ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА/DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.167.71 EDN: HJRRTN

О ПОЛУЧЕНИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Научная статья

Антоновская О.Г.[1,] *, Бесклубная А.В.[2]
[1] ORCID : 0000-0002-5688-7996;
[1, 2] Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (olga.antonovsckaja[at]yandex.ru)

Предложена: 24.01.2026; Принята: 23.04.2026; Опубликована: 18.05.2026

Аннотация

В работе решается задача о получении ограничений на производные высших порядков квадратичной функции Ляпунова в силу линейной дифференциальной системы с постоянными коэффициентами. При этом используется методика, основанная на применении метода неопределенных множителей Лагранжа и позволяющая заменить ограничения на производные квадратичной функции ограничениями на ее коэффициенты. В качестве иллюстрации рассматривается вопрос о нахождении ограничений на производные второго и третьего порядков для квадратичной функции Ляпунова, построенной с учетом выполнения ограничений на ее первую производную в силу системы. Рассмотрены случай различных отрицательных действительных собственных значений матрицы системы и случай, когда все собственные значения имеют отрицательные действительные части, различны и действительны, за исключением пары комплексно-сопряженных собственных значений, имеющих наименьший модуль действительной части.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, квадратичная функция Ляпунова, производные высших порядков функции Ляпунова.

ON THE DERIVATION OF LIMITS FOR HIGHER-ORDER DERIVATIVES OF THE QUADRATIC LYAPUNOV FUNCTION

Research article

Antonovskaya O.G.[1,] *, Besklubnaya A.V.[2]
[1] ORCID : 0000-0002-5688-7996;
[1, 2] Nyzhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation

* Corresponding author (olga.antonovsckaja[at]yandex.ru)

Suggested: 24.01.2026; Accepted: 23.04.2026; Published: 18.05.2026

Abstract

The work solves the problem of obtaining limits on higher-order derivatives of a quadratic Lyapunov function due to a linear differential system with constant coefficients. The method is based on the application of Lagrange’s method of undetermined multipliers, which allows the limits on the derivatives of the quadratic function to be replaced by limits on its coefficients. As an illustration, the problem of finding constraints on the second- and third-order derivatives of a quadratic Lyapunov function, constructed subject to constraints on its first derivative arising from the system, is examined. The case of various negative real eigenvalues of the system matrix is discussed, as well as the case where all eigenvalues have negative real parts, are distinct and real, with the exception of a pair of complex-conjugate eigenvalues having the smallest absolute value of the real part.

Keywords: system of differential equations, quadratic Lyapunov function, higher-order derivatives of the Lyapunov function.

Введение

Одним из наиболее часто применяемых методов при решении задач нахождения оптимальных управлений является метод функций Ляпунова [1]. При этом традиционно трудности представляет вопрос о получении собственно функций Ляпунова, удобных при решении задачи в каждом конкретном случае. К счастью, во многих случаях в качестве функций Ляпунова могут быть использованы положительно определенные квадратичные формы, что облегчает задачу их построения [2]. А уже сами квадратичные функции Ляпунова подбираются со свойствами, определяемыми особенностями рассмотренной задачи [3].

К настоящему времени появились методы исследования, использующие наряду с первой производной функции Ляпунова в силу системы производные высших порядков [4], [5], [6], [7]. В представленной работе изложена методика получения ограничений на пределы изменения производных высших порядков квадратичной функции Ляпунова. Было показано, что ее производные второго и третьего порядка в силу системы также являются квадратичными формами. Впервые задача исследования производных порядка выше первого была сведена к задаче нахождения условных экстремумов, т.е. находились наибольшие или наименьшие значения соответствующих квадратичных форм при известных условиях. Для решения задачи нахождения условных экстремумов был использован метод неопределенных множителей Лагранжа. Предложенная методика была проиллюстрирована на примере квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданному ограничению на ее первую производную в силу линейной автономной системы дифференциальных уравнений. При этом были рассмотрены два случая: случай, когда все собственные значения матрицы системы различны и отрицательны и случай, когда все собственные значения имеют отрицательные действительные части, различны и действительны, за исключением пары комплексно-сопряженных собственных значений, имеющих наименьший модуль действительной части.

Общая постановка задачи и условия, дающие ее решение

Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ будем рассматривать линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, \quad x = \left(x_1, \dots, x_n\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Функцию Ляпунова будем подбирать в классе квадратичных форм

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} K x \quad \left(K^{\mathrm{T}} = K\right). \tag{2}$$

Элементы постоянных $n \times n$ -матриц A и K вещественные. Первая производная $\dot{V}_{(1)}(x)$ квадратичной формы (2) в силу системы (1) также является квадратичной формой

$$\dot{V}_{(1)}(x) = x^{\mathrm{T}} A_K^{(1)} x, \quad A_K^{(1)} = A^{\mathrm{T}} K + KA \tag{3}$$

Матрица $A_K^{(1)}$ симметрична.

В дальнейшем будем считать, что собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A коэффициентов системы (1), т.е. корни уравнения $\det\left(A - \lambda E_n\right) = 0,$ имеют отрицательные вещественные части, и что квадратичная форма (2) положительно определена (здесь E_n единичная $n \times n$ -матрица). Это предположение означает, в частности, что у системы (1) имеется [2] квадратичная функция Ляпунова.

Аналогично можно показать, что вторая и третья производные функции (2) в силу (1) также будут квадратичными формами

$$\ddot{V}_{(1)}(x) = x^{\mathrm{T}} A_K^{(2)} x, \quad A_K^{(2)} = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^2 K + 2A^{\mathrm{T}} KA + K(A)^2 \tag{4}$$

$$\dddot{V}_{(1)}(x) = x^{\mathrm{T}} A_K^{(3)} x, \quad A_K^{(3)} = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^3 K + 3\left(A^{\mathrm{T}}\right)^2 KA + 3A^{\mathrm{T}} K(A)^2 + K(A)^3 \tag{5}$$

Матрицы $A_K^{(2)}, A_K^{(3)}$ симметричны.

Задача состоит в определении пределов изменения функций (4) и (5). При решении поставленной задачи воспользуемся следующим утверждением.

Лемма. Пусть даны две квадратичные формы

$$W(x) = x^{\mathrm{T}} D x \quad \left(D^{\mathrm{T}} = D\right), \tag{6}$$

$$Z(x) = x^{\mathrm{T}} C x \quad \left(C^{\mathrm{T}} = C\right). \tag{7}$$

Элементы постоянных $n \times n$ -матриц D и C вещественные. И пусть (6) является знакоопределенной. Тогда наибольшее и наименьшее значения величины $\frac{Z(x)}{W(x)}$ будут равны $\mu_{\max}$ и $\mu_{\min}$, где $\mu_{\max}$ и $\mu_{\min}$ — наибольший и наименьший корни уравнения

$$\det(C - \mu D) = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Предположим, что квадратичная форма (6) является положительно определенной (случай ее отрицательной определенности рассматривается аналогично). Подобно [8], для определения экстремальных значений (7) в силу (8) воспользуемся методом неопределенных множителей

Лагранжа. Рассмотрим поверхность уровня $W(x) = W_0.$ Так как (6) есть положительно определенная квадратичная форма, то $W(x) = W_0$ представляет собой замкнутое ограниченное множество, и наибольшее и наименьшее значения (7) на этом множестве конечны и достигаются.

Выбирая в качестве исследуемой функции $F(x) = Z(x) - \mu\left(W(x) - W_0\right),$ для определения значений переменных и множителя Лагранжа μ приходим к системе уравнений

$$(C - \mu D)x = 0, \tag{9}$$

$$\frac{z}{w} = \mu, \theta_i = \frac{x_i}{x_n}, \tag{10}$$

Будучи системой линейных однородных уравнений (9) имеет ненулевые решения только, когда ее определитель равен нулю, т.е. имеет место (8). Все корни этого уравнения вещественны [9], и каждому корню μ соответствуют значения $\frac{z}{w} = \mu, \theta_i = \frac{x_i}{x_n},$ позволяющие найти из (10) найти точки поверхности, в которых это значение достигается. Поэтому, хотя метод неопределенных множителей Лагранжа дает необходимое условие существования условных экстремумов, последнее утверждение позволяет сделать вывод, что минимальное и максимальное значения $Z(x)$ на поверхности уровня $W(x) = W_0$ будут равны $\mu_{\max} W_0$ и $\mu_{\min} W_0$, где $\mu_{\max}$ и $\mu_{\min}$ - наибольший и наименьший корни уравнения (8). А т.к. W_0 - любое положительное число, то наибольшее и наименьшее значения величины $\frac{Z(x)}{W(x)}$ будут равны $\mu_{\max}$ и $\mu_{\min}$.

