

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.125.50>

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗАГРЯЗНЕНИЯ В РЕКАХ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОЙ АЭРАЦИИ

Научная статья

Шабалин В.В.<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> ORCID : 0000-0002-8168-2343;<sup>1</sup> Санкт-Петербургский Архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация

\* Корреспондирующий автор (vvshabalin[at]mail.ru)

**Аннотация**

Исследование мотивировано высоким уровнем загрязнения воды в реке Охта и Славянка в Ленинградской области. Для решения проблемы представлена простая математическая модель загрязнения реки и исследовано влияние естественной аэрации на разложение загрязнителя. Модель состоит из пары связанных уравнений диффузии-конвекции для концентраций загрязнителя и растворенного кислорода. Связь этих уравнений определяется реакцией между кислородом и загрязнителем с образованием безвредных соединений. Проведена численная и аналитическая оценка транспортировки загрязняющих веществ в водах реки вдоль её длины (в одном пространственном измерении). В работе рассмотрены разные варианты моделей распространения загрязняющих веществ в водной среде с заданным набором параметров для конкретной реки. Эти параметры соответствуют реальным ситуациям загрязнения рек и могут способствовать принятию адекватных решений при планировании ограничений, налагаемых на источники производственного и бытового загрязнения в сельских и городских районах.

**Ключевые слова:** математическое моделирование загрязнения водной среды, нелинейные дифференциальные уравнения, диффузия и адвекция.

## THE SPREAD OF POLLUTION IN RIVERS UNDER NATURAL AERATION

Research article

Shabalin V.V.<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> ORCID : 0000-0002-8168-2343;<sup>1</sup> Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint-Petersburg, Russian Federation

\* Corresponding author (vvshabalin[at]mail.ru)

**Abstract**

The research is motivated by the high level of water pollution in the river Okhta and Slavyanka in the Leningrad Oblast. To solve the problem, a simple mathematical model of river pollution is presented, and the effect of natural aeration on pollutant decomposition is examined. The model consists of a pair of coupled diffusion and convection equations for concentrations of pollutant and dissolved oxygen. The linking of these equations is determined by the reaction between oxygen and pollutant, with the formation of harmless compounds. Numerical and analytical evaluation of pollutant transportation in river water along its length (in one spatial dimension) has been performed. The work examines different variants of pollutant distribution models in the aquatic environment with a given set of parameters for a particular river. These parameters correspond to real situations of river pollution and can contribute to making adequate decisions in planning the restrictions imposed on the sources of industrial and domestic pollution in rural and urban areas.

**Keywords:** mathematical modeling of aquatic pollution, nonlinear differential equations, diffusion and advection.

**Введение**

Проблема качества питьевой и других видов воды постоянно возрастает в результате роста численности населения мира и непрерывного повышения промышленной и бытовой деятельности человека [1], [2]. Самоочищение воды речных водоемов от загрязнений происходит за счет сложного комплекса физических, химических и биологических факторов. Это происходит благодаря разбавлению загрязнений большой массой воды, перемешиванию, оседанию взвесей, влиянию солнечного света, аэрации и т.п. В загрязненной реке содержание кислорода в воде сильно уменьшается, поэтому для очистки речных водоемов от бактерий, растворенных органических веществ необходим кислород [3].

При оценке качества воды в реке необходимо учитывать множество факторов: уровень растворенного кислорода; наличие нитратов, хлоридов, фосфатов; уровень взвешенных веществ и т.д. Загрязнители от сельскохозяйственных работ могут вносить значительный вклад в ухудшение качества поверхностных и подземных вод [4], [5].

Существует множество специальных гидротехнических устройств, которые выполняют искусственную аэрацию воды. Но аэрация может происходить естественным способом, за счет соприкосновения воды с атмосферным воздухом. В естественных условиях кислород поступает из атмосферы через водную поверхность (атмосферная аэрация) или образуется в результате жизнедеятельности водных растений (фотосинтетическая аэрация). В этом случае текущая вода поглощает из воздуха кислород, который растворяется в ней. При этом улучшается циркуляция воды внутри водоема, что оказывает благотворное влияние на водную среду, а также значительно уменьшается объем бескислородной области на глубине водоема.

На формирование кислородного режима водоема оказывает влияние много факторов: интенсивность солнечной радиации, фотосинтез фитопланктона и высших растений, степень потребления кислорода в воде гидробионтами, донными отложениями и скорость ветра. В речных водоемах водная поверхность довольно большая, а глубина невелика. Верхние слои реки насыщены кислородом сильнее, поэтому за счет конвективного переноса постепенно вся толща воды насыщается. Легкое волнение поверхности реки от слабого ветра уже вызывает перемешивание кислорода с водой.

Таким образом, цель настоящей работы состоит в разработке математической модели уменьшения концентрации загрязнителя и повышения растворенного кислорода в условиях естественной аэрации в реке с учетом её течения.

Важным направлением в решении задачи о распространения загрязнений в речной среде является математическое моделирование транспорта загрязняющих веществ [6]. Модельные представления получили широкое распространение для оценки качества воды [7], [8] и для прогнозирования процессов ее очистки [9], [10].

Математические модели оценки качества воды представляются как системы нелинейных дифференциальных уравнений и используются еще с 1920-х годов, например, в 1925 г. известная модель Стритера и Фелпса [11], которая используется для описания баланса растворенного кислорода в реках после попадания загрязняющих веществ. В дальнейшем эта модель была уточнена и в нее вносились различные поправки [12].

Раух и др. [13] математически изучили проблемы загрязнения поверхностных вод, такие как этерификация, острая и хроническая токсичность. Симон и др. [14], [15] представили простую математическую модель загрязнения рек и исследовали влияние аэрации на разложение загрязняющих веществ. Их модель состоит из пары связанных уравнений конвекции-диффузии для загрязняющего вещества и растворенного кислорода. В последнее время были усовершенствованы математические модели загрязнения рек. Хамаунд и др. [16], [17] применили модифицированный метод разложения Лапласа и представили методы решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтера-Фредгольма.

