

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА/DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.165.20

О ПРИМЕНЕНИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА, ОБЛАДАЮЩИХ ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ, ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Научная статья

Антоновская О.Г.[1,] *, Бесклубная А.В.[2]
[1] ORCID : 0000-0002-5688-7996;
[1, 2] Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (olga.antonovsckaja[at]yandex.ru)

Аннотация

В задачах исследования устойчивости по первому приближению для систем обыкновенных дифференциальных уравнений прямым методом Ляпунова широкое применение нашли функции Ляпунова в виде положительно определенных квадратичных форм (или квадратичные функции Ляпунова). Столь же широкое применение квадратичные формы могут иметь и в задачах исследования устойчивости систем с запаздыванием. В настоящей работе предлагается использовать в качестве функции Ляпунова для системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом квадратичную функцию Ляпунова, построенную для некоторой вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и удовлетворяющую ограничениям на ее первую производную в силу этой системы. Коэффициенты квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничениям на ее первую производную находятся в силу достаточно простых аналитических соотношений.

Ключевые слова: устойчивость систем с запаздыванием, прямой метод Ляпунова, квадратичная функция Ляпунова.

ON THE APPLICATION OF LYAPUNOV'S QUADRATIC FUNCTIONS WITH GIVEN PROPERTIES FOR STUDYING THE STABILITY OF LAGGING SYSTEMS

Research article

Antonovskaya O.G.[1,] *, Besklubnaya A.V.[2]
[1] ORCID : 0000-0002-5688-7996;
[1, 2] Nyzhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation

* Corresponding author (olga.antonovsckaja[at]yandex.ru)

Abstract

In problems of stability research for ordinary differential equations using the direct Lyapunov method, Lyapunov functions in the form of positive definite quadratic forms (or quadratic Lyapunov functions) have found wide application. Quadratic forms can be equally widely used in stability analysis problems for lagging systems. This work proposes using a quadratic Lyapunov function as the Lyapunov function for a system of differential equations with lagging argument. This function is constructed for a certain auxiliary system of ordinary differential equations and satisfies the constraints on its first derivative due to this system. The coefficients of the quadratic Lyapunov function satisfying the restrictions on its first derivative are found by means of fairly simple analytical relations.

Keywords: stability of lagging systems, Lyapunov's direct method, Lyapunov's quadratic function.

Введение

Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения с запаздыванием часто используются в математическом моделировании явлений и процессов в различных областях теоретической физики, механики, теории управления, биологии, биофизики, медицины, экологии, экономики и технических приложениях. В биологии и биомеханике запаздывание обусловлено ограниченной скоростью передачи нервных и мышечных реакций в живых тканях; в медицине — в задачах распространения инфекционных заболеваний — время запаздывания определяется инкубационным периодом; в динамике популяций запаздывание связано с тем, что особи участвуют в репродукции лишь после достижения определенного возраста; в теории управления запаздывание обычно связано с конечной скоростью распространения сигнала и ограниченной скоростью технологических процессов [1].

Наличие запаздывания в большинстве реальных систем управления определяет необходимость развития теории систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [1], [2], [3]. Особое внимание при этом уделяется такому важному свойству систем как устойчивость. Наиболее общим методом исследования устойчивости является прямой метод Ляпунова (или метод функций Ляпунова) [3], [4], [5]. В задачах исследования устойчивости по первому приближению систем обыкновенных дифференциальных уравнений часто применяются функции Ляпунова в виде квадратичных форм, построенные для соответствующих линеаризованных систем. Квадратичные функции Ляпунова могут применяться и в задачах исследования устойчивости систем с запаздыванием [6], [7].

В настоящей работе предлагается использовать в качестве функции Ляпунова для исследования устойчивости системы с запаздыванием квадратичной функции Ляпунова, построенной для некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений и удовлетворяющей заданным ограничениям на ее первую производную в силу этой системы [8], [9]. Выбор коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничениям не ее первую производную осуществляется с помощью простых аналитических соотношений работы [10]. Для оценивания знака производной функции Ляпунова в силу системы с запаздыванием рассматриваются ее свойства как в силу системы без запаздывания, так и свойства вспомогательной системы, построенной с использованием запаздывающей части.

Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$\dot{x} = F(x,\ x(t-\tau)),\ x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n, \tag{1}$$

где

$$x(t-\tau) = (x_1(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau))^T \in R^n,$$
$$F(x, x(t-\tau))$$
$$= (f_1(x_1, \dots, x_n, x_1(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau)), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, x_1(t-\tau), \dots, x_n(t-\tau)))^T,$$
$$F(0,0) = 0.$$

Здесь f_i — непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов, τ — постоянная величина.

Для того чтобы положительно определенная квадратичная форма

$$V(x) = x^T K x (K^T = K) \tag{2}$$

удовлетворяла требованиям теоремы Разумихина об асимптотической устойчивости системы (1), достаточно, чтобы она удовлетворяла требованиям теоремы Разумихина об асимптотической устойчивости системы первого приближения

$$\dot{x} = Ax + Bx(t-\tau), \tag{3}$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \ , \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \ , \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0) \ , \quad b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j(t-\tau)}(0,0) \ .$$

То есть должно выполняться условие $\dot{V}(x, x(t-\tau)) < 0$ при или, что то же самое $V(x(t-\tau)) \le V(x)$

$$x^T(A^T K + KA)x + x^T(t-\tau)B^T K x + x^T K B x(t-\tau) < 0 \tag{4}$$

при $x^T(t-\tau)Kx(t-\tau) \le x^T K x$.

Некоторые вспомогательные утверждения

1. Переходя к записи через элементы матриц и используя факт симметричности матрицы K, можно показать, что $\eta^T B^T K x + x^T K B \eta = x^T(B^T K + KB)\eta$ (Приложение 1).

2. Лемма 1. Наибольшее и наименьшее значения выражения $x^T K\eta (K^T = K)$ на поверхности уровня $x^T K x = V_0$ при условии, что $\eta^T K \eta = \theta x^T K x \ (0 \le \theta \le 1)$ равны $\pm\sqrt{\theta V_0}$ (Приложение 2).

3. Лемма 2. Наибольшее и наименьшее значения выражения $x^T D\eta (D^T = D)$ на поверхности уровня $x^T K x = V_0$ при условии, что $\eta^T K \eta = \theta x^T K x \ (0 \le \theta \le 1)$ принимаются в таких точках, что $\eta^T D \eta = \theta x^T D x$ (Приложение 3).

4. Пусть квадратичная форма $U(x) = x^T \widetilde{D} x \left(D^T \ne \widetilde{D}\right)$, то есть матрица $\check{D} = \left(\widetilde{D}_{ij}\right)$ не является симметрической. Но это выражение всегда можно переписать в виде $x^T \widetilde{D} x = x^T D x$, где $D_{ij} = \left(\widetilde{D}_{ij} + \widetilde{D}_{ji}\right)/2$. И матрица $D = (D_{ij})$ уже является симметрической.

Лемма 3. Наибольшее и наименьшее значения выражения $x^T \widetilde{D}\eta$, где $U(x) = x^T \widetilde{D} x \left(D^T \ne \widetilde{D}\right)$ знакоопределенная квадратичная форма, при условии, что $\eta^T D \eta = \theta x^T D x \ (0 \le \theta \le 1)$ и $x^T D \eta = U_0$ принимается в таких точках, что $x^T \widetilde{D}\eta = x^T D \eta$ т.е. $x^T \widetilde{D} \eta = U_0$ (Приложение 4).

О возможности применения квадратичной функции Ляпунова при исследовании устойчивости системы с запаздыванием

В силу приведенных выше утверждений, для левой части в (4) можно записать оценку

$$x^T\left(A^T K + KA\right)x + x^T(t-\tau)B^T K x + x^T K B x(t-\tau) \le$$
$$x^T\left(A^T K + KA\right)x + x^T\left(B^T K + KB\right)x.$$

То есть при выполнении неравенства

$$x^T(A^T K + KA)x + x^T(B^T K + KB)x < 0, \tag{5}$$

неравенство (4) всегда будет иметь место.