Лемма доказана.

Используя утверждение доказанной выше леммы, докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1). Тогда наибольшее и наименьшее значения величины $\dot{V}_{(1)}/V$, где $\dot{V}_{(1)}$ есть первая производная (2) в силу (1), равны $\mu^{(1)}_{\max}$ и $\mu^{(1)}_{\min}$, где $\mu^{(1)}_{\max}$ и $\mu^{(1)}_{\min}$ - наибольший и наименьший корни уравнения

$$\det\left(A^{(1)}_K - \mu K\right) = 0, \tag{11}$$

причем $2\max_{i=1,n} \operatorname{Re}\lambda_i \le \mu^{(1)}_{\max} < 0.$

Доказательство. В силу доказанной выше леммы, наибольшее и наименьшее значения величины $\dot{V}_{(1)}/V$, где $\dot{V}_{(1)}$ есть первая производная (2) в силу (1), равны $\mu^{(1)}_{\max}$ и $\mu^{(1)}_{\min}$, где $\mu^{(1)}_{\max}$ и $\mu^{(1)}_{\min}$ — наибольший и наименьший корни уравнения. Осталось доказать ограничения на величину $\mu^{(1)}_{\max}$.

По условию теоремы квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1), поэтому квадратичная форма (3) отрицательно определена, а значит, $\mu^{(1)}_{\max} < 0$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы остаётся установить справедливость неравенства $2\max_{i=1,n} \operatorname{Re}\lambda_i \le \mu^{(1)}_{\max}$. Пусть, без нарушения общности, вещественная часть собственного значения λ_n матрицы A не меньше, чем вещественные части остальных её собственных значений. Могут представиться только два случая: либо 1) $\operatorname{Im}\lambda_n = 0,$ либо 2) $\operatorname{Im}\lambda_n \ne 0$. Рассмотрим каждый из них отдельно.

В случае 1) обозначим через $y \in \mathbb{R}^n$ собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_n. Тогда собственного значения $Ay = \lambda_n y$ и $y^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = \lambda_n y^{\mathrm{T}}$. Поэтому верно равенство

$$y^{\mathrm{T}} A^{(1)}_K y = y^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}K + KA\right) y = \lambda_n\left(y^{\mathrm{T}}Ky + y^{\mathrm{T}}Ky\right) = 2\lambda_n y^{\mathrm{T}}Ky,$$

в силу которого получаем оценку

$$\mu^{(1)}_{\max} = \max_{x\ne 0}\frac{x^{\mathrm{T}}A^{(1)}_K x}{x^{\mathrm{T}}Kx} \ge \frac{y^{\mathrm{T}}A^{(1)}_K y}{y^{\mathrm{T}}Ky} = \frac{2\lambda_n y^{\mathrm{T}}Ky}{y^{\mathrm{T}}Ky} = 2\lambda_n = 2\operatorname{Re}\lambda_n.$$

В случае 2) собственному значению $\lambda_n = \alpha + i\beta$ матрицы A отвечает в пространстве $\mathbb{C}^{\mathrm{T}}$ собственный вектор $y = y_1 + iy_2,\quad y_i \in \mathbb{R}^n,\quad i = 1,2.$ Раскрывая в равенстве $A\left(y_1 + iy_2\right) = (\alpha + i\beta)\left(y_1 + iy_2\right)$ скобки и отделяя вещественную и мнимую части, получаем $Ay_1 = \alpha y_1 - \beta y_2,\quad Ay_2 = \beta y_1 + \alpha y_2$ и, следовательно, $y_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \alpha y_1^{\mathrm{T}} - \beta y_2^{\mathrm{T}},\quad y_2^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \alpha y_2^{\mathrm{T}} + \beta y_1^{\mathrm{T}}.$ В силу двух последних соотношений несложно убедиться в том, что имеет место равенство

$$y_i^{\mathrm{T}}A^{(1)}_K y_i = 2\alpha y_i^{\mathrm{T}}Ky_i + (-1)^i\beta\left(y_1^{\mathrm{T}}Ky_2 + y_2^{\mathrm{T}}Ky_1\right),\quad i = 1,2. \tag{12}$$