### Объект и методы

В качестве объекта для исследования были выбраны реки Ленинградской области – Славянка и Охта, имеющие пятый класс опасности. Качество воды реки Славянка послужило мотивом для исследования. Предполагалось, что загрязняющие вещества в основном представляют собой биологические отходы, которые подвергались процессам биодеградации с использованием растворенного кислорода. Пределом допустимого уровня загрязнения воды считалась концентрация растворенного в ней кислорода, не менее 30% от показателя насыщения [18].

Для разработки модели загрязнения воды использовали принцип двух связанных уравнений конвекции-диффузии. Эти два уравнения описывают два процесса: поглощение кислорода из воды, связанное с удалением органических соединений углерода, и поступление кислорода из атмосферы в воду путем аэрации [19], [20]. Для концентраций загрязнителя и растворенного кислорода были выбраны различные параметры источников загрязнения.

В модельных расчетах, представленных в настоящей работе, были рассмотрены скорость течения реки и скорость ветра. Поскольку процессы загрязнения и аэрации являются устойчивыми, мы исследовали возникновение стационарных состояний при удалении загрязнителя аэрацией. Учитывая данные об осадках, скорости течения реки, сброса загрязняющих веществ и др. были построены аналитические и численные решения.

Численное решение системы связанных уравнений конвекции-диффузии, аналитические решения этих уравнений при заданных допустимых условиях и построение графиков проводилась с помощью программного пакета Mathematica 12.3 (Wolfram Research), включающего пакет программ для решения дифференциальных уравнений в частных производных NDSolve и Mass Transfer Model Collection.

### Описание математических моделей

Изменение концентрации загрязняющих веществ и кислорода рассматривалось вдоль реки, в поперечном направлении концентрация считалась постоянной. Кроме того, такой параметр модели как длина реки  $L$  задавался значительно больше, чем её ширина. Поэтому при описании водного потока от истока до устья, течение реки принималось как одномерное, с одним пространственным параметром  $x$ (м) вдоль реки. Такое допущение в исходных параметрах модели соответствует критерию Доббинса [21].

Связанность уравнений определяется тем, что кислород реагирует с загрязняющим веществом, образуя безвредные соединения. Принимаем (для упрощения), что диффузия идет в одном направлении и сопровождается вынужденной конвекцией, с концентрацией  $C_x(x,t)$  (кг·м<sup>-3</sup>) для загрязнителя и  $C_o(x,t)$  (кг·м<sup>-3</sup>) для растворенного кислорода. Следовательно, для рассмотрения скорости изменения концентрации в зависимости от положения  $x$  и времени  $t$  (дни), может быть предложена следующая система уравнений:

$$\frac{\delta C_x}{\delta t} = D_X \frac{\delta^2(C_x)}{\delta x^2} - \frac{\delta(vC_x)}{\delta x} - K_1 \frac{C_o}{C_o+k} C_x + \frac{q_x H(x)}{S}, (0 < x < L, t > 0) \quad (1)$$

$$\frac{\delta C_o}{\delta t} = D_O \frac{\delta^2(C_o)}{\delta x^2} - \frac{\delta(vC_o)}{\delta x} - K_2 \frac{C_o}{C_o+k} C_x + \frac{\alpha(C_s - C_o)}{S}, (0 < x < L, t > 0) \quad (2)$$

В уравнение (1) входит слагаемое, описывающее снижение концентрации загрязняющего вещества со скоростью  $q_x \cdot H(x)$ . В уравнении (2), которое описывает массовое содержание растворенного кислорода, учитывается скорость увеличения концентрации кислорода  $C_o$  до насыщения  $C_s$  [ $\alpha \cdot (C_s - C_o)$ ]. Величина  $H(x)$  представляет собой функцию Хэвисайда ( $H(x) = 1$ , если  $x > 0$  и 0 во всех остальных случаях). Добавление ее в качестве множителя учитывает то, что загрязняющие вещества сбрасываются только при  $x \geq 0$ .

Связывание уравнений (1 – 2) позволяет определить концентрацию растворенного кислорода  $C_o$  и концентрацию загрязнителя  $C_x$  одновременно. При решении этих уравнений использовался ряд параметров, описывающих экологическую обстановку и геологические характеристики для рек Охта и Славянка (табл. 1).

**Результаты**

Уравнения (1 – 2) решались с использованием граничных условий, соответствующих наличию загрязнений в верхней и нижней частях реки, вдоль её длины. Относительно произвольной точки  $x$  на длине реки было выделено два участка. На участках выше ( $x > L$ ) и ниже ( $x < L$ ) по течению, в целях упрощения решения задачи, загрязняющие вещества добавлялись с постоянной скоростью  $q_x$ .

Таблица 1 - Параметры экологической обстановки и геологические характеристики рек Охта и Славянка

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.125.50.1>

Параметр	р. Охта	р. Славянка
$L$ - длина реки (км) [26]	90	39
$D_p$ - коэффициент диффузии загрязнителя ( $\text{м}^2 \cdot \text{сут}^{-1}$ ) [22]	4,166 · 10 <sup>6</sup>	
$D_x$ - коэффициент диффузии растворенного кислорода в ( $\text{м}^2 \cdot \text{сут}^{-1}$ ) [22]	2,132 · 10 <sup>6</sup>	
$v$ - скорость воды ( $\text{м} \cdot \text{сут}^{-1}$ ) [26]	34,2 · 10 <sup>3</sup>	21,3 · 10 <sup>3</sup>
$S$ - площадь поперечного сечения ( $\text{м}^2$ ) [26]	50 – 275	10 – 100
$q$ - скорость поступления загрязнителя вдоль реки ( $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{сут}^{-1}$ ) [25], [26]	0,06	0,08
$K_1$ - коэффициент скорости разложения для загрязняющего вещества при 20 °С ( $\text{сут}^{-1}$ ) [23], [24]	8,27	9,14
$K_2$ - коэффициент скорости деаэрации для растворенного кислорода при 20 °С ( $\text{сут}^{-1}$ ) [23], [24]	32,10	21,40
$k$ - концентрация потребления кислорода при распаде загрязнителя ( $\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ) [23]	7,1 · 10 <sup>-3</sup>	4,9 · 10 <sup>-3</sup>
$\alpha$ - массоперенос кислорода из воздуха в воду ( $\text{м}^2 \cdot \text{сут}^{-1}$ ) [23], [24]	22,50	19,4
$C_s$ - концентрация насыщения кислорода ( $\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ) [23]	6 · 10 <sup>-3</sup> $\text{кг}/\text{м}^3$	7,4 · 10 <sup>-3</sup> $\text{кг}/\text{м}^3$

Скорость снижения концентрации загрязняющих веществ  $C_x$  в результате биохимической реакции с растворенным кислородом описывается слагаемым «Михаэлис-Ментен» –  $K_1 \cdot [C_o / (C_o + k)] \cdot C_x$ . Это слагаемое учитывает скорость удаления загрязнений и определяется концентрацией загрязнителя как при высоком, так и низком содержании кислорода. Во втором уравнении коэффициенты соответствующего слагаемого, описывающего уменьшение концентрации растворенного кислорода, различаются из-за разного веса кислорода и загрязнителя, участвующих в реакции.

Также были рассмотрены случаи с и без дисперсии  $k$  (либо пренебрежимо малой  $k \approx 0$ ). В процессе решения уравнений (1 – 2), в качестве параметров использованы значения: площади поперечного сечения реки  $S$ , скорости течения реки  $v$ , скорость поступления загрязнителя  $q_x$ , скорость переноса через поверхность реки кислорода  $\alpha$ , концентрация насыщения кислорода  $C_s$ , коэффициент диффузии загрязнителя  $D_x$  и растворенного кислорода  $D_o$ . Эти показатели в расчетах считались постоянными.

**Аналитические стационарные решения без диффузии**

Если пренебречь диффузионными членами, то при таком подходе существуют стационарные решения (1 – 2) и левые части уравнений исчезают. В этом случае можно представить аналитические решения для концентраций загрязняющих веществ  $C_x(x,t) = C_{x,s}(x)$  и кислорода  $C_o(x,t) = C_{o,s}(x)$ . При этом  $D_o = 0$ ,  $D_x = 0$ . Тогда уравнения (1 – 2) сводятся к

$$\frac{d(vC_{x,s})}{dx} = -K_1 \frac{C_{o,s}}{C_{o,s}+k} C_{x,s} + \frac{q_x}{S}, (x > 0) \quad (3)$$

$$\frac{d(vC_{o,s})}{dx} = -K_2 \frac{C_{o,s}}{C_{o,s}+k} C_{x,s} + \frac{\alpha(C_s - C_{x,s})}{S}, (x > 0) \quad (4)$$

с граничными условиями  $C_{x,s}(0) = 0$  и  $C_{o,s}(0) = C_s$ .

Решения уравнений (3 – 4) для концентраций загрязняющих веществ  $C_{x,s}(x,t)$  и растворенного кислорода  $C_{o,s}(x,t)$  вдоль течения реки в интервале времени от 10 до 50 суток приведены на рис. 1 и 2.

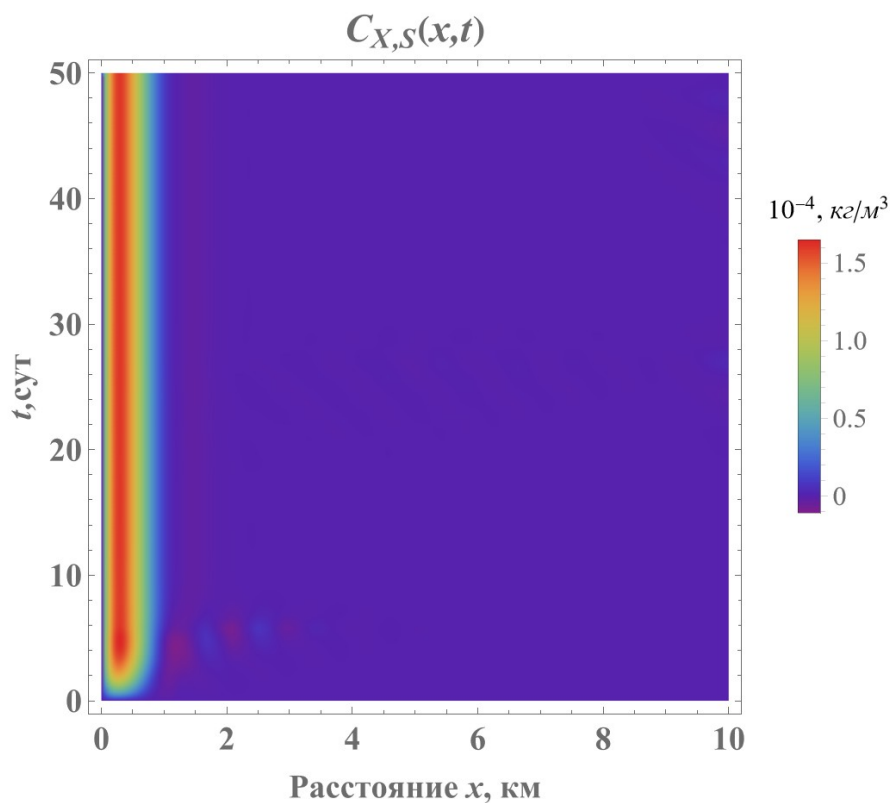


Рисунок 1 - Распределение концентрации загрязнителя  $C_{x,s}(x,t) \cdot 10^{-4}$  вдоль реки  
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.125.50.2>

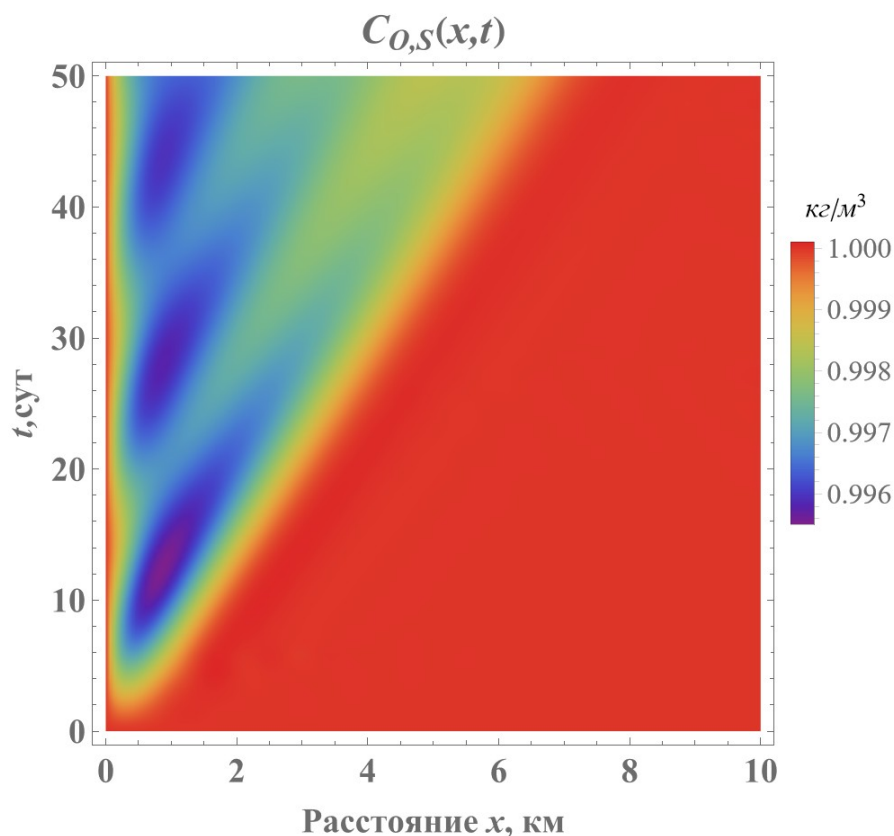


Рисунок 2 - Распределение концентрации  $C_{o,s}(x,t)$  растворенного кислорода вдоль реки  
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.125.50.3>

В этом случае загрязнение вверх по течению отсутствует из-за отсутствия диффузии ( $C_{x,s}(x) = 0$  и  $C_{o,s}(x) = C_s$  при  $x < 0$ ). Когда, концентрация кислорода для распада загрязняющих веществ  $k$  пренебрежимо мала ( $k \approx 0$ ), рассчитать концентрацию загрязняющих веществ ниже по потоку можно как

$$C_{X,S} = (q_X/K_1 S) \cdot (1 - e^{-K_1 x/v}) \quad (5)$$

Концентрация  $C_{X,S}$  стремится к пределу  $q_X/K_1 S$ . Это показано на рисунке 3. Выше по течению нет загрязнения, так как нет рассеивания. Для концентрации растворенного кислорода  $C_{O,S}$  решение имеет вид

$$C_{O,S} = C_S - \frac{K_2 q_X}{K_1} \left( \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{1}{\alpha - K_1 S} \right) e^{-K_1 x/v} \right) - \left( \frac{K_2 q_X S}{\alpha(\alpha - K_1 S)} \right) e^{-\alpha x/v S} \quad (6)$$

Ниже по течению уровень кислорода снижается из-за взаимодействия с загрязняющими веществами и концентрация  $C_{O,S}$  стремится к пределу  $C_S - q_X/K_1 \alpha$ . Это показано на рис. 4.

Если загрязняющие стоки в нижнем участке по течению реки, в этой упрощенной модели, таковы, что концентрация растворенного кислорода  $C_{O,S}$  составляет не менее 30% значения насыщения  $C_S$  [18], происходит превышение допустимых норм [26]. Это достигается для уровней  $q_X$ , которые удовлетворяют  $q_X < 0.7\alpha \cdot K_1 C_S / K_2$ . В этом случае при наших значениях параметров для рек Охта и Славянка это значение составляет  $q_X < 0.015 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{сут}^{-1}$ . (Фактическая скорость поступления загрязняющих веществ в реку Охта и Славянка наблюдается  $q = 0.06 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{сут}^{-1}$  и  $q = 0.08 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{сут}^{-1}$  соответственно).

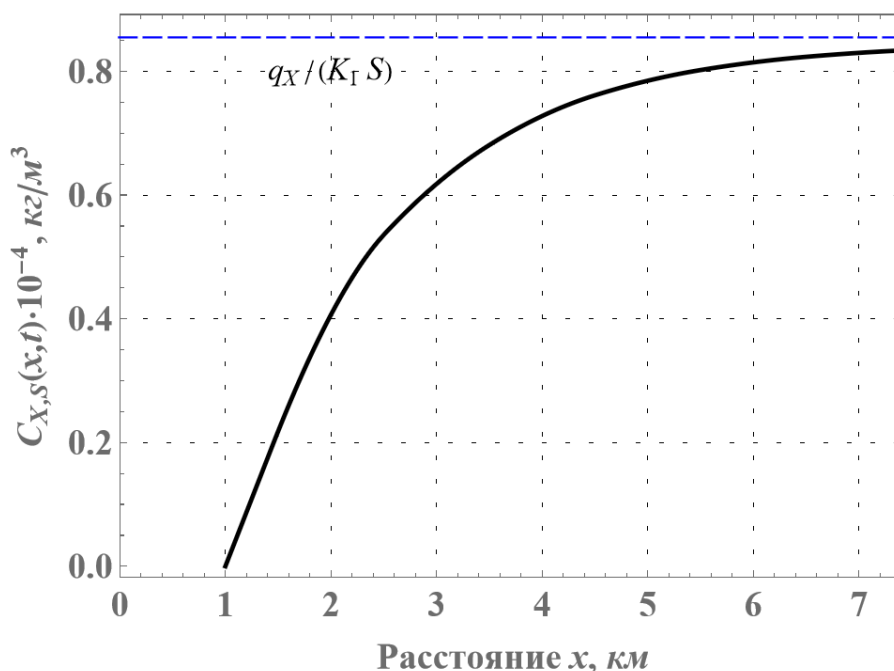


Рисунок 3 - Стационарное решение для  $C_{X,S}$  без дисперсии в случае незначительного  $k$   
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.125.50.4>