Первое слагаемое в левой части (5) есть выражение для первой производной квадратичной формы (2) в силу системы без запаздывания

$$\dot{x} = Ax \tag{6}$$

Будем предполагать, что собственные значения матрицы этой системы имеют отрицательные действительные части, т.е. состояние равновесия в силу этой системы устойчиво. Также будем предполагать, что коэффициенты *V(x)* выбраны таким образом, что она является функцией Ляпунова (6), удовлетворяющей условию равенства максимума ее первой производной в силу системы на любой поверхности уровня *V(x)=V₀* значению *δV₀*, где $2\max_{i=1,n} \mathrm{Re}\,\lambda_i \le \delta < 0$. А это означает, что величина *μ=δ* есть наименьший корень уравнения [8], [9], [10]

$$det(A^T K + KA - \mu K) = 0. \quad (7)$$

Но тогда второе слагаемое в левой части (5) есть выражение для первой производной квадратичной формы (2) в силу системы без запаздывания

$$\dot{x} = \boldsymbol{B}x \quad (8)$$

А наибольшее значение ее на поверхности уровня *V(x)=V₀* будет находиться как $\tilde{\delta}V_0$, где $\mu = \tilde{\delta}$ есть наибольший корень уравнения [9]

$$det(\boldsymbol{B}^T K + K\boldsymbol{B} - \mu K) = 0. \quad (9)$$

Но это означает, что

$$\dot{V}(x, x(t-\tau)) \le (\delta + \tilde{\delta})V_0 < 0$$

на любой поверхности уровня *V(x)=V₀*. Таким образом, будет иметь место следующая теорема.

Теорема. Пусть δ есть наибольший корень уравнения (7), а $\tilde{\delta}$ – наибольший корень уравнения (9). Тогда если $\delta + \tilde{\delta} < 0$, то квадратичную форму (2) можно использовать как функцию Ляпунова при исследовании системы с запаздыванием (3).

Заключение

Настоящая работа посвящена вопросу о возможности применения в качестве функции Ляпунова при исследовании устойчивости системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом положительно определенной квадратичной формы, являющейся функцией Ляпунова вспомогательной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача об исследовании устойчивости дифференциальных уравнений с запаздыванием является существенно более сложной, чем аналогичная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе впервые предлагается оценивать отрицательную определенность производной квадратичной функции Ляпунова в силу системы дифференциальных уравнений с запаздыванием через достаточное условие, позволяющее оценивать знак ее производных в силу двух линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, построенных с использованием как части системы с запаздыванием, так и части без него. Для получения необходимых при этом оценок методом неопределенных множителей Лагранжа доказаны соответствующие неравенства.

5.1. Приложение

$$\eta^T B^T Kx + x^T KB\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{ij} b_{ik} x_j \eta_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{ij} b_{jk} x_k \eta_i =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{ij} b_{ik} x_j \eta_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{ij} b_{ji} x_i \eta_k =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{ij} \left(b_{ik} x_j + b_{ji} x_i\right) \eta_k = x^T \left(B^T K + KB\right) \eta$$

5.2. Приложение 2. Доказательство леммы 1

Рассмотрим выражение $x^T K\eta \left(K^T = K\right)$ на поверхности уровня $x^T Kx = V_0$ при условии, что $\eta^T K\eta = \theta x^T Kx \ (0 \le \theta \le 1)$. Но $x^T K\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i \eta_j$, причем $K_{ij} = K_{ji}$ для всех *i,j=1,2,…,n*. Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. В качестве функции Лагранжа выберем

$$L\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \Lambda_1, \Lambda_2\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i \eta_j + \Lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \eta_i \eta_j - \right.$$
$$\left. -\theta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j\right) + \Lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j - V_0\right).$$

Тогда координаты точек условного экстремума на поверхности $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j = V_0$ являются решениями системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \eta_j + 2\left(\Lambda_2 - \theta\Lambda_1\right) \sum_{j=1}^n K_{ij} x_j = 0,$$
$$\sum_{i=1}^n K_{ij} x_i + 2\Lambda_1 \sum_{i=1}^n K_{ij} \eta_i = 0,$$
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j = V_0,$$
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \eta_i \eta_j = \theta V_0.$$