Выберем тот вектор y_i, для которого второе слагаемое в правой части неотрицательно. Тогда при таком y_i вследствие (12) справедливо неравенство $y_i^{\mathrm{T}}A^{(1)}_K y_i \ge 2\alpha y_i^{\mathrm{T}}Ky_i$, в силу которого и положительной определенности квадратичной формы (2) получаем оценку

$$\mu^{(1)}_{\max} = \max_{x\ne 0}\frac{x^{\mathrm{T}}A^{(1)}_K x}{x^{\mathrm{T}}Kx} \ge \frac{y_i^{\mathrm{T}}A^{(1)}_K y_i}{y_i^{\mathrm{T}}Ky_i} \ge \frac{2\alpha y_i^{\mathrm{T}}Ky_i}{y_i^{\mathrm{T}}Ky_i} = 2\alpha = 2\operatorname{Re}\lambda_n.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть квадратичная форма (2) удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда наибольшее и наименьшее значения величины $\ddot{V}_{(1)}/V$, где $\ddot{V}_{(1)}$ есть вторая производная (2) в силу (1), равны $\mu^{(2)}_{\max}$ и $\mu^{(2)}_{\min}$, где $\mu^{(2)}_{\max}$ и $\mu^{(2)}_{\min}$ — наибольший и наименьший корни уравнения

$$\det\left(A^{(2)}_K - \mu K\right) = 0, \tag{13}$$

причем $\mu^{(2)}_{\min} \le 4\min_{i=1,n} Re^2\lambda_i.$

Доказательство. В силу доказанной выше леммы, наибольшее и наименьшее значения величины $\ddot{V}_{(1)}/V$, где $\ddot{V}_{(1)}$ есть вторая производная (2) в силу (1), равны $\mu^{(2)}_{\max}$ и $\mu^{(2)}_{\min}$, где $\mu^{(2)}_{\max}$ и $\mu^{(2)}_{\min}$ - наибольший и наименьший корни уравнения (13). Осталось доказать ограничения на величину $\mu^{(2)}_{\min}$.

При доказательстве теоремы 1 показано, что $\max\dot{V}_{(1)}/V \ge 2\max_{i=1,n}\operatorname{Re}\lambda_i.$ А т. к. $V(x)$ является функцией Ляпунова системы (1), то квадратичная форма $\dot{V}_{(1)}(x)$ является отрицательно определенной. Поэтому, как и предыдущем случае, получаем $\ddot{V}_{(1)}/\dot{V}_{(1)} \ge 2\max_{i=1,n}\operatorname{Re}\lambda_i.$ Но тогда

$$\frac{\ddot{V}_{(1)}}{V} = \frac{\ddot{V}_{(1)}}{\dot{V}_{(1)}}\frac{\dot{V}_{(1)}}{V} \le \left(2\max_{i=1,n}\operatorname{Re}\lambda_i\right)^2 = 4\min_{i=1,n}\operatorname{Re}^2\lambda_i$$

а поскольку значение $\mu^{(2)}_{\min} = \dddot{V}_{(1)}/V$ реально принимается, то $\mu^{(2)}_{\min} \leq 4\min_{i=1,n} Re^2 \lambda_i$.
Теорема доказана.

И непосредственно из утверждения леммы может быть получена.

Теорема 3. Пусть квадратичная форма (2) удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда наибольшее и наименьшее значения величины $\ddddot{V}_{(1)}/V$, где $\ddddot{V}_{(1)}$ есть третья производная (2) в силу (1), равны $\mu^{(3)}_{\max}$ и $\mu^{(3)}_{\min}$, где $\mu^{(3)}_{\max}$ и $\mu^{(3)}_{\min}$ — наибольший и наименьший корни уравнения

$$\det\left(A^{(3)}_K - \mu K\right) = 0. \tag{14}$$

Частные случаи нахождения ограничений на производные функции Ляпунова высших порядков

Пусть квадратичная функция Ляпунова для системы (1) строится в соответствии с методикой работ [10], [11], основанной на переходе к каноническим координатам.

А. Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения системы (1) вещественны и различны; без нарушения общности считаем, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < 0.$ Тогда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x = B\xi, \quad \xi = \left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \quad B = \left(b_{ij}\right)^n_{i,j=1}, \tag{15}$$

приводящее систему к каноническому виду [10]

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad i = \overline{1,n}, \quad A = \mathrm{diag}\left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right] \tag{16}$$

(У матрицы B её k-й столбец является собственным вектором матрицы A соответствующим собственному значению λ_k , $k = \overline{1,n}.$) При этом квадратичные формы (2), (3), (4) и (5) перейдут соответственно в квадратичные формы $W(\xi), \dot{W}_{(16)}(\xi), \ddot{W}_{(16)}(\xi), \dddot{W}_{(16)}(\xi),$ причём [3]

$$\max_{V=V_0} \frac{\ddot{V}_{(1)}}{V} = \max_{W=V_0} \frac{\ddot{W}_{(16)}}{W}, \quad \min_{\dot{V}_{(1)}=\dot{V}_0} \frac{\ddot{V}_{(1)}}{\dot{V}_{(1)}} = \min_{\dot{W}_{(16)}=\dot{V}_0} \frac{\ddot{W}_{(16)}}{\dot{W}_{(16)}}. \tag{17}$$

Таким образом, не ограничивая общности, можно предполагать, что система (1) имеет канонический вид (16). Причем матрицы квадратичных форм типа (3), (4) (5) примут вид: $A^{(1)}_K = \left(\left(\lambda_i + \lambda_j\right) K_{ij}\right)^n_{i,j=1}, A^{(2)}_K = \left(\left(\lambda_i + \lambda_j\right)^2 K_{ij}\right)^n_{i,j=1}, \quad A^{(3)}_K = \left(\left(\lambda_i + \lambda_j\right)^3 K_{ij}\right)^n_{i,j=1}$.

Построим для системы (9) квадратичную функцию Ляпунова (2), удовлетворяющую равенству $\max\limits_{W=W_0\neq 0} \dot{W}_{(16)} = \delta W_0,$ где в качестве заранее выбранной величины δ можно взять любое число из полуинтервала $\left[2\lambda_n, 0\right)$.

Квадратичную функцию Ляпунова с $\max\limits_{W=W_0\neq 0} \dot{W}_{(16)} = \delta W_0,$ зададим следующим образом:

$$W(\xi) = \xi^{\mathrm{T}} K \xi, \quad \xi = \left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

где

$$K = \mathrm{diag}\left[K_{11}, \ldots, K_{n-2,n-2}, \begin{pmatrix} K_{n-1,n-1} & K_{n-1,n} \\ K_{n-1,n} & K_{nn} \end{pmatrix}\right] \tag{19}$$

причем $K_{ii} > 0, i = \overline{1,n}, K^2_{n-1,n} = \left(1 - R(\delta) K_{n-1,n-1} K_{nn}\right)$, а $R(\delta) = \left(\lambda_{n-1} - \lambda_n\right)^2 \left(\lambda_{n-1} + \lambda_n - \delta\right)^{-2}$.

Несложно убедиться, что при условии $\delta \in \left[2\lambda_n, 0\right)$ величина $R(\delta)$ принадлежит полуинтервалу $\left[\left(\lambda_{n-1} - \lambda_n\right)^2 \left(\lambda_{n-1} + \lambda_n\right)^{-2}, 1\right)$, а квадратичные формы с матрицами K и $A^{(1)}_K$ соответственно положительно и отрицательно определены. (Переходя обратно от канонических переменных к переменным $x_1, \ldots, x_n$, мы получим квадратичную функцию Ляпунова (2), удовлетворяющую заданным ограничениям).

Заметим, что в этом случае корнями уравнения (11) являются:

$$\mu^{(2)}_{n-1,n} = \left[R(\delta)\left(\lambda_{n-1} + \lambda_n\right)^2 - 2\lambda_{n-1}\lambda_n \pm\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{R(\delta)\left(\lambda^2_{n-1} + \lambda^2_n\right)^2 + 4(1 - R(\delta))\lambda^2_{n-1}\lambda^2_n}\right] (R(\delta))^{-1},$$

$$\mu^{(2)}_i = 4\lambda^2_i, \quad i = \overline{1, n-2}.$$

Величины $\mu^{(2)}_i = 4\lambda^2_i, i = \overline{1, n-2}$ очевидно положительны. А $\mu^{(2)}_{n-1,n} > 0$ при $R(\delta) \in \left(1 - 4\lambda^2_{n-1}\lambda^2_n \left(\lambda_{n-1} + \lambda_n\right)^{-2}, 1\right]$.

То есть $\ddot{W}_{(16)}$ положительна при $R(\delta) \in \left(1 - 4\lambda_{n-1}^2\lambda_n^2\left(\lambda_{n-1}+\lambda_n\right)^{-2}, 1\right]$. При этом в неравенстве $\mu_{\min}^{(2)} \le \frac{\ddot{V}_{(1)}}{V} = \frac{\ddot{W}_{(16)}}{W} \le \mu_{\max}^{(2)}$ $\mu_{\min}^{(2)} = \min\left\{\mu_{n-2}^{(2)}, \mu_{n-1}^{(2)}\right\}, \mu_{\max}^{(2)} = \max\left\{\mu_1^{(2)}, \mu_n^{(2)}\right\}$.

При $R(\delta) = 1$ (т.е. $\delta = 2\lambda_n$) $\mu_i^{(2)} = 4\lambda_i^2, i = \overline{1,n}$, т.е. вторая производная $\ddot{W}_{(16)}$ положительна, причем $\mu_{\min}^{(2)} = 4\lambda_n^2, \mu_{\max}^{(2)} = 4\lambda_1^2$.

Корнями уравнения (13) являются:

$$\mu_{n-1,n}^{(3)} = \left[\left(\lambda_{n-1}-\lambda_n\right)^4 - R(\delta)\left(\lambda_{n-1}+\lambda_n\right)^4 \pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{D}\right]\left(\left(\lambda_{n-1}-\lambda_n\right)^2 - R(\delta)\left(\lambda_{n-1}+\lambda_n\right)^2\right)^{-1},$$

где $D = \lambda_{n-1}\lambda_n\left[-3\left(\lambda_{n-1}-\lambda_n\right)^2 + R(\delta)\left[4\left(\lambda_{n-1}+\lambda_n\right)^2 - \left(\lambda_{n-1}-\lambda_n\right)^2\right]\right]$

$$\mu_i^{(3)} = 4\lambda_i^2, \quad i = \overline{1, n-2}.$$

При этом в неравенстве $\mu_{\min}^{(3)} \le \frac{\ddot{V}_{(1)}}{\dot{V}_{(1)}} = \frac{\ddot{W}_{(16)}}{\dot{W}_{(16)}} \le \mu_{\max}^{(3)}$

$$\mu_{\min}^{(3)} = \min\left\{\mu_{n-1}^{(3)}, \mu_n^{(3)}\right\}, \mu_{\max}^{(3)} = \max\left\{\mu_1^{(3)}, \mu_{n-1}^{(3)}\right\}.$$

При $R(\delta) = 1$ (т.е. $\delta = 2\lambda_n$) $\mu_i^{(3)} = 4\lambda_i^2, i = \overline{1,n}$, т.е. третья производная функции Ляпунова отрицательна, причем $\mu_{\min}^{(3)} = 4\lambda_n^2, \mu_{\max}^{(3)} = 4\lambda_1^2$ (здесь корни стоят в квадрате, поскольку рассматривается отношение третьей производной к первой производной, а не к самой функции Ляпунова).

Б. Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения системы (1) различны, причём комплексно-сопряжёнными между собой являются только корни с максимальной действительной частью.

Если $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \operatorname{Re}\lambda_{n-1} = \operatorname{Re}\lambda_n < 0$, где $\lambda_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta$, то для канонической системы дифференциальных уравнений [11] квадратичную функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию $\max\limits_{W=W_0\neq 0} \dot{W} = \delta W_0$, можно искать в виде подобном (18), где

$$\left(K_{n-1,n-1} + K_{nn}\right)^2 = C(\delta)\left(K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2\right), C(\delta) = \frac{(\delta-2\alpha)^2}{\beta^2} + 4.$$

Кроме того будем считать, что $K_{n-1,n-1} = K_{nn}$. (Переходя обратно от канонических переменных к переменным $x_1, \ldots x_n$, мы получим квадратичную функцию Ляпунова (2), удовлетворяющую заданным ограничениям).

