Solvability of a Mixed Problem with an Integral Condition for a Third-Order Hyperbolic Equation / O.S. Zikirov, D.K. Kholikov // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 245. — № 3. — p. 323-331.

5. Zikirov O.S. On boundary-value problem for hyperbolic-type equation of the third order / O.S. Zikirov // Lithuanian Mathematical Journa. — 2007. — Vol. 47. — № 4. — p. 484-495.

6. Zikirov O.S. On solvability of the Dirichlet problem for the third-order hyperbolic equation / O.S. Zikirov // Lithuanian Mathematical Journal. — 2010. — Vol. 50. — № 2. — p. 239-247.

7. Biczadze A.V. Kraevy'e zadachi dlya e'llipticheskix uravnenij vtorogo poryadka [Boundary value problems for second order elliptic equations] / A.V. Biczadze. — Moscow: Nauka, 1966. — 203 p. [in Russian]

8. Biczadze A.V. Nekotory'e klassy' uravnenij v chastny'x proizvodny'x [Some classes of partial differential equations] / A.V. Biczadze. — Moscow: Nauka, 1981. — 448 p. [in Russian]

9. Vragov V.N. Kraevy'e zadachi dlya neklassicheskix uravnenij matematicheskoj fiziki [Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics] / V.N. Vragov. — Novosibirsk: NGU, 1983. — 84 p. [in Russian]

10. Fridman A. Uravneniya s chastny'mi proizvodny'mi parabolicheskogo tipa [Partial differential equations of parabolic type] / A. Fridman. — Moscow: Mir, 1968. — 527 p. [in Russian]