Умножая первое уравнение на x_i и складывая по i, получим, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i \eta_j + 2\left(\Lambda_2 - \theta\Lambda_1\right) V_0 = 0.$$

Умножая второе уравнение на η_j и складывая по j, получим, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i \eta_j + 2\Lambda_1 V_0 = 0.$$

Ввиду равенства правых частей, приравнивая левые части, получаем

$$\Lambda_2 = 2\theta\Lambda_1. \quad (10)$$

Умножая второе уравнение на x_j, складывая по j и учитывая, что $K_{ij}=K_{ji}$, получим

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i \eta_j = -\frac{V_0}{2\Lambda_1}$$

откуда

$$\Lambda_2 = \frac{1}{2\Lambda_1}. \quad (11)$$

Решая систему (10), (11), получаем, что

$$\Lambda_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{\theta}} \ , \ \ \Lambda_2 = \pm\sqrt{\theta}$$

а значит наибольшее и наименьшее значения выражения $x^T K\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i \eta_j$ при указанных условиях равны $\pm\sqrt{\theta} V_0$.

Лемма доказана.

5.3. Приложение 3. Доказательство леммы 2

Рассмотрим выражение $x^T D\eta \left(D^T = D\right)$ на поверхности уровня $x^T K x = V_0$ при условии, что $\eta^T K\eta = \theta x^T K x \ (0 \le \theta \le 1)$. Но $x^T D\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} x_i \eta_j$, причем $D_{ij}=D_{ji}$ для всех $i, j=1,2,\ldots,n$.

Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. В качестве функции Лагранжа выберем

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \Lambda_1, \Lambda_2\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} x_i \eta_j + \Lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \eta_i \eta_j - \right.$$
$$\left. -\theta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j \right) + \Lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j - V_0\right).$$

Тогда координаты точек условного экстремума на поверхности $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j = V_0$ являются решениями системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n D_{ij} \eta_j + 2\left(\Lambda_2 - \theta\Lambda_1\right) \sum_{j=1}^n K_{ij} x_j = 0 \ ,$$
$$\sum_{i=1}^n D_{ij} x_i + 2\Lambda_1 \sum_{i=1}^n K_{ij} \eta_i = 0 \ ,$$
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j = V_0 \ ,$$
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \eta_i \eta_j = \theta V_0.$$

Умножая первое уравнение на x_i и складывая по i, получим, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} x_i \eta_j + 2\left(\Lambda_2 - \theta\Lambda_1\right) V_0 = 0.$$

Умножая второе уравнение на η_j и складывая по j, получим, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} x_i \eta_j + 2\Lambda_1 V_0 = 0$$

Ввиду равенства правых частей, приравнивая левые части, получаем (10).

Умножая первое уравнение на η_i и складывая по i, получим, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \eta_i \eta_j + 2\left(\Lambda_2 - \theta\Lambda_1\right) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} x_i \eta_j = 0.$$

Умножая второе уравнение на x_j и складывая по j, получим, что

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} x_i x_j + 2\Lambda_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} x_i \eta_j = 0.$$

Тогда, в силу (10)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \eta_i \eta_j = \theta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} x_i x_j$$

Или $\eta^T D\eta = \theta x^T D x$.

Лемма доказана.

5.4. Приложение 4

Доказательство леммы 3 очевидно, поскольку $x^T \widetilde{D} x$ есть просто перезапись выражения $x^T D x$.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Деменченок О.Г., Восточно-Сибирский институт МВД России, Иркутск Российская Федерация
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.165.20.1

Conflict of Interest

None declared.

Review

Demenchenok O.G., East-Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of the Russian Federation, Irkutsk Russian Federation
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2026.165.20.1

Список литературы / References

1. Полянин А.Д. Дифференциальные уравнения с запаздыванием: Свойства, методы решения и модели / А.Д. Полянин, В.Г. Сорокин, А.И. Журов. — Москва: ИПМех РАН, 2022. — 464 с.
2. Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием / А.В. Ким. — Екатеринбург: Изд-во Урал. Ун-та, 1992. — 144 с.
3. Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем / Б.С. Разумихин. — Москва: Наука, 1988. — 108 с.
4. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова / Е.А. Барбашин. — Москва: Наука, 1970. — 240 с.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. — Москва, Ленинград: Изд-во техн.-теор. лит., 1950. — 472 с.
6. Горбунов А.В. Метод функций Ляпунова для построения областей притяжения систем с запаздыванием / А.В. Горбунов, В.А. Каменецкий // Автоматика и телемеханика. — 2005. — Т. 66. — № 10. — С. 42–53.
7. Разумихин Б.С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием / Б.С. Разумихин // Автоматика и телемеханика. — 1960. — Т. 21. — № 6. — С. 740–748.

8. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами / О.Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49. — № 9. — С. 1220–1224.
9. Антоновская О.Г. Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем / О.Г. Антоновская // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 2 (501). — С. 19–23.
10. Антоновская О.Г. О выборе коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами / О.Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52. — № 3. — С. 275–281.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Polyanin A.D. Differentsialnie uravneniya s zapazdivaniem: Svoistva, metodi resheniya i modeli [Differential equations with delay: Properties, solution methods and models] / A.D. Polyanin, V.G. Sorokin, A.I. Zhurov. — Moscow: IPMeh RAS, 2022. — 464 p. [in Russian]
2. Kim A.V. Pryamoi metod Lyapunova v teorii ustoichivosti sistem s posledeistviem [Lyapunov's direct method in the theory of stability of systems with aftereffects] / A.V. Kim. — Yekaterinburg: Publishing House of the Ural University, 1992. — 144 p. [in Russian]
3. Razumikhin B.S. Ustoichivost ereditarnikh sistem [The stability of hereditary systems] / B.S. Razumikhin. — Moscow: Nauka, 1988. — 108 p. [in Russian]
4. Barbashin Ye.A. Funktsii Lyapunova [Lyapunov functions] / Ye.A. Barbashin. — Moscow: Nauka, 1970. — 240 p. [in Russian]
5. Lyapunov A.M. Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya [The general problem of motion stability] / A.M. Lyapunov. — Moscow, Leningrad: Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1950. — 472 p. [in Russian]
6. Gorbunov A.V. Metod funktsii Lyapunova dlya postroeniya oblastei prityazheniya sistem s zapazdivaniem [Attraction domains of delay system construction by the Lyapunov function method] / A.V. Gorbunov, V.A. Kamenetskii // Avtomatika i telemekhanika [Automation and Remote Control]. — 2005. — Vol. 66. — № 10. — P. 42–53. [in Russian]
7. Razumikhin B.S. Primenenie metoda Lyapunova k zadacham ustoichivosti sistem s zapazdivaniem [Application of the Lyapunov method to problems of stability of systems with delay] / B.S. Razumikhin // Avtomatika i telemekhanika [Automation and Remote Control]. — 1960. — Vol. 21. — № 6. — P. 740–748. [in Russian]
8. Antonovskaya O.G. O postroenii kvadratichnoi funktsii Lyapunova s zadannimi svoistvami [On the construction of quadratic Lyapunov function with given properties] / O.G. Antonovskaya // Differentsialnie uravneniya [Differential equations]. — 2013. — Vol. 49. — № 9. — P. 1220–1224. [in Russian]
9. Antonovskaya O.G. Postroenie kvadratichnikh funktsii Lyapunova, udovletvoryayushchikh zadannim ogranicheniyam, dlya neprerivnikh i diskretnikh dinamicheskikh sistem [Construction of quadratic Lyapunov functions that satisfy the given constraints for continuous and discrete dynamical systems] / O.G. Antonovskaya // Izvestiya vuzov. Matematika [Universities News. Mathematics]. — 2004. — № 2 (501). — P. 19–23. [in Russian]
10. Antonovskaya O.G. O vibore koeffitsientov kvadratichnoi funktsii Lyapunova s zadannimi svoistvami [Determination of coefficients of a quadratic Lyapunov function with given properties] / O.G. Antonovskaya // Differentsialnie uravneniya [Differential equations]. — 2016. — Vol. 52. — № 3. — P. 275–281. [in Russian]