Заметим, что в этом случае корнями уравнения (11) являются:

$$\mu_{n-1,n}^{(2)} = 4\alpha^2 + (\delta-2\alpha)^2 \pm |\delta-2\alpha|\sqrt{(\delta-2\alpha)^2 + 4\left(\alpha^2+\beta^2\right)},$$
$$\mu_i^{(2)} = 4\lambda_i^2, \quad i = \overline{1, n-2}.$$

Величины $\mu_i^{(2)} = 4\lambda_i^2, \quad i = \overline{1, n-2}$ очевидно положительны. А $\mu_{n-1,n}^{(2)} > 0$ всегда при $|\alpha| > |\beta|$, а при $|\alpha| \le |\beta| \delta \in \left(2\alpha - \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, 2\alpha + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)$. Вторая производная положительна, если $\mu_i^{(2)} > 0 (i = \overline{1,n})$.

При этом в неравенстве $\mu_{\min}^{(2)} \le \frac{\ddot{V}_{(1)}}{V_{(1)}} = \frac{\ddot{W}_{(16)}}{W_{(16)}} \le \mu_{\max}^{(2)}$

$$\mu_{\min}^{(2)} = \min\left\{\mu_{n-2}^{(2)}, \mu_{n-1}^{(2)}\right\}, \mu_{\max}^{(2)} = \max\left\{\mu_1^{(2)}, \mu_n^{(2)}\right\}.$$

При $\delta = 2\alpha$ $\mu_{n-1,n}^{(2)} = 4\alpha^2$, причем $\mu_{\min}^{(2)} = 4\alpha^2, \mu_{\max}^{(2)} = 4\lambda_1^2$.

Корнями уравнения (13) являются:

$$\mu_{n-1,n}^{(2)} = 4\alpha^2 + \frac{4\left(\alpha^2+\beta^2\right)(\delta-2\alpha)^2 \pm |\delta-2\alpha|\sqrt{\widetilde{D}}}{4\alpha^2 - (\delta-2\alpha)^2},$$

$$\widetilde{D} = 4\left(\left(2\alpha^2+\beta^2\right) + \alpha^2\beta^2\right) + 3\left(\alpha^2+\beta^2\right)(\delta-2\alpha)^2,$$
$$\mu_i^{(3)} = 4\lambda_i^2, \quad i = \overline{1, n-2}.$$

При $\delta = 2\alpha$ $\mu_{n-1,n}^{(3)} = 4\alpha^2$, причем $\mu_{\min}^{(3)} = 4\alpha^2, \mu_{\max}^{(3)} = 4\lambda_1^2$ (здесь корни стоят в квадрате, поскольку рассматривается отношение третьей производной к первой производной, а не к самой функции Ляпунова).

Заключение

В работе предложена новая методика получения ограничений на производные высших порядков квадратичной функции Ляпунова в силу линейной автономной системы дифференциальных уравнений, основанная на методе нахождения условных экстремумов квадратичных форм. Методика проиллюстрирована на примере квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданному ограничению на первую производную в силу системы.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Кунцевич В.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В.М. Кунцевич, М.М. Лычак. — Москва: Наука, 1977. — 400 с.
2. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова / Е.А. Барбашин. — Москва: Наука, 1970. — 240 с.
3. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами / О.Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 9. — С. 1220–1224.
4. Лапин К.С. Высшие производные функции Ляпунова и равномерная ограниченность в пределе решений по Пуассону / К.С. Лапин // Динамические системы в науке и технологиях : тезисы докладов Международной конференции. — 2018. — С. 41–42.
5. Кириченко В.В. Построение функций с положительной второй производной для линейной системы дифференциальных уравнений / В.В. Кириченко, А.М. Ковалев // Труды ИПММ НАН Украины. — 2008. — Т. 17. — С. 74–79.
6. Кириченко В.В. Использование метода диагонализации при построении функции Ляпунова для линейных систем дифференциальных уравнений / В.В. Кириченко // Труды ИПММ НАН Украины. — 2009. — Т. 18. — С. 85–93.
7. Цыганков А.А. Производные функций Ляпунова высших порядков / А.А. Цыганков // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 2. — С. 277–279.
8. Антоновская О.Г. Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем / О.Г. Антоновская // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 2 (501). — С. 19–23.
9. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — Москва: Мир, 1989. — 655 с.
10. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами / О.Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 3. — С. 275–281.
11. Антоновская О.Г. О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях ее коэффициентов / О.Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, № 3. — С. 295–302.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Kuncevich V.M. Sintez sistem avtomaticheskogo upravlenija s pomoshh'ju funkcij Ljapunova [Synthesis of automatic control systems using Lyapunov functions] / V.M. Kuncevich, M.M. Lychak. — Moscow: Nauka, 1977. — 400 p. [in Russian]
2. Barbashin E.A. Funkcii Ljapunova [Lyapunov functions] / E.A. Barbashin. — Moscow: Nauka, 1970. — 240 p. [in Russian]
3. Antonovskaja O.G. O postroenii kvadratichnoj funkcii Ljapunova s zadannymi svojstvami [On the construction of a quadratic Lyapunov function with given properties] / O.G. Antonovskaja // Differencial'nye uravnenija [Differential Equations]. — 2013. — Vol. 49, № 9. — P. 1220–1224. [in Russian]
4. Lapin K.S. Vysshie proizvodnye funkcii Ljapunova i ravnomernaja ogranichennost' v predele reshenij po Puassonu [Higher derivatives of the Lyapunov function and uniform boundedness in the limit of Poisson solutions] / K.S. Lapin // Dinamicheskie sistemy v nauke i tehnologijah : tezisy dokladov Mezhdunarodnoj konferencii [Dynamic systems in science and technology : abstracts of the International Conference]. — 2018. — P. 41–42. [in Russian]
5. Kirichenko V.V. Postroenie funkcij s polozhitel'noj vtoroj proizvodnoj dlja linejnoj sistemy differencial'nyh uravnenij [Construction of functions with a positive second derivative for a linear system of differential equations] / V.V. Kirichenko, A.M. Kovalev // Trudy IPMM NAN Ukrainy [Proceedings of IPMM NAS of Ukraine]. — 2008. — Vol. 17. — P. 74–79. [in Russian]
6. Kirichenko V.V. Ispol'zovanie metoda diagonalizacii pri postroenii funkcii Ljapunova dlja linejnyh sistem differencial'nyh uravnenij [Use of the diagonalization method in constructing a Lyapunov function for linear systems of differential equations] / V.V. Kirichenko // Trudy IPMM NAN Ukrainy [Proceedings of IPMM NAS of Ukraine]. — 2009. — Vol. 18. — P. 85–93. [in Russian]
7. Cygankov A.A. Proizvodnye funkcij Ljapunova vysshih porjadkov [Higher order derivatives of Lyapunov functions] / A.A. Cygankov // Differencial'nye uravnenija [Differential Equations]. — 2004. — Vol. 40, № 2. — P. 277–279. [in Russian]
8. Antonovskaja O.G. Postroenie kvadratichnyh funkcij Ljapunova, udovletvorjajushhih zadannym ogranichenijam, dlja nepreryvnyh i diskretnyh dinamicheskih sistem [Construction of quadratic Lyapunov functions satisfying given constraints for continuous and discrete dynamical systems] / O.G. Antonovskaja // Izvestija vuzov. Matematika [University Proceedings. Mathematics]. — 2004. — № 2 (501). — P. 19–23. [in Russian]
9. Horn R. Matrichnyj analiz [Matrix analysis] / R. Horn, Ch. Johnson. — Moscow: Mir, 1989. — 655 p. [in Russian]

10. Antonovskaja O.G. Ob opredelenii kojefficientov kvadratichnoj funkcii Ljapunova s zadannymi svojstvami [On determining the coefficients of a quadratic Lyapunov function with given properties] / O.G. Antonovskaja // Differencial'nye uravnenija [Differential Equations]. — 2016. — Vol. 52, № 3. — P. 275–281. [in Russian]
11. Antonovskaja O.G. O sohranenii kvadratichnoj funkcii Ljapunova linejnoj differencial'noj avtonomnoj sistemy pri stacionarnyh vozmushhenijah ee kojefficientov [On the preservation of the quadratic Lyapunov function of a linear differential autonomous system under stationary perturbations of its coefficients] / O.G. Antonovskaja // Differencial'nye uravnenija [Differential Equations]. — 2023. — Vol. 59, № 3. — P. 295–302. [in Russian]