ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА / DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.127.3

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

Научная статья

Тедеев А.Ф.[1, *]

[1] Северо-Осетинский Государственный Университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (tedeev92[at]bk.ru)

Аннотация

В работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения дробной диффузии. Путем соединения гармонического продолжения рассматриваемого решения и самого решения в одной краевой задаче оценивается искомое решение в равномерной метрике через интегральную норму. Тем самим доказывается существенная ограниченность решения. Оценка получена методом подбора пробных функции в интегральном тождестве, где объединены продолжение решения и само решение дифференциального уравнения в одном интегральном тождестве. Используемый метод показывает, что при малых значениях времени поведение решения не зависит от параметров задачи. Зависимость от параметров задачи проявляется при больших значениях времени, то есть решение зависит от степени источника только начиная с некоторого момента времени. Из доказанной теоремы можно определить этот момент времени, как решение некоторого уравнения. Полученная оценка является обобщением аналогичных результатов, полученных для дифференциальных уравнений пористой среды.

Ключевые слова: гармоническое продолжение, след функции, интегральное тождество, пробная функция.

AN EVALUATION OF A SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM OF THE NONLINEAR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Research article

Tedeev A.F.[1, *]

[1] North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russian Federation

* Corresponding author (tedeev92[at]bk.ru)

Abstract

In the work, the Cauchy problem for the nonlinear fractional diffusion equation is examined. By connecting the harmonic continuation of the studied solution and the solution itself in one boundary value problem, the desired solution in uniform metrics is evaluated through the integral norm. This proves the substantial limitation of the solution. This evaluation is obtained by sampling functions in an integral identity, where the continuation of the solution and the solution of the differential equation itself are combined in a single integral identity. The method used shows that for small values of time, the behaviour of the solution does not depend on the parameters of the problem. The dependence on the parameters of the problem appears at large values of time, that is, the solution depends on the degree of the source only starting from a certain point in time. From the proved theorem, it is possible to define this moment of time as the solution of some equation. The obtained evaluation is a generalization of similar results obtained for differential equations of a porous medium.

Keywords: harmonic extension, trace function, integral identity, testing function.

Введение

Данная работа является продолжением работ [2] и [3], в которой рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения дробного порядка

$$\frac{\delta u}{\delta t} + (-\Delta)^a u = u^r,\ x \in R_+^N,\ t > 0,\ 0 < r < 1,\ 0 < a < 1 \qquad (1)$$

$$u(x,0) - u_0(x) \qquad (2)$$

R^N- N-мерное арифметическое пространство. Оператор $(-\Delta)^a$ f(x) определяется в виде потенциала Рисса

$$(-\Delta)^a f(x) = C_N \int_{R_N} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{N+2\alpha}} d\gamma$$

C_N-постоянная, зависящая от размерности N.

Дробно-дифференциальные уравнения вида (1) рассматривались при изучении турбулентного характера движения космических лучей. Дробная степень Лапласа при этом обеспечивает более быстрое по сравнению с нормальной диффузией расплывания диффузионного пакета.

Дробно-дифференциальная модель используется и в других задачах движения заряженных частиц в магнитных полях. Подобным уравнениям с нормальной диффузией и без источника посвящена монография [11].

В работе [3], при α=1/2, дана оценка решения задачи (1), (2) через интеграл площадей Лузина гармонической функции, являющееся продолжением решения в полупространстве $R_+^{N+1}=\{(x,y) : x\in R^N, y>0\}$. Полученная оценка дополняет неравенства (3) и (4) теоремы 1 в работе [7]

В работе [5] для решения задачи Коши нелинейного уравнения дробной диффузии порядка 1/2, без источника (теорема (2.4)) в равномерной метрике доказана оценка

$$||u(\cdot,t)||_{\infty}, R^N \leq ct^{-r}||f||^{r/N}_{L^1(R^N)},$$

где $r=m-1+1/N^{-1}$, m - порядок нелинейности дифференциального уравнения, f – начальная функция, N – размерность пространства.

Далее, в работе [6] приведенная выше оценка обобщается для решения задачи Коши нелинейного уравнения дробной диффузии порядка α ($0<\alpha<1$).

$$||u(\cdot,t)||_{\infty}, R^N \leq ct^{-r_1}||f||^{\delta_1}_{L^1(R^N)},$$

где $r_1=(m-1+2\alpha/N)^{-1}$, $\delta_1=(2_\alpha\, r_1)/N$, C- несущественная постоянная.

Приведенные оценки имеют место при любом $t>0$. Ранее, аналогичные результаты для уравнений пористой среды (α=1) были получены в работах [8], [9], [10]. В монографии [11] дается подробный анализ аналогичных результатов для более общих дифференциальных уравнений. В частности в монографии приведены оценки, где в правой части таких неравенств вместо нормы от начальной функции фигурируют нормы от средних значений решений. Любая из приведенных выше оценок дает асимптотическое поведение решения при неограниченном росте времени.

Как известно [4] продолжение v(x,y,t)=E(u(x,t)) функцииu(x,t) (t- фиксировано) в область R_+^{N+1} и оператор $(-\Delta)^a$ связаны с помощью равенства

$$-y^{1-2a}\frac{\delta v}{\delta y}\bigg|_{y=0} = (-\Delta)^a u, 0 < \alpha < 1 \tag{3}$$

Следовательно, функции v(x,y,t)=E(u(x,t)) и u(x,t)=T_(r) (v(x,y,t)) на основании (1), (2), (3) и результатов работы [4] могут быть соединены в одной краевой задаче вида

$$div(y^s \cdot Dv) = 0,\ x \in R^N,\ y > 0,\ s = 1-2a \tag{4}$$

$$y^s\frac{\delta v}{\delta y}\bigg|_{y=0} = \frac{\delta u}{\delta t} - u^r \tag{5}$$

$$v(x,0,0) - u_0(x) \tag{6}$$

где

$Dv=(v_{x1}, v_{x2}, \dots, v_{xN}, v_y$ - градиент функции v.

В дальнейшем мы будем считать

$$u(x,t) = T_r(v),\ v = E(u)$$

где $T_r(v)$ – это след функции v на R^N, а E(u) – продолжение функции u в область

$$\Omega = R^N \times R^1_+ = \{(x,y) = (x_1, x_2, \dots, x_N, y) : x \in R^N, y > 0\}.$$

Все приведенные равенства (1) – (6) мы понимаем в слабом (интегральном) смысле. В частности, граничное условие (5) эквивалентно дифференциальному уравнению (1).

Введем определения слабых решений задач (1), (2) и (4)-(6).

Определение 1. Пусть $u_0 \in L_2(R^N)$, $N\geq1$, и $T>0$. Неотрицательную функцию u=u(x,t) будем называть слабым решением задачи Коши (1), (2), если $u(x,t)\in L_2((0,T);L_2(R^N))$, и имеет место тождество

$$\int_0^T\int_{R^N_+} u^r\varphi(x,t)dxdt = \int_0^T\int_{R^N_+} u(-\Delta)^a\varphi dxdt - \int_0^T\int_{R^N_+} u\varphi_t(x,t)dxdt \tag{7}$$

для любой функции $\varphi(x,t)\in C_0^1(R^N\times(0,T))$.

Определение 2. Будем называть пару неотрицательных функция (u,v) слабым решением задачи (4)-(6), если $v \in L_2([0,T);W_{2,s}^1(\Omega))$, $u=u(x,t)=T_r(v)\in L_2((0,T);L_2(R^N))$, и имеет место тождество

$$-\int_0^T\int_\Omega y^s Dv\cdot D\varphi dxdydt + \int_0^T\int_{R^N} u\frac{\partial\varphi}{\partial t}dxdt + \int_0^T\int_{R^N} u^r\varphi dxdt = 0 \tag{8}$$

Для любой функции $\varphi(x,y,t) \in C_0^1(\overline{\Omega}\times(0,T))$, где

$$s = 1-2\alpha, Dv\cdot D\varphi = \sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{и}$$

$W_{2,s}^1(\Omega)$ - весовое пространство Соболева с нормой

$$\|v\|w^1_{2,s}(\Omega) = \left(\int_\Omega y^s|Dv|^2dxdy + \int_\Omega v^2dxdy\right)^{1/2}$$

Замечание. Если функция u(x,t) является слабым решением задачи (1), (2) и v(x,y,y) – продолжение функции u(x,t) в область Ω, то имеет место равенства (5) и (6). Умножая обе части равенства (4) на пробную функцию $\varphi(x,y,t) \in C_0^1(\overline{\Omega} \times (0,T))$, затем интегрируя по частям полученное равенство, с учетом равенств (5) и (6), мы приходим к интегральному тождеству (7). Следовательно, пара функций (u,v) является слабым решением задачи (4)-(6). Обратно, если пара функций (u,v), где $u(x,t)=T_r(v(x,y,t))$, является слабым решением задачи (4)-(6), то на основании (5) и (6) имеют место соотношения (1) и (2),то есть u(x,t)- слабое решение задачи (1) и (2).

В дальнейшем мы будем предполагать, что решение задачи (4)-(6) существует.

Основной результат

Рассмотрим последовательности

$$\rho_n = \rho\,(1+\sigma 2^{-n})\,, t_n = \tfrac{1}{2}t\,(1-\sigma 2^{-n})\,, n = 0,1,2,\ldots,$$

где t>0 и 0<σ<1.

Пусть, далее $B_{\rho_n}^{N+1} = B_n^{N+1}$, где $B_{\rho_n}^{N+1}$ шар с центром в начале координат и радиусом ρ_n в R^{N+1} ,и $B_{\rho_n}^{N} = B_n^{N}$ - аналогичный шар в $R^N, \Omega_n^{N+1} = B_n^{N+1} \times (t_n,t);\ \Omega_n^N = B_n^N \times (t_n,t).$ ·

Введем последовательность гладких срезающих функций $\varsigma_n(x,y,t)$ в Ω_n^{N+1}, равные единице в Ω_{n+1}^{N+1}, и такие, что

$$0 \le \frac{\partial \zeta_n}{\partial \tau} \le \frac{c2^n}{\sigma\tau}, \quad |D\zeta_n| \le \frac{c2^n}{\sigma\rho}, \quad 0 \le \varsigma_n(x,y,t) \le 1 \tag{9}$$

здесь с – некоторая константа, $D\varsigma_n = \mathrm{grad}\,\varsigma_n$.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть u=u(x,t)- слабое решение задачи (1), (2), принадлежащее пространству $L_2((0,T);L_2(R^N))$ при любом T>0, тогда имеют место оценки:

$$t^{2+(1-r)\left(N^2/2\alpha\right)} \cdot \|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N} \le \mathrm{C}\left(\int_0^t \int_{R^N} u^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2+(1-r)\left(N^2/2\alpha\right)}}$$

При всех t, удовлетворяющих условию

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N^2}{4a}}$$

$$t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N} \le C\left(\int_0^t \int_{R^N} u^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

При всех t, удовлетворяющих условию

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N^2}{4a}}$$

где С – постоянная, зависящая от α и N.

Доказательство. Пусть v=v(x,y,t) - продолжение функции u=u(x,t) в область Ω. Тогда пара функций (u,v) удовлетворяет тождеству (8). Полагая в тождестве (8) $\varphi=(v-k_n)_+\cdot\varsigma_n^2$, $\varsigma_n(x,y,t)$ - срезающие функции, удовлетворяющие соотношениям (9), $k_n=k-k/2^n$, n=0,1,2,…, k – произвольное положительное число, и

$$(v-k_n)_+ = \max\{0, v-k_n\}.$$

После подстановки получаем равенство

$$-\int_0^T \int_\Omega y^s Dv \cdot D\left[(v-k_n)_+ \cdot \varsigma_n^2\right] dxdydt + \int_0^T \int_{R^N} u \frac{\partial}{\partial t}\left[(v-k_n)_+ \cdot \varsigma_n^2\right] dxdt + \\ + \int_0^T \int_{R^N} u^r \left[(v-k_n)_+ \cdot \varsigma_n^2\right] dxdt = 0 \tag{10}$$

Первое слагаемое левой части равенства (10) можно преобразовать следующим образом:

$$-\int_0^T \int_\Omega y^s Dv \cdot D\left[(v-k_n)_+ \varsigma_n^2\right] dxdydt = \\ = -\int_0^T \int_\Omega y^s \left(\sum_{j=1}^{N+1}\left[(v-k_n)_{+x_j}\right]^2 \varsigma_n^2 + 2\sum_{j=1}^{N+1}(v-k_n)_{+x_j}\varsigma_n \cdot \varsigma_{nx_j}(v-k_n)_+\right) dxdydt \tag{11}$$

Так как

$$\left(\left[(v-k_n)_+\zeta_n\right]_{x_j}\right)^2=\left[(v-k_n)_{+x_j}\zeta_n+(v-k_n)_+\zeta_n x_j\right]^2$$

$$=(v-k_n)_{+x_j}^2\cdot\varsigma_n^2+2\,(v-k_n)_{+x_j}\,(v-k_n)_+\varsigma_n\cdot\varsigma_{nx_j}+(v-k_n)_+^2\,\varsigma_{nx_j}^2$$

то отсюда получим

$$(v-k_n)_{+x_j}^2\,\varsigma_n^2+2\,(v-k_n)_{+x_j}\,(v-k_n)_+\varsigma_n\cdot\zeta_{nx_j}=\left[(v-k_n)_+\zeta_n\right]_{x_j}^2-(v-k_n)_+^2\,\varsigma_{nx_j}^2.$$

Следовательно, из (11) будем иметь

$$-\int_0^T\int_\Omega y^s Dv\cdot D\left[(v-k_n)+\varsigma_n^2\right]dxdydt=-\int_0^T\int_\Omega y^s\left|D\left[(v-k_n)_+\varsigma_n\right]\right|^2dxdydt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega y^s\,(v-k_n)_+^2\,|D\varsigma_n|^2\,dxdydt. \tag{12}$$

Для второго слагаемого равенства (10) имеем:

$$\int_0^T\int_{R^N}u\frac{\partial}{\partial t}\cdot D\left[(u-k_n)_+\varsigma_n^2\right]dxdt=\int_0^T\int_{R^N}u\left[\frac{\partial}{\partial t}\,(u-k_n)+\varsigma_n^2+2\,(u-k_n)+\varsigma_n\cdot\frac{\partial\varsigma_n}{\partial t}\right]dxdt$$
$$=\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+\frac{\partial(u-k_n)_+}{\partial t}\varsigma_n^2dxdt+\int_0^T\int_{R^N}k_n\frac{\partial(u-k_n)_+}{\partial t}\varsigma_n^2dxdt+$$
$$+2\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\,\zeta_n\cdot\frac{\partial\zeta_n}{\partial t}dxdt+2\int_0^T\int_{R^N}k_n\,(u-k_n)_+\varsigma_n\cdot\frac{\partial\zeta_n}{\partial t}dxdt= \tag{13}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^T\int_{R^N}\frac{\partial(u-k_n)_+^2}{\partial t}\varsigma_n^2dxdt+2\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\cdot\varsigma_n\cdot\frac{\partial\varsigma_n}{\partial t}dxdt=\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\,\varsigma_n\cdot\frac{\partial\zeta_n}{\partial t}dxdt.$$

После несложных преобразований для третьего слагаемого можно получить оценку

$$\int_0^T\int_{R^N}u^r\,(u-k_n)_+\,\xi_n^2dxdt\le\left(\text{ meas }\Omega_n^N\right)^{\frac{1-r}{2}}\left(\int_0^T\int_{R^N}\left[(u-k_n)_+\varsigma_n\right]^2dxdt\right)^{\frac{r+}{2}}$$
$$+k_n^r\left(\text{ meas }\Omega_n^N\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)^2+\varsigma_n^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Из (10) на основании (12), (13) и (14) получим соотношение

$$-\int_0^T\int_\Omega y^s\left|D\left[(v-k_n)_+\varsigma_n\right]\right|^2dxdydt+\int_0^T\int_\Omega y^s\,(v-k_n)_+^2\,|D\varsigma_n|^2\,dxdydt$$
$$+\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\,\varsigma_n\frac{\partial\varsigma_n}{\partial t}dxdt+\left(\text{ meas }\Omega_n^N\right)^{\frac{1-r}{2}}\left(\int_0^T\int_{R^N}\left[(u-k_n)_+\varsigma_n\right]^2dxdt\right)^{\frac{r+1}{2}}+ \tag{15}$$
$$+k_n^r\left(\text{ meas }\Omega_n^N\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_{R^N}\left[(u-k_n)_+\varsigma_n\right]^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\ge 0.$$

Из неравенства (5.5) в [5] следует, что

$$\int_\Omega y^{1-2\alpha}\left|D\left[(v-k_n)_+\varsigma_n\right]\right|^2dxdy\ge C(\alpha,N)\left(\int_{R^N}\left[(u-k_n)_+\zeta_n\right]\frac{2N}{N-2\alpha}dx\right)^{\frac{N-2}{N}} \tag{16}$$

Так как при этом

$$\int_0^T\int_{R^N}\left[((u-k_n)_+\varsigma_n)\right]^2dxdt\le T\left[\text{ meas }\left(\operatorname{supp}\varsigma_n(x,t)\right)\right]^{\frac{2\alpha}{N}}\int_0^T\left(\int_{R^N}\left[(u-k_n)+\varsigma_n\right]^{\frac{2N}{N-2\alpha}}dx\right)^{\frac{N-2\alpha}{N}}dt,$$

то из (16) получим оценку

$$\int_0^T\int_\Omega y^{1-2\alpha}\left|D\left[(v-k_n)_+\varsigma_n\right]\right|^2dxdydt\ge$$
$$\ge C(\alpha,N)\cdot T\left[\text{meas}\left(\text{support}\varsigma_n\right)\right]^{-\frac{2\alpha}{N}}\int_0^T\int_{R^N}\left[((u-k_n)_+\varsigma_n)\right]^2dxdt. \tag{17}$$

Далее, из интегрального представления Пуассона [4] для функции будем иметь оценку

$$(v-k_n)_+^2\le C(\alpha,N)\left(\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\,dx\right)\left(\int_{R^N}\frac{y^{4\alpha}d\xi}{\left(|x-\xi|^2+y^2\right)^{N+2\alpha}}\right) \tag{18}$$

Используя неравенства (9), (17) и (18), из (15) получим

$$C(\alpha,N)t^{-1}\left[\text{ meas }(\text{support }\zeta_n)\right]^{-\frac{2\alpha}{N}}\int_0^T\int_{R^N}[(u-k_n)_+\zeta_n]^2\,dxdt\le$$
$$\le\frac{C(\alpha,N)2^{2n}}{\sigma\rho^2}\left(\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\,d\xi dt\right)\int_\Omega\left(\int_{R^N}\frac{y^{1+2\alpha}d\xi}{\left(|x-\xi|^2+y^2\right)^{N+2\alpha}}\right)dxdy+$$
$$+\frac{C(\alpha,N)2^n}{\sigma t}\cdot\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\,\zeta_n dxdt+ \tag{19}$$
$$+\left(\text{ meas }\Omega_n^N\right)^{\frac{1-r}{2}}\left(\int_0^T\int_{R^N}[(u-k_n)_+\zeta_n]^2\,dxdt\right)^{\frac{r+1}{2}}+$$
$$+k_n^r\left(\text{ meas }\Omega_n^N\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\,\zeta_n^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Для интеграла $\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\,S_n dxdt$ при $t<T$ имеем

$$\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\,\varsigma_n^2 dxdt\ge(k_{n+1}-k_n)^2\,(t-t_n)\text{ meas }\left(B_{\rho_n}^N\right)=\frac{C(N)k^2}{2^{2n}}\,(t-t_n)\,\rho_n^N \tag{20}$$

Пусть ε>0 произвольно, тогда на основании (20)

$$\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)_+^2\,\varsigma_n^2 dxdt\le\frac{\left(C(N)2^{-2n}k^2\,(t-t_n)\,\rho^N\right)^\varepsilon}{\left(C(N)2^{-2n}k^2\,(t-t_n)\,\rho^N\right)^\varepsilon}\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)^2+\varsigma_n^2 dxdt$$
$$\le\frac{1}{\left(C(N)2^{-2n}k^2\,(t-t_n)\,\rho^N\right)^\varepsilon}\left(\int_0^T\int_{R^N}(u-k_n)^2\,\varsigma_n^2 dxdt\right)^{1+\varepsilon}. \tag{21}$$

$$\left(\int_0^T\int_{R^N}\left[(u-k_n)^2+_n\varsigma^2 dxdt\right)^{\frac{r+1}{2}}\le\frac{1}{\left(C(N)2^{-2n}k^2\,(t-t_n)\,\rho^N\right)^{s+\frac{1-r}{2}}}\times$$
$$\times\left(\int_0^T\int_{R^N}\left[(u-k_n)^2{}_+\varsigma_n\right]^2dxdt\right)^{1+\varepsilon}\cdot\left(\int_0^T\int_{R^N}\left[(u-k_n)^2{}_+\varsigma_n\right]^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

$$\le\frac{1}{\left(C(N)2^{-2n}k^2(t-t_n)\rho^N\right)^{\varepsilon+\frac{1}{2}}}\left(\int_0^T\int_{R^N}\left[(u-k_n)^2{}_+\varsigma_n\right]^2dxdt\right)^{1+s} \tag{23}$$

Из (20) на основании (21), (22) и (23) получаем оценку

$$\left(\begin{array}{c}\frac{C(\alpha,N)2^{2n}}{\sigma\rho^2}\cdot\frac{1}{[(C(N)2^{-2n}k^2(t-t_n)\rho^N)]^\varepsilon}\int_\Omega\left(\int_{R^N}\frac{y^{1+2\alpha}d\xi}{(|x-\xi|^2+y^2)^{N+2\alpha}}\right)\varsigma_n dxdy+\\ \frac{C(\alpha,N)2^{2n}}{\sigma t}\cdot\frac{1}{(C(N)2^{-2n}k^2(t-t_n)\rho^N)^\varepsilon}+\frac{(meas\Omega_n^N)^{\frac{1-r}{2}}}{(C(N)2^{-2n}k^2(t-t_n)\rho^N)^{\varepsilon+\frac{1-r}{2}}}+\\ \frac{k_n^r(meas\Omega_n^N)^{\frac{1}{2}}}{(C(N)2^{-2n}k^2(t-t_n)\rho^N)^{\varepsilon+\frac{1}{2}}}\end{array}\right) \tag{24}$$
$$\times$$
$$\times\left(\int_0^T\int_{R^N}[(u-k_n)_+\varsigma_n]^2\,dxdt\right)^{1+\varepsilon}.$$

Перемножая неравенство (24) на $C(\alpha,N)t[meas(support_{\varsigma_n})]^{-\frac{2\alpha}{N}}$, и полагая ε = 2α/N^2, затем переходя к пределу в полученном неравенстве при ρ → ∞, учитывая, что первое слагаемое в фигурных скобках стремится к нулю, получим оценку

$$\int_0^T \int_{R^N} (u-k_{n+1})^2\, dxdt \le$$

$$\le C(N,\alpha,\gamma)b^n \cdot \left\{\frac{1}{k^{2\varepsilon}\,(t-t_n)^{\varepsilon}} + \frac{1}{k^{1-\gamma+2\varepsilon}\,(t-t_n)^{\varepsilon}} + \frac{1}{k^{1-\gamma+2\varepsilon}\,(t-t_n)^{\varepsilon}}\right\}\times$$

$$\times\left(\int_0^T \int_{R^N} [(u-k_n)_+]^2\, dxdt\right)^{1+\varepsilon} \le \tag{25}$$

$$\le Cb^n t^{-\varepsilon}\left(\frac{1}{k^{2\varepsilon}} + \frac{2}{k^{1-\gamma+2\varepsilon}}\right)\left(\int_0^T \int_{R^N} [(u-k_n)_+]^2\, dxdt\right)^{1+\varepsilon},$$

где $b > 1, C = C(N,\alpha,z), \varepsilon = \frac{2\alpha}{N^2}$.

Пусть

$$Y_n = \int_0^T \int_{R^N} [(u-k_n)_+]^2\, dxdt,$$

тогда из (25) будем иметь

$$Y_{n+1} \le Cb^n t^{-\varepsilon}\left(\frac{1}{k^{2\varepsilon}} + \frac{2}{k^{1-r+2\varepsilon}}\right) Y_n^{1+\varepsilon}, \quad n = 0,1,2,\dots\ \dots \tag{26}$$

Применим к неравенству (26) лемму 5.6 в [1]. Для этого подберем параметр k так, чтобы имело место соотношение

$$\int_{t\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}^{t} \int_{R^N} u^2(x,\tau)dxd\tau \le b^{-\frac{N^4}{4\alpha^2}}\left[C\cdot t^{-\varepsilon}\left(\frac{1}{k^{2\varepsilon}} + \frac{2}{k^{1-r+2\varepsilon}}\right)\right]^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{27}$$

Согласно лемме 5.6 в [1], если *k* удовлетворяет условию (27), то $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 0$.

Преобразуем правую часть неравенства (27).

$$b^{-\frac{N^4}{4\alpha^2}}\left[C\cdot t^{-\varepsilon}\left(\frac{1}{k^{2\varepsilon}} + \frac{2}{k^{1-r+2varepsilon}}\right)\right]^{-\frac{1}{\varepsilon}} =$$

$$= C(N,\alpha)b^{-\frac{N^4}{4\alpha^2}}\cdot t\cdot k^2\left(\frac{k^{1-\gamma}}{k^{1-r}+2}\right) \ge \tag{28}$$

$$\ge C(N,\alpha)b^{-\frac{N^4}{4\alpha^2}}\cdot t\cdot k^2\cdot \min\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N^2}{4\alpha}}, \frac{k^{(1-r)\frac{N^2}{2\alpha}}}{4}\right\}$$

Если правую часть неравенства (27) заменить на правую часть неравенства (28), то тем более будут выполняться условия упомянутой леммы, то есть при значениях *k*, удовлетворяющих неравенству

$$\int_{t\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}^{t} \int_{R^N} u^2 dxd\tau \le C(N,\alpha)b^{-\frac{N^4}{4\alpha^2}}\cdot t\cdot k^2\cdot \min\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N^2}{4\alpha}}, \frac{k^{(1-r)\frac{N^2}{2a}}}{4}\right\} \tag{29}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = 0$, то есть

$$\int_{\frac{1}{2}t}^{t} \int_{R^N} (u-k)_+^2 dxd\tau = 0$$

отсюда следует, что при значениях *k*, удовлетворяющих неравенству (29) имеет место оценка

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\,R^N} \le k \tag{30}$$

Доказательство теоремы следует из неравенства (29) и (30). Теорема доказана.

Заключение

Из доказанной теоремы следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{\infty,\,R^N} = 0$, следовательно, существует такое $t_0 \ge 0$, что $\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\,R^N} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N^2}{4\alpha}}$, при всех $t \ge t_0$.

Тогда согласно теореме,

$$t^{2+(1-r)\left(\frac{N^2}{2\alpha}\right)}\cdot\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}\le C\left(\int_0^\infty\int_{R^N}u^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2+(1-r)\left(\frac{N^2}{2\alpha}\right)}},$$

и в этом случае поведение решения зависит от параметров задачи .
Пусть

$$t_1=\inf\left\{t:\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N^2}{4\alpha}}\right\}$$

Если при этом $t_1>0$, то для всех t, удовлетворяющих условие $0 < t < t_1$, имеет место неравенство

$$t:\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{N^2}{4\alpha}}, \text{ и}$$

следовательно, по теореме

$$t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{\infty,R^N}\le C\left(\int_0^\infty\int_{R^N}u^2(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда видно, что поведение решения при малых значениях времени не зависит от параметров задачи. При $t_1 = 0$ поведение решения при малых значениях времени зависит от начальной функции.

Таким образом, в работе найдены условия на параметры, которые гарантируют стремление к нулю решения в равномерной метрике при неограниченном возрастании времени. Другими словами, найдены условия при которых решение дифференциального уравнения является физическим решением.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М., 1967. — 736 с.
2. Тедеев А.Ф. Существование и единство решения дифференциального уравнения дробной диффузии / А.Ф. Тедеев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2019. — 4. — с. 74-85.
3. Тедеев А.Ф. Задача Коши для нелинейного уравнения дробной диффузии / А.Ф. Тедеев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2020. — 3. — с. 107-118.
4. Caffarelli L. An extension problem related to the fractional Laplasian / L. Caffarelli, L. Silvestre // Communications in Partial Differential Equations. — 2008. — 8. — p. 1-15.
5. De Pablo A. A fractional porous medium equation / A. de Pablo, F. Quiros, A. Rodrigues et al. // Advances in Mathematics. — 2011 — 226. — p. 1378-1409
6. De Pablo A. A General Fractional Porous Medium Equation / A. de Pablo, F. Quiros, A. Rodrigues et al. // Advances in Mathematics. — 2018. — 8. — p. 1-43
7. Burkholdeer D.L. Distribution function inequalities for the area integral / D.L. Burkholdeer, R.F. Gundy // Studia Mathematica. — 1972. — p. 526-542
8. Cho C.K. The asymptotic behavior of solutions of a porous medium equation with bounded measurable coefficients / C.K. Cho, H.J. Choe // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — 210(1). — p. 241-256.
9. Dahlberg B.E. Non-negative solutions of a porous medium equation / B.E. Dahlberg, C.E. Kenig // Commun. Partial Differ. Equations. — 1984. — 9. — p. 409-437.
10. DiBenedetto E. Regularity results for the porous medium equation / E. DiBenedetto // Ann. Mat. Pura Appl. — 1979 — 121. — p. 249-262.
11. Varquez J.L. The Porous Medium Equation. Mathematical Theory / J.L. Varquez. — Oxford University Press, 2007. — 625 p.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Ladyzhenskaja O.A. Linejnye i kvazilinejnye uravnenija parabolicheskogo tipa [Linear and Quasi-linear Parabolic Equations] / O.A. Ladyzhenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva. — M., 1967. — 736 p. [in Russian]

2. Tedeev A.F. Sushhestvovanie i edinstvo reshenija differencial'nogo uravnenija drobnoj diffuzii [Existence and Unity of Solution of the Fractional Diffusion Differential Equation] / A.F. Tedeev // Differencial'nye uravnenija i processy upravlenija [Differential Equations and Control Processes]. — 2019. — 4. — p. 74-85. [in Russian]

3. Tedeev A.F. Zadacha Koshi dlja nelinejnogo uravnenija drobnoj diffuzii [The Cauchy Problem for the Nonlinear Fractional Diffusion Equation] / A.F. Tedeev // Vestnik VGU. Serija: Fizika. Matematika [Bulletin of VSU. Series: Physics. Mathematics]. — 2020. — 3. — p. 107-118. [in Russian]

4. Caffarelli L. An extension problem related to the fractional Laplasian / L. Caffarelli, L. Silvestre // Communications in Partial Differential Equations. — 2008. — 8. — p. 1-15.

5. De Pablo A. A fractional porous medium equation / A. de Pablo, F. Quiros, A. Rodrigues et al. // Advances in Mathematics. — 2011 — 226. — p. 1378-1409

6. De Pablo A. A General Fractional Porous Medium Equation / A. de Pablo, F. Quiros, A. Rodrigues et al. // Advances in Mathematics. — 2018. — 8. — p. 1-43

7. Burkholdeer D.L. Distribution function inequalities for the area integral / D.L. Burkholdeer, R.F. Gundy // Studia Mathematica. — 1972. — p. 526-542

8. Cho C.K. The asymptotic behavior of solutions of a porous medium equation with bounded measurable coefficients / C.K. Cho, H.J. Choe // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — 210(1). — p. 241-256.

9. Dahlberg B.E. Non-negative solutions of a porous medium equation / B.E. Dahlberg, C.E. Kenig // Commun. Partial Differ. Equations. — 1984. — 9. — p. 409-437.

10. DiBenedetto E. Regularity results for the porous medium equation / E. DiBenedetto // Ann. Mat. Pura Appl. — 1979 — 121. — p. 249-262.

11. Varquez J.L. The Porous Medium Equation. Mathematical Theory / J.L. Varquez. — Oxford University Press, 2007. — 625 p.