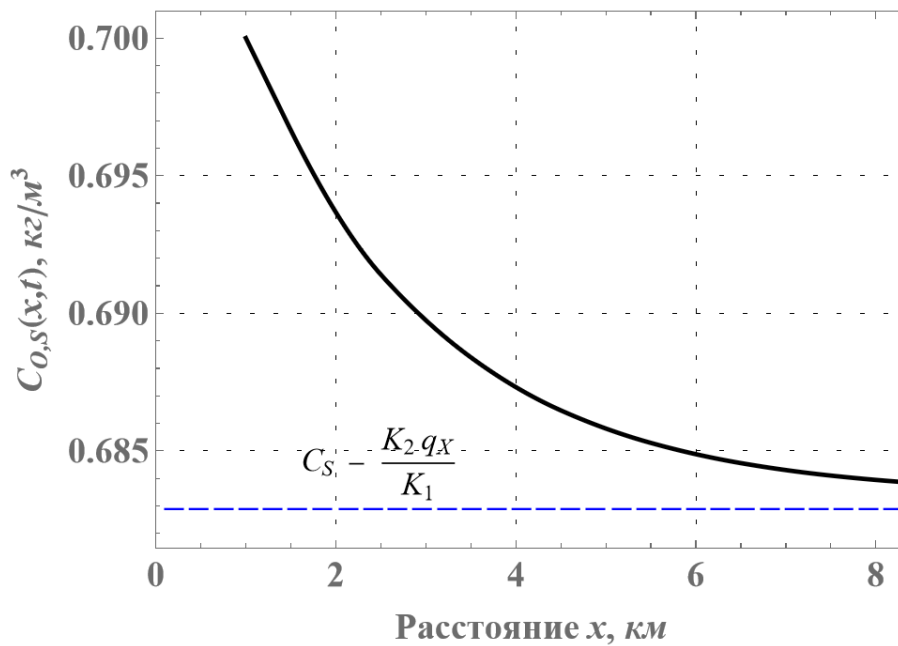


Рисунок 4 - Стационарное решение для  $C_{O,S}$  без дисперсии в случае незначительного  $k$   
 DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.125.50.5>

Уравнения (4 – 5) можно решать и при малых значениях  $k$ . В таком случае

$$C_{X,S} = \frac{q_X}{K_1 S} + \frac{\alpha k q_X}{\alpha K_1 C_S - K_2 q_X}, C_{O,S} = C_S - \frac{K_2 q_X}{\alpha K_1} \quad (7)$$

Таким образом, решения для  $C_{X,S}$  и  $C_{O,S}$  на больших расстояниях вниз по потоку зависят только от параметров  $k$  и  $q_X$ , что показано на рисунках 3 и 4 пунктирной линией.

#### Модели, включающие диффузию и конвекцию

В этой модели рассмотрен стационарный случай, когда присутствуют члены в уравнении с коэффициентами диффузии (пусть  $D_O \neq 0$ ,  $D_X \neq 0$ ), в результате чего сохраняются члены производных второго порядка. Если параметр  $k$  считать пренебрежимо малым ( $k \approx 0$ ), тогда уравнения (1 – 2) преобразуются следующим образом

$$D_X \frac{d^2 C_{X,S}}{dx^2} - \frac{d(vC_{X,S})}{dx} - K_1 C_{X,S} + \frac{q_X}{S} = 0 \quad (8)$$

$$D_O \frac{d^2 C_{O,S}}{dx^2} - \frac{d(vC_{O,S})}{dx} - K_2 C_{X,S} + \frac{\alpha(C_S - C_{X,S})}{S} = 0 \quad (9)$$

В рамках этой модели получается аналитическое решение для концентрации загрязнения  $C_{X,S}$ , которое имеет вид

$$C_{X,S}(x) = \begin{cases} \frac{q_X}{K_1 S} \left( 1 - \left( \frac{c_1 + c_2}{2c_2} \right) e^{(c_1 - c_2)x} \right), & x \geq 0 \\ \frac{q_X}{K_1 S} \left( \frac{c_2 - c_1}{2c_2} \right) e^{(c_1 + c_2)x}, & x < 0 \end{cases} \quad (10)$$

где  $c_1 = v/2D_X$  и  $c_2 = (\sqrt{v^2 + 4D_X K_1})/2D_X$ , а для концентрации растворенного кислорода  $C_{O,S}$

$$C_{O,S}(x) = \begin{cases} C_S - \frac{K_2 q_X}{K_1 \alpha} + \frac{K_2 q_X}{K_1} \left( \left( \frac{c_3 + c_4}{2c_4 \alpha} - \frac{c_1 + c_2}{4c_2 c_4 S_A} + \frac{c_1 - c_2}{4c_2 c_4 S_B} \right) e^{(c_3 - c_4)x} - \frac{c_1 + c_2}{2c_2 S_A} x e^{(c_1 - c_2)x} \right), & x \geq 0 \\ C_S + \frac{K_2 q_X}{K_1} + \left( \left( \frac{c_3 - c_4}{2c_4 \alpha} - \frac{c_1 + c_2}{4c_2 c_4 S_A} + \frac{c_1 - c_2}{4c_2 c_4 S_B} \right) e^{(c_3 + c_4)x} - \frac{c_1 - c_2}{2c_2 S_B} x e^{(c_1 + c_2)x} \right), & x < 0 \end{cases} \quad (11)$$

где

$$c_3 = v/2D_O,$$

$$c_4 = \sqrt{v^2 + 4\alpha D_O/S} / 2D_O,$$

$$S_A = 2SD_O(c_1 - c_2) - vS,$$

$$S_B = 2SD_O(c_1 + c_2) - vS.$$

Применяя рассмотренные модели для описания изменения концентраций загрязняющих веществ в реках Охта и Славянка мы рассматривали условия, когда точечных источников загрязнения нет (только распределенные источники). В этом случае  $C_{x,s}(x)$  считались непрерывными, а поступление загрязнителя начиналось с  $x = 0$ . В результате концентрация загрязняющих веществ  $C_{x,s}(x)$  имеет относительно плавный характер с разрывом  $q_x/D_x \cdot S$  во второй производной при  $x = 0$ .

Если значением параметра  $k$  не пренебрегать, и он меняется равномерно, то получается следующая система нелинейных дифференциальных признаков второго порядка:

$$D_X \frac{d^2(C_{X,S}(x))}{dx^2} - \frac{d(vC_{X,S}(x))}{dx} - K_1 \frac{C_{O,S}(x)}{C_{O,S}(x)+k} C_{X,S}(x) + \frac{q_x H(x)}{S} = 0, (x > L, t > 0) \quad (12)$$

$$D_O \frac{d^2(C_{O,S}(x))}{dx^2} - \frac{d(vC_{O,S}(x))}{dx} - K_2 \frac{C_{O,S}(x)}{C_{O,S}(x)+k} C_{X,S}(x) + \frac{\alpha(C_S - C_{O,S}(x))}{S} = 0, (x > L, t > 0) \quad (13)$$

Граничные концентрации для  $C_{X,S}$  и  $C_{O,S}$  на больших расстояниях вниз по течению реки также как  $C_{X,S}(-\infty) = 0$  и  $C_{O,S}(-\infty) = C_S$ . Это позволяет получить простые аналитические решения для соответствующих концентраций:

$$C_{X,S}(\infty) = \frac{q_x}{K_1 S} \left( 1 + \frac{k}{C_{O,S}(\infty)} \right), C_{O,S}(\infty) = C_S - \frac{K_2 q_x}{\alpha K_1} \quad (14)$$

### Заключение

Представленные модельные решения показывают, что использование математических моделей транспорта в водной среде реки в случае возникновения разного рода ситуаций, удобно представлять нелинейными дифференциальными уравнениями. В эти уравнения могут быть включены члены, описывающие различные механизмы распространения загрязняющих веществ. Выбор тех или иных механизмов в качестве преобладающих, позволяет упростить модель и получить аналитические решения, в том числе и стационарные. Однако в этом случае не учитываются изменения в концентрации, связанные с вариацией физического состояния (параметров) загрязняющего вещества. Использование таких упрощенных моделей позволяет ввести в них переменные параметры для различных видов поступления загрязняющих веществ.

В модельных расчетах был рассмотрен случай, когда скорость поступления загрязнения  $q = 0.06 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{сут}^{-1}$  (для реки Охта) и  $q = 0.08 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{сут}^{-1}$  (для реки Славянка). Полученные решения показывают, что в водной среде на больших расстояниях в водах реки будут превышены все нормативные показатели и концентрация растворенного кислорода станет ниже предельно допустимого значения [27]. Тем не менее количество загрязняющих веществ, поступающих в эти реки, примерно в 4 раза выше нормы, и это означает, что скорость общего биологического потребления кислорода (БПК) для реки должна составлять не более 5000 кг БПК в  $\text{сут}^{-1}$ . Однако, исследования показали, что для рек Охта и Славянка такой уровень растворенного кислорода остается выше критического порогового значения – 30% от насыщенного значения. Это, с одной стороны, связано с протяженностью и извилистостью рек, а с другой с небольшой скоростью течения. Критическое значение не достигается в реке Охта из-за конечной длины, на которой фактически не происходит сброс загрязнений в реку Нева.

Представленные модели можно также использовать для определения влияния процессов аэрации на увеличение количества растворенного кислорода в воде, для этого требуется расширение переходной пространственной модели, что не сильно усложнит задачу. Следовательно, предложенные модели могут применяться для принятия решений об ограничении загрязнений рек сельскохозяйственными, промышленными и бытовыми выбросами.

Применение в моделировании разных типов математических моделей дает возможность повысить уровень принятия решений для оценки водных ресурсов. Такие модельные представления позволяют исследовать пространственное и временное распределение концентрации загрязняющих веществ с учетом различных параметров качества воды и источников загрязнения. Упрощенные модели для определенной реальной ситуации помогают принять решения в выборе ограничений, которые будут установлены для снабжения водой сельских и городской регионов.

### Конфликт интересов

Не указан.

### Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

### Conflict of Interest

None declared.

### Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

### Список литературы / References

1. Мелехова О.П. Биологический контроль окружающей среды: биоиндикация и биотестирование / О.П. Мелехова, Е.И. Егорова, Т.И. Евсеева и др.; под ред. О.П. Мелеховой и Е.И. Егоровой. – М.: Академия, 2007. – 288 с.
2. Голубовская Э.К. Биологические основы очистки воды / Э.К. Голубовская. – М.: Высш. шк., 1978. – 268 с.
3. Карелин Я.А. Очистка производственных сточных вод / Я.А. Карелин, Д.Д. Жуков, М.А. Денисов и др. – М.: Стройиздат, 1970. – 230 с.

4. Об утверждении Водной стратегии РФ на период до 2020 года: Распоряжение Правительства РФ от 27 августа 2009 г. № 1235-р: по состоянию на 17 апреля 2012 г. // Гарант Эксперт 2020. – Гарант-Сервис, 2020.
5. Руководство по гидробиологическому мониторингу пресноводных экосистем / Под ред. В.А. Абакумова. – СПб.: Гидрометеиздат, 1992. – 318 с.
6. Hasadsri S. Finite element method for dissolved oxygen and biochemical oxygen demand in an open channel / S. Hasadsri, M. Maleewong // *Procedia Environmental Sciences*. – 2012. – №13. – P. 1019–1029. – DOI:10.1016/j.proenv.2012.01.09
7. Беликов В.В. Численное моделирование кинематики потока на участке неразмываемого русла / В.В. Беликов, А.А. Зайцев, А.Н. Милитеев // *Водные ресурсы*. – 2001. – Т. 28. – № 6. – С. 701–710.
8. Милитеев А.Н. Гидравлические исследования численными методами / А.Н. Милитеев, В.М. Ляхтер // *Водные ресурсы*. – 1981. – № 3. – С. 60–79.
9. Михайлов С.А. Диффузное загрязнение водных экосистем. Методы оценки и математические модели / С.А. Михайлов. – Барнаул: День, 2000. – 130 с.
10. Мотовилов Ю.Г. Пространственно-распределенная модель формирования стока тяжелых металлов в речном бассейне / Ю.Г. Мотовилов, Т.Б. Фащевская // *Вода: химия и экология*. – 2018. – № 1–3. – С. 18–31.
11. Kaushik N. Modeling of the dissolved oxygen in a river with storage zone on the banks / N. Kaushik, B. Tyagi, G. Jayaraman // *Applied Mathematics*. – 2012. – № 3. – P. 699–704. – DOI: 10.4236/am.2012.37103.
12. Жмур Н.С. Технологические и биохимические процессы очистки сточных вод на сооружениях с аэротенками / Н.С. Жмур. – М.: АКВАРОС. – 2003. – 512 с.
13. Rauch W. River water quality modelling / W. Rauch, M. Henze, L. Koncsos et al. // *State of the art. Water Science and Technology*. – 1998. – № 38(11). – P. 237–244.
14. Simon T. Modeling and numerical simulation of river pollution using diffusion-reaction equation / T. Simon, P.R. Koya // *American Journal of Applied Mathematics*. – 2015. – № 3(6). – P. 335–340. – DOI: 10.11648/j.ajam.20150306.24.
15. Simon T. Numerical simulation of system of time dependent advection- diffusion-reaction equations describing river pollution / T. Simon, P.R. Koya // *International Journal of Scientific Progress and Research*. – 2016. – № 30. – P. 94–106.
16. Hamoud A. Existence and uniqueness of the solution for Volterra-Fredholm integro-differential equations / A. Hamoud, K. Ghadle // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. – 2018. – № 11(6). – P. 692– 701.
17. Hamoud A. Modified Laplace decomposition method for fractional Volterra-Fredholm integro-differential equations / A. Hamoud, K. Ghadle // *Journal of Mathematical Modeling*. – 2018. – № 6. – P. 91–104.
18. Качество поверхностных вод Российской Федерации. Ежегодник. 201X. – Ростов-на-Дону: ГХИ. – 2019. – 561 с.
19. Иванов В.Н. Расчет распространения загрязняющих веществ в водотоке с учетом их разложения и разбавления / В.Н. Иванов, В.Е. Клыкков, В.И. Косов и др. // *Инженерная гидрология и охрана водных ресурсов*. – Тверь: ТГТУ, 1994. – С. 119–124.
20. Полянин В.О. Концептуальные подходы к мониторингу диффузного загрязнения водных объектов / В.О. Полянин // *Вод. Ресурсы*. – 2020. – № 5. – С. 603–612.
21. Dobbins W.E. BOD and Oxygen relationships in streams / W.E. Dobbins // *Journal Sanitary Engineering Division, Proc. ASCE* 90. – 1964. – № 90. – P. 53–78.
22. Шульгин Д.Ф. Гидрохимические параметры математических моделей переноса питательных веществ в торфяных и дерново- подзолистых почвах / Д.Ф. Шульгин, В.Н. Иванов, В.Е. Клыкков // *Почвоведение*. – 1987. – № 3. – С. 27–34.
23. James A. *Mathematical Models in Water Pollution Control, Modelling of Dissolved Oxygen in a Nontidal Stream* / A. James. – Chichester : John Wiley and Sons Ltd, 1987. – P. 137–163.
24. Murphy S.F. *General Information on Dissolved Oxygen*. City of Boulder/USGS Water Quality Monitoring / S.F. Murphy. – 2007.
25. О состоянии и об охране окружающей среды Российской Федерации в 2018 году: Государственный доклад. – 2019. – М.: Минприроды России; Кадастр. – 844 с.
26. Доклад Федеральной службы по надзору в сфере природопользования об осуществлении и эффективности государственного контроля (надзора) за 2015 год. – 2016.
27. Обзор состояния и загрязнения окружающей среды в Российской Федерации за 2021 год. – М.: Росгидромет, 2022.

### Список литературы на английском языке / References in English

1. Melehova O.P. Biologicheskij kontrol' okruzhajushhej sredy: bioindikacija i biotestirovanie [Biological Control of the Environment: Bioindication and Biotesting] / O.P. Melehova, E.I. Egorova, T.I. Evseeva et al.; ed. by O.P. Melehova and E.I. Egorova. – М.: Akademija, 2007. – 288 p. [in Russian]
2. Golubovskaja Je.K. Biologicheskie osnovy oчитки vody [Biological Basis for Water Purification] / Je.K. Golubovskaja. – М.: Vyssh. shk., 1978. – 268 p. [in Russian]
3. Karelin Ja.A. Oчитка proizvodstvennyh stohnykh vod [Industrial Wastewater Treatment] / Ja.A. Karelin, D.D. Zhukov, M.A. Denisov [et al.] – М.: Strojizdat, 1970. – 230 p. [in Russian]
4. Ob utverzhdenii Vodnoj strategii RF na period do 2020 goda [On approval of the Water Strategy of the Russian Federation until 2020]: Decree of the Government of the Russian Federation of August 27, 2009 № 1235-r: as of April 17, 2012 // *Garant Jekspert 2020*. – *Garant-Servis*, 2020. [in Russian]
5. Rukovodstvo po gidrobiologicheskomu monitoringu presnovodnyh jekosistem [Guidelines for Hydrobiological Monitoring of Freshwater Ecosystems] / Ed. by V.A. Abakumov. – Spb.: Gidrometeoizdat, 1992. – 318 p. [in Russian]



6. Hasadsri S. Finite element method for dissolved oxygen and biochemical oxygen demand in an open channel / S. Hasadsri, M. Maleewong // *Procedia Environmental Sciences*. – 2012. – №13. – P. 1019–1029. – DOI:10.1016/j.proenv.2012.01.09
7. Belikov V.V. Chislennoe modelirovanie kinematiki potoka na uchastke nerazmyvaemogo rusla [Numerical Modeling of Flow Kinematics in an Undrained Channel] / V.V. Belikov, A.A. Zajcev, A.N. Militeev // *Vodnye resursy [Water Resources]*. – 2001. – Vol. 28. – № 6. – P. 701–710. [in Russian]
8. Militeev A.N. Gidravlicheskie issledovaniya chislennymi metodami [Hydraulic Studies by Numerical Methods] / A.N. Militeev, V.M. Ljahter // *Vodnye resursy [Water Resources]*. – 1981. – № 3. – P. 60–79. [in Russian]
9. Mihajlov S.A. Diffuznoe zagrjaznenie vodnyh jekosistem. Metody ocenki i matematicheskie modeli [Diffuse Pollution of Aquatic Ecosystems. Assessment Methods and Mathematical Models] / S.A. Mihajlov. – Barnaul: Den', 2000. – 130 p. [in Russian]
10. Motovilov Ju.G. Prostranstvenno raspredelennaja model' formirovanija stoka tjazhelyh metallov v rechnom bassejne [Spatially Distributed Model of Formation of Heavy Metals Runoff in the River Basin] / Ju.G. Motovilov, T.B. Fashhevskaja // *Voda: himija i jekologija [Water: Chemistry and Ecology]*. – 2018. – № 1–3. – P. 18–31. [in Russian]
11. Kaushik N. Modeling of the dissolved oxygen in a river with storage zone on the banks / N. Kaushik, B. Tyagi, G. Jayaraman // *Applied Mathematics*. – 2012. – № 3. – P. 699–704. – DOI: 10.4236/am.2012.37103.
12. Zhmur N.S. Tehnologicheskie i biohimicheskie processy oчитki stochnyh vod na sooruzhenijah s ajerotenkami [Technological and Biochemical Processes of Wastewater Treatment at Wastewater Treatment Facilities with Aeration Tanks] / N.S. Zhmur. – M.: AKVAROS. – 2003. – 512 p. [in Russian]
13. Rauch W. River water quality modelling / W. Rauch, M. Henze, L. Koncsos et al. // *State of the art. Water Science and Technology*. – 1998. – № 38(11). – P. 237–244.
14. Simon T. Modeling and numerical simulation of river pollution using diffusion-reaction equation / T. Simon, P.R. Koya // *American Journal of Applied Mathematics*. – 2015. – № 3(6). – P. 335–340. – DOI: 10.11648/j.ajam.20150306.24.
15. Simon T. Numerical simulation of system of time dependent advection- diffusion-reaction equations describing river pollution / T. Simon, P.R. Koya // *International Journal of Scientific Progress and Research*. – 2016. – № 30. – P. 94–106.
16. Hamoud A. Existence and uniqueness of the solution for Volterra-Fredholm integro-differential equations / A. Hamoud, K. Ghadle // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. – 2018. – № 11(6). – P. 692– 701.
17. Hamoud A. Modified Laplace decomposition method for fractional Volterra-Fredholm integro-differential equations / A. Hamoud, K. Ghadle // *Journal of Mathematical Modeling*. – 2018. – № 6. – P. 91–104.
18. Kachestvo poverhnostnyh vod Rossijskoj federacii. Ezhegodnik. 2019 [Quality of Surface Waters of the Russian Federation. Yearbook. 2019]. – Rostov-on-Don: GHI. – 2019. – 561 p. [in Russian]
19. Ivanov V.N. Raschet rasprostraneniya zagrjaznjajushchih veshhestv v vodotoke s uchetom ih razlozhenija i razbavlenija [Calculation of the Distribution of Pollutants in the Watercourse Taking into Account Their Decomposition and Dilution] / V.N. Ivanov, V.E. Klykov, V.I. Kosov et al. // *Inzhenernaja gidrologija i ohrana vodnyh resursov [Engineering Hydrology and Water Protection]*. – Tver: TGTU, 1994. – P. 119–124. [in Russian]
20. Poljanin V.O. Konceptual'nye podhody k monitoringu diffuznogo zagrjaznenija vodnyh ob'ektov [Conceptual Approaches to Monitoring Diffuse Pollution in Water Bodies] / V.O. Poljanin // *Vod. Resursy [Water Resources]*. – 2020. – № 5. – P. 603–612. [in Russian]
21. Dobbins W.E. BOD and Oxygen relationships in streams / W.E. Dobbins // *Journal Sanitary Engineering Division, Proc. ASCE* 90. – 1964. – № 90. – P. 53–78.
22. Shul'gin D.F. Gidrohicheskie parametry matematicheskikh modelej perenosa pitatel'nyh veshhestv v torfjanyh i derno- podzolistyh pochvah [Hydrochemical Parameters of Mathematical Models of Nutrient Transfer in Peaty and Soddy-Podzolic Soils] / D.F. Shul'gin, V.N. Ivanov, V.E. Klykov // *Pochvovedenie [Soil Studies]*. – 1987. – № 3. – P. 27–34. [in Russian]
23. James A. *Mathematical Models in Water Pollution Control, Modelling of Dissolved Oxygen in a Nontidal Stream* / A. James. – Chichester : John Wiley and Sons Ltd, 1987. – P. 137–163.
24. Murphy S.F. *General Information on Dissolved Oxygen. City of Boulder/USGS Water Quality Monitoring* / S.F. Murphy. – 2007.
25. O sostojanii i ob ohrane okruzhajushhej sredy Rossijskoj Federacii v 2018 godu [On the State and Protection of the Environment of the Russian Federation in 2018]: State Report. – 2019. – M. : Ministry of Natural Resources of Russia; Cadaster. – 844 p. [in Russian]
26. Doklad Federal'noj sluzhby po nadzoru v sfere prirodopol'zovanija ob osushhestvlenii i jeffektivnosti gosudarstvennogo kontrolja (nadzora) za 2015 god [Report of the Federal Service for Supervision of Natural Resources on the Implementation and Effectiveness of State Control (Supervision) in 2015]. – 2016. [in Russian]
27. Obzor sostojanija i zagrjaznenija okruzhajushhej sredy v Rossijskoj Federacii za 2021 god [Review of the Condition and Pollution of the Environment in the Russian Federation for 2021]. – M.: Rosgidromet, 2022. [in Russian]