

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА/THEORETICAL PHYSICS

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.167.35 EDN: ZHPTRE

К МЕТОДУ V-ФУНКЦИИ И ЗАДАЧИ ТРАЕКТОРНО-ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

Научная статья

Валишин Н.Т.[1, *]
[1] ORCID : 0000-0002-2972-0613;
[1] Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ, Казань, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (vnailt[at]yandex.ru)

Предложена: 11.01.2026; Принята: 06.05.2026; Опубликована: 18.05.2026

Аннотация

Разработан метод V-функции, позволяющий исследовать неразрывно траектороное и волновое движение объекта. Метод V-функции состоит из локального вариационного принципа, базовых теорем и новой постановки прямой и обратной задачи динамики. В качестве примера рассматривается движение объекта (электрона) в стационарном кулоновском поле водородоподобного атома, одного из известных тестовых объектов квантовой теории, а также для линейного гармонического осциллятора. Получены закон квантования энергии гармонического осциллятора и водородоподобного атома. Показывается, что энергетические уровни водородоподобного атома полностью совпадают с классическими результатами квантовой физики. Создан математический аппарат для моделирования траектороно-волнового движения квантового объекта.

Ключевые слова: вариационный принцип, волновое движение, траекторное движение, прямая и обратная задача динамики, водородоподобный атом, гармонический осциллятор.

ON THE V-FUNCTION METHOD AND PROBLEMS IN TRAJECTORY-WAVE DYNAMICS

Research article

Valishin N.T.[1, *]
[1] ORCID : 0000-0002-2972-0613;
[1] Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev-KAI, Kazan, Russian Federation

* Corresponding author (vnailt[at]yandex.ru)

Suggested: 11.01.2026; Accepted: 06.05.2026; Published: 18.05.2026

Abstract

A V-function method has been developed that makes it possible to study the trajectory and wave motion of an object in a continuous manner. The V-function method consists of a local variational principle, fundamental theorems, and a new formulation of the direct and inverse problems of dynamics. As an example, the motion of an object (an electron) in the stationary Coulomb field of a hydrogen-like atom, one of the well-known test objects of quantum theory, is examined, as well as that of a linear harmonic oscillator. The energy quantisation law for the harmonic oscillator and the hydrogen-like atom has been derived. It is shown that the energy levels of the hydrogen-like atom coincide completely with the classical results of quantum physics. A mathematical framework has been developed for modelling the trajectory-wave motion of a quantum object.

Keywords: variational principle, wave motion, trajectory motion, direct and inverse problems of dynamics, hydrogen-like atom, harmonic oscillator.

Введение

Все интегральные и дифференциальные вариационные принципы [1] в конечном итоге задают нам дифференциальные уравнения движения механической системы, решая которые мы получаем траекторию движения системы. Но, как известно, свет, квантовые объекты одновременно проявляют траекторные и волновые свойства [2], [3]. Так свет в одних опытах ведет себя как волна, в других опытах как частица, это свойство света закрепляется в физической науке как корпускулярно-волновой дуализм. Поэтому напрашивается математическая модель, охватывающая одновременно и траекторные и волновые измерения реальности. Такая модель была разработана с помощью метода V-функции [4], [5], который позволяет одновременно учитывать и волновые и траекторные свойства физического объекта (частицы) [6], [7].

Предлагаемая модель разрабатывается, используя локальный вариационный принцип и новую постановку прямой и обратной задачи динамики к описанию траекторного и волнового поведения любого объекта.

Целью данной работы является раскрытие достаточного условия существования V-функции. И в качестве примера рассматривается движение объекта (электрона) в стационарном кулоновском поле водородоподобного атома, одного из известных тестовых объектов квантовой теории, а также для линейного гармонического осциллятора.

Метод V-функции

Метод V-функции состоит из локального вариационного принципа, базовых теорем, новой постановки прямой и обратной задачи динамики. Введем $x(t) = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$ — вектор фазовых координат, $x \in R^n$, где R^n — *n*-мерное евклидово пространство и время $t \in T$ где T — интервал времени. Рассмотрим некоторую систему дифференциальных уравнений:

$$x = f(x). \quad (1)$$

Будем говорить, что уравнения (1), описывающие динамическую систему, определяют состояние исследуемого объекта.

Теперь введем некоторую функцию $\mathrm{V=V(x,t)}\ (x \in R^n, t \in T)$, которую будем называть волновой функцией или V-функцией и ее быстроту (скорость) изменения

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V^T}{\partial x} f$$

в силу системы (1).

Рассмотрим изохронную вариацию быстроты изменения волновой функции

$$\delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = \delta\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \delta\left(\frac{\partial V^T}{\partial x} f\right)$$

$$\delta\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\delta V),$$

$$\delta\left(\frac{\partial V^T}{\partial x} f\right) = \frac{\partial \delta V^T}{\partial x} f + \frac{\partial V^T}{\partial x}\delta f$$

где

$$\delta V = \frac{\partial V^T}{\partial x} \quad \delta x; \quad \delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x$$

При вариации быстроты изменения волновой функции объект из некоторого состояния переходит в новое состояние. Такой переход назовем волновым переходом объекта в новое состояние. Величину назовем возможным волновым переходом из исходного состояния в новое состояние. В то время как δx определяет траекторные вариации.

Сформулируем теперь локальный вариационный принцип (ЛВП):

Из всех возможных переходов в новое состояние осуществляется тот, при котором в каждый момент времени быстрота изменения волновой функции V(x,t) принимает стационарное значение

$$\delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = 0. \quad (2)$$

Введем в рассмотрение полную вариацию от быстроты изменения волновой функции:

$$\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = \delta\left(\frac{dV}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dt}\right)\Delta t, \quad (\Delta t = dt), \quad (3)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}^T \frac{dx}{dt}$.

Пусть волновая функция (*V*-функция) есть дважды дифференцируемая по своим аргументам функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} f_i(x) f_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i}\frac{d f_i(x)}{dt}. \quad (4)$$

$f_i(x)$ — компоненты *n*-мерной вектор-функции правых частей уравнений движения динамической системы (1).

Теорема 1. Если осуществлен волновой переход в новое состояние, то существует V-функция, удовлетворяющая условию:

$$\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = 0. \quad (5)$$

Пусть осуществлен волновой переход динамической системы (1) в новое состояние, и V-функция удовлетворяет уравнению (4), которое в векторно-матричном представлении имеет вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - f^T W f = \frac{\partial V^T}{\partial x}\frac{df}{dt}, \quad W = \left[\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right]. \quad (6)$$

Распишем теперь выражение (3):

$$\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\delta x\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\dot{x}\right)dt=$$
$$=\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}+W^T\dot{x}\right]^{\mathrm{T}}\delta x+\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\frac{d\delta x}{dt}+ \tag{7}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 V^T}{\partial t\partial x}\dot{x}+\dot{x}^T W\dot{x}+\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\frac{d\dot{x}}{dt}\right]dt;$$

Так как волновой переход осуществлен, то выполняется

$$\delta x=dx=\dot{x}dt=f dt. \tag{8}$$

Тогда (7) примет вид:

$$\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right)=\left(\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}+W^T\dot{x}\right]^{\mathrm{T}}\dot{x}+\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\frac{d\dot{x}}{dt}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 V^T}{\partial t\partial x}\dot{x}+\dot{x}^T W\dot{x}+\frac{\partial V^T}{\partial \mathrm{x}}\frac{d\dot{x}}{dt}\right)dt=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 V^T}{\partial t\partial x}f+f^T W f+2\frac{\partial V^T}{\partial x}\frac{df}{dt}+\right. \tag{9}$$
$$\left.+\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+f^T W f+2\frac{\partial^2 V^T}{\partial t\partial x}f\right)dt=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+3\frac{\partial^2 V^T}{\partial t\partial x}f+2f^T W f+2\frac{\partial V^T}{\partial x}\frac{df}{dt}\right)dt.$$

Рассмотрим следующее равенство:

$$3\delta\left(\frac{dV}{dt}\right)+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-f^T W f-\frac{\partial V^T}{\partial x}\frac{df}{dt}\right)dt=0. \tag{10}$$

Равенство (10) имеет место за счет выполнения (2) и (6).

Распишем (10) с учетом (8)

$$3\delta\left(\frac{dV}{dt}\right)+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-f^T W f-\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\frac{df}{dt}\right)dt=$$
$$=3\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\delta x\right)+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-f^T W f-\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\frac{df}{dt}\right)dt=$$
$$=3\left(\left[\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}+W^T\dot{x}\right]^{\mathrm{T}}\delta x+\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\frac{d\delta x}{dt}\right)+ \tag{11}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-f^T W f-\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\frac{df}{dt}\right)dt=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+3\frac{\partial^2 V^T}{\partial t\partial x}f+2f^T W f+2\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}\frac{df}{dt}\right)dt=0;$$

Тогда из (9) и (11) следует, что $\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right)=0.$

Теорема 2 [6]. *Движение объекта (1) происходит так, что в каждый момент времени вектор фазовой скорости сонаправлен с градиентом волновой функции т.е.*

$$\frac{\partial V^T}{\partial x}f=|\lambda||\dot{x}|. \tag{12}$$

Прямую задачу динамики можно поставить в следующем виде:

Заданы дифференциальные уравнения, описывающие траекторию движения объекта (1).

Требуется определить волновую функцию *V(x,t)*, удовлетворяющей уравнению (6)

Начальные и граничные условия для (6) определяются из теорем I, II и из условия связанности волновой функции *V(x,t)* с траекторией движения объекта (1). Так из условия связанности волны и траектории следует, что амплитуда волны *V(x,t)* равна нулю в точке нахождения объекта (частицы) (с координатой $x=x_M$ в момент времени t).

$$V\left(x=x_M,t\right)=0. \tag{13}$$

$$V(x,t)_{t=0}=V(x,0)=0. \tag{14}$$

Из теорем I и II следуют два других условия. Из условия теоремы I

$$\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}}\delta x\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}^{\mathrm{T}}\dot{x}\right)dt=0 \quad (15)$$

с учетом того, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V^T}{\partial x}\delta x\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V^T}{\partial x}\dot{x}\varepsilon\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial V^T}{\partial x}\dot{x}=\mathrm{const}. \quad (16)$$

следует равенство:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)=0. \quad (17)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\mathrm{const}. \quad (18)$$

Тогда второе начальное условие для уравнения (6) будет иметь вид:

$$\left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\partial V(x,0)}{\partial t}=\mathrm{const}. \quad (19)$$

Из условия (12) теоремы II следует:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=k^{-1}\dot{x}. \quad (20)$$

Отсюда получается второе краевое условие:

$$\left.\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_M}=\frac{\partial V(x_M,t)}{\partial x}=k^{-1}\dot{x}=k^{-1}f\left(x=x_M\right). \quad (21)$$

Обратная задача динамики на базе метода V-функции ставится следующим образом:

Для заданной волновой функции *V*(*x*,*t*), удовлетворяющей уравнению (6), требуется определить траекторию движения объекта (1).

Используя (16) и (20) можно показать, что выполняется

$$\frac{\partial V^T}{\partial x}\frac{d}{dt}\dot{x}=0. \quad (22)$$

Действительно, $\frac{\partial V^T}{\partial x}\frac{d}{dt}\dot{x}=k_2\dot{x}^T\frac{d}{dt}\dot{x}=\frac{k_2}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^T\dot{x}\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V^T}{\partial x}\dot{x}\right)=0.$ В результате уравнение (6) с учетом (22) принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\dot{x}^T W\dot{x}=0, \quad (23)$$

К тому же, если выполняется условие $\dot{x}_j=\lambda_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}(i,j=\overline{1,n})$, тогда уравнение (23) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\vartheta^2\Delta V=0, \quad (24)$$

где $\vartheta^2=\sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2=\dot{x}^T\dot{x}$ и $\Delta=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Решения задач динамики в новой постановке

Из формулировки локального вариационного принципа (ЛВП) и новой постановки прямой и обратной задачи динамики следует, что траекторное движение объекта (1), сопряжено волновым движением, удовлетворяющим уравнению (24).

Уравнение (24) следует рассматривать с граничными и начальными условиями для волны и траектории объекта (13), (14), (19) и (21).

Рассмотрим линейный гармонический осциллятор и движение объекта (электрона) в водородоподобном атоме. В первом случае уравнение траекторного движения объекта (частицы)

$$m\ddot{x}=-kx \quad (25)$$

допускает первый интеграл $\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=E$.

Отсюда получаем выражение для квадрата скорости частицы вида

$$\dot{x}^2=\frac{2E-kx^2}{m}. \quad (26)$$

Подставив (26) в уравнение (24) (n=1), получим:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\left(\frac{2E-kx^2}{m}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0. \quad (27)$$

Волновая функция *V*(*x*,*t*) ищется в виде $V(x,t)=\psi(x)\varphi(t)$. В результате из уравнения (27) получим следующее стационарное уравнение:

$$\psi'' + \frac{m\omega^2}{2E-kx^2}\psi = 0. \tag{28}$$

Начальные условия для функции $\psi(x)$ и, получаются в виде:

$$\psi(x)|_{x=0} = \psi(0) = 0, \cdots \psi'(x)\big|_{x=0} = \psi'(0) = C_1; \tag{29}$$

Как видно из уравнения (29) решение $\psi(x)$, должно удовлетворять естественному условию, $\psi\left(x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\right) = 0.$ Выполнение этого условия возможно лишь при конкретных значениях собственных частот уравнения (28).

Данные значения получены аналитически с помощью системы компьютерной математики Maple

$$\psi(x) = \frac{1}{E}C_1 x\left(E - \frac{kx^2}{2}\right) \mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4m\omega^2}{k} + 1}\right], \left[\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4m\omega^2}{k} + 1}\right], \left[\frac{3}{2}\right], \frac{kx^2}{E}\right).$$

и в виде ряда

$$\psi(x) = \frac{1}{E}C_1 x\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{12}\frac{6k - m\omega^2}{E}x^2 + \frac{1}{480}\frac{\left(6k - m\omega^2\right)\left(20k - m\omega^2\right)}{E^2}x^4 + \right.$$

$$\frac{1}{40320}\frac{\left(6k - m\omega^2\right)\left(20k - m\omega^2\right)\left(42k - m\omega^2\right)}{E^3}x^6 +$$

$$\left.\frac{1}{5806080}\frac{\left(6k - m\omega^2\right)\left(20k - m\omega^2\right)\left(42k - m\omega^2\right)\left(72k - m\omega^2\right)}{E^4}x^8 + \dots\right)$$

$$\eta_1^2 = \frac{\hbar^2\omega_1^2}{\hbar^2\omega_0^2} = 6, \quad \eta_2^2 = \frac{\hbar^2\omega_2^2}{\hbar^2\omega_0^2} = 20, \quad \eta_3^2 = \frac{\hbar^2\omega_3^2}{\hbar^2\omega_0^2} = 42, \quad \eta_4^2 = \frac{\hbar^2\omega_4^2}{\hbar^2\omega_0^2} = 72, \dots$$

С учетом результатов оптико-механической аналогии [4], [6] $2E = \hbar\omega$, мы получаем правило квантования энергии гармонического осциллятора в следующем виде

$$E_{n+2}^2 - 2E_{n+1}^2 + E_n^2 = \Delta\Delta E_n^2 = 2\hbar^2\omega_0^2. \tag{30}$$

Значит в случае, когда траекторное движение объекта непосредственно связано с волновым движением, энергия гармонического осциллятора может принять только определенные дискретные значения:

$$E_1^2 = 6\hbar^2\omega_0^2, \quad E_2^2 = 20\hbar^2\omega_0^2, \quad E_3^2 = 42\hbar^2\omega_0^2, \quad E_4^2 = 72\hbar^2\omega_0^2 \dots$$

Как известно, Шредингер получил правило квантования энергии для гармонического осциллятора в виде $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0.$ Если эти результаты подставить в равенство (46) мы будем иметь $\left(\left(n + 2 + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)\hbar^2\omega_0^2 = 2\hbar^2\omega_0^2,$ т.е. получаем тождество.

В случае движения электрона в водородоподобном атоме уравнения (1) и (24) можно также свести к одному уравнению [8]

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{2\left(E + Ze^2/r\right)}{m}\Delta V = 0, \tag{31}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, m - масса объекта (частицы), E — полная энергия объекта (частицы), $U(r) = -Ze^2/r$ — потенциальная энергия водородоподобного атома. Применив метод разделения переменных к уравнению (31) $(\mathrm{V{=}X(x,\ y,\ z)\ T(t)}),$ получим следующее стационарное уравнение

$$\left(-\beta_0^2 + \frac{\alpha}{r}\right)\Delta X + \omega^2 X = 0, \tag{32}$$

где $\beta_0^2 = -\frac{2E}{m}, \alpha = \frac{2Ze^2}{m}.$

В уравнении (32) перейдем к сферической системе координат, применим также метод разделения переменных $(X = R\Phi\Theta)$ и рассмотрим уравнение для радиальной составляющей:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{r^2\omega^2}{-\beta_0^2 + \frac{\alpha}{r}}R - l(l+1)R = 0. \tag{33}$$

Если в (33) сделать замену $\mathrm{R{=}u\ /\ r},$ то получим

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{k_0^2\alpha}{\alpha - \beta_0^2 r} - k_0^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)u = 0, \tag{34}$$

где $k_0^2 = \frac{\omega^2}{\beta_0^2} = -\frac{\omega^2 m}{2E}.$

Полученное уравнение (34) при l=0 решается с помощью степенного ряда. Учитывая асимптотическое решение уравнения (34) $(r \to \infty)$, можно искать частное решение в виде $u = e^{k_0 r} f(r)$. Подставив его в (34) при l=0, получим следующие уравнения:

$$f''(r) + 2k_0 f'(r) + \frac{\beta_1}{r_0 - r} f(r) = 0, \tag{35}$$

где $\beta_1 = \mathrm{k}_0^2 \alpha / \beta_0^2 = \frac{1}{2} \mathrm{Ze}^2 \omega^2 \ \mathrm{m_e}/\mathrm{E}^2$.

Рассмотрим решение уравнения (35) в виде следующего степенного ряда $f(r) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(r_0 - r\right)^m$. После подстановки этого решения в уравнение (35), оно принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)na_{n+1} - 2k_0 n a_n + \beta_1 a_n\right] \left(r_0 - r\right)^{n-1} = 0, \tag{36}$$

Так как равенство (36) должно выполняться при всех степенях $\left(r_0 - r\right)$, поэтому $a_0 = 0$, а коэффициенты $a_{(n+1)}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$a_{n+1} = \frac{2k_0 n - \beta_1}{(n+1)n} a_n. \tag{37}$$

Ряд $f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(r_0 - r\right)^m$ обрывается, т.е. $a_m = 0$ при $m \geq n+1$, при условии $\beta_1 = 2k_0 n$, что приводит к следующему решению

$$u_n(r) = C \exp\left\{k_{0,n} r\right\} \sum_{m=1}^{n} a_m \left(r_{0,n} - r\right)^m, \tag{38}$$

где C – постоянная.

Равенство $\beta_1 = 2k_0 n$, с учетом $k_0^2 = -\frac{\omega^2 m}{2E}$ и $\beta_1 = \frac{1}{2} Z e^2 \omega^2 m_e / E^2$ приводится к виду $E^3/\omega^2 = -\frac{1}{8} Z^2 e^4 m_e / n^2$. Отсюда, учитывая связь частоты и энергии $2E = \hbar\omega$, который вытекает из оптико-механической аналогии [4], [6], находим значение энергии n-го состояния электрона

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}. \tag{39}$$

Отметим, что энергия n-го состояния водородоподобного атома в точности совпадает с решением, полученным Бором на основе своей модели [11] или Шредингерем на основе своего стационарного уравнения [10]. Отметим что, квантованность энергии n-го состояния электрона (39) получена исходя из условий, вытекающих из метода V-функции, то есть в результате моделирования траекторно-волнового движения электрона в водородоподобном атоме.

Результаты и обсуждение

Таким образом, с помощью метода V-функции заложены основы траекторно-волновой динамики, возможности которой показаны на конкретных примерах моделирования движения физических объектов.

При моделировании движения электрона в кулоновском поле, разработанный метод V-функции позволяет установить правило квантования энергии водородоподобного атома (39), которое полностью совпадает с классическими результатами Шредингера и Бора. При этом дискретность энергии возникает из удовлетворения условий, вытекающих из метода *V*-функции.

Отметим, что в настоящей работе используется подход к познанию природы частицы и её проявлений, исходя не из возможностей существующих методов измерения, а из признания его единой физической природы, которая содержит в себе без противоречий свою волновую сущность и корпускулярный (траекторный) способ существования [9]. Мы считаем, что предлагаемая в настоящей работе теория позволит пролить новый свет на фундаментальные основы теоретической физики.

Заключение

В проведенных исследованиях разработан единый подход для моделирования траекторно-волнового движения объекта на базе метода V-функции, состоящей из локального вариационного принципа, базовых теорем и новой постановки прямой и обратной задачи динамики. Волновое движение и траекторный способ существования частицы для гармонического осциллятора и водородоподобного атома рассмотрены соответственно на базе полученных уравнений (27) и (31). В результате решения уравнений (27), (31) получены правила квантования энергии гармонического осциллятора и водородоподобного атома, которые не противоречат ранее полученным результатам Шредингера и Бора. Результаты решенных узловых задач можно рассматривать как успешная проверка предлагаемой теории.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Сообщество рецензентов Международного научно-исследовательского журнала
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.167.35.1

Conflict of Interest

None declared.

Review

Community of Reviewers of the International Research Journal
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.167.35.1

Список литературы / References

1. Полак Л.С. Вариационные принципы механики и их развитие в физике / Л.С. Полак. — Москва : Физматгиз, 1960. — 599 с.

2. де Бройль Л. Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики / Л. де Бройль. — Москва : Мир, 1986. — 344 с.

3. де Бройль Л. Волны и кванты. Кванты света, дифракция и интерференция. Кванты, кинетическая теория газов и принцип Ферма / Л. де Бройль // Успехи физических наук. — 1967. — Т. 93. — Вып. 1. — С. 7–17.

4. Valishin N.T. V-function method: some solutions of direct and inverse dynamics problems in a new statement / N.T. Valishin, F.T. Valishin // Latvian Journal of Physics and Technical Sciences. — 2019. — № 1. — P. 70–81.

5. Valishin N.T. A method of V-function: ultimate solution to the direct and inverse problems of dynamics for a hydrogen-like atom / N.T. Valishin, S.A. Moiseev // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. — 2017. — Vol. 4. — № 5 (88). — P. 23–32.

6. Valishin N.T. An Optical-Mechanical Analogy And The Problems Of The Trajectory-Wave Dynamics / N.T. Valishin // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 12. — № 4. — P. 2935–2951.

7. Valishin N.T. To continue the optical-mechanical analogy / N.T. Valishin, A.I. Volkov, Z.F. Bildanova [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — Vol. 1679. — DOI: 10.1088/1742-6596/1679/2/022016.

8. Валишин Н.Т. Траекторно-волновой подход к динамике электрона в атоме водорода / Н.Т. Валишин, Ф.Т. Валишин, С.А. Моисеев // Бутлеровские сообщения. — 2011. — Т. 25. — № 5. — С. 1–12.

9. Валишин Ф.Т. Проблема начала и стратегия динамизма / Ф.Т. Валишин. — Москва : Энциклопедист-Максимум, 2018. — 180 с.

10. Schrödinger E. Quantisierung als Eigenwertproblem / E. Schrödinger // Annalen der Physik. — 1926. — Bd. 79. — S. 361–376 (I Mitt.). — Bd. 79. — S. 489–527 (II Mitt.). — Bd. 80. — S. 437–490 (III Mitt.). — Bd. 81 (IV Mitt.).

11. Bohr N. On the constitution of atoms and molecules / N. Bohr // Philosophical Magazine. — 1913. — Vol. 26. — Parts 1–3. — P. 1–25, 476–502, 857–875.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Polak L.S. Variacionnye principy mehaniki i ih razvitie v fizike [Variational principles of mechanics and their development in physics] / L.S. Polak. — Moscow : Fizmatgiz, 1960. — 599 p. [in Russian]

2. de Broglie L. Sootnoshenija neopredelennostej Gejzenberga i verojatnostnaja interpretacija volnovoj mehaniki [Heisenberg's uncertainty relations and the probabilistic interpretation of wave mechanics] / L. de Broglie. — Moscow : Mir, 1986. — 344 p. [in Russian]

3. de Broglie L. Volny i kvanty. Kvanty sveta, difrakcija i interferencija. Kvanty, kineticheskaja teorija gazov i princip Ferma [Waves and quanta. Light quanta, diffraction and interference. Quanta, kinetic theory of gases and Fermat's principle] / L. de Broglie // Uspehi fizicheskih nauk [Advances in Physical Sciences]. — 1967. — Vol. 93. — Issue. 1. — P. 7–17. [in Russian]

4. Valishin N.T. V-function method: some solutions of direct and inverse dynamics problems in a new statement / N.T. Valishin, F.T. Valishin // Latvian Journal of Physics and Technical Sciences. — 2019. — № 1. — P. 70–81.

5. Valishin N.T. A method of V-function: ultimate solution to the direct and inverse problems of dynamics for a hydrogen-like atom / N.T. Valishin, S.A. Moiseev // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. — 2017. — Vol. 4. — № 5 (88). — P. 23–32.

6. Valishin N.T. An Optical-Mechanical Analogy And The Problems Of The Trajectory-Wave Dynamics / N.T. Valishin // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 12. — № 4. — P. 2935–2951.

7. Valishin N.T. To continue the optical-mechanical analogy / N.T. Valishin, A.I. Volkov, Z.F. Bildanova [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2020. — Vol. 1679. — DOI: 10.1088/1742-6596/1679/2/022016.

8. Valishin N.T. Traektorno-volnovoj podhod k dinamike jelektrona atome vodoroda [Trajectory-wave approach to the dynamics of an electron in a hydrogen atom] / N.T. Valishin, F.T. Valishin, S.A. Moiseev // Butlerovskie soobshhenija [Butlerov Reports]. — 2011. — Vol. 25. — № 5. — P. 1–12. [in Russian]

9. Valishin F.T. Problema nachala i strategija dinamizma [The problem of the beginning and the strategy of dynamism] / F.T. Valishin. — Moscow : Jenciklopedist-Maksimum, 2018. — 180 p. [in Russian]

10. Schrödinger E. Quantisierung als Eigenwertproblem [Quantization as an Eigenvalue problem] / E. Schrödinger // E. Annalen der Physik [Annals of Physics]. — 1926. — Bd. 79. — P. 361–376 (I Mitt.). — Vol. 79. — P. 489–527 (II Part.). — Vol. 80. — P. 437–490 (III Part.). — Vol. 81 (IV Part.). [in German]

11. Bohr N. On the constitution of atoms and molecules / N. Bohr // Philosophical Magazine. — 1913. — Vol. 26. — Parts 1–3. — P. 1–25, 476–502, 857–875.