

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ/MATHEMATICAL MODELING, NUMERICAL METHODS AND PROGRAM COMPLEXES

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.159.75>

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПАРАМЕТРОВ УДАРОВОГО ТЕЧЕНИЯ В ГАЗОВЗВЕСИ В КАНАЛЕ С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Научная статья

Тукмаков Д.А.<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> Федеральное исследовательское учреждение «Казанский научный центр Российской академии наук», Казань, Российская Федерация

\* Корреспондирующий автор (tukmakovda[at]imm.knc.ru)

## Аннотация

В статье представлена численная модель распространения ударной волны в канале из однородного газа в газовзвесь — взвесь дисперсных частиц в газе. Данная тематика является актуальной в связи с различными приложениями в технике. Несущая среда моделируется на основе системы уравнений Навье–Стокса. Математическая модель реализует континуальную методику моделирования динамики неоднородных сред — для каждой из компонент смеси решалась полная гидродинамическая система уравнений движения, учитывался обмен импульсом и теплообмен между компонентами смеси. Система уравнений динамики несущей среды и дисперсной фазы включает в себя уравнения непрерывности плотности, уравнения сохранения пространственных составляющих импульса несущей и дисперсной фазы, уравнения сохранения энергии. Уравнения математической модели решались явным конечно-разностным методом.

**Ключевые слова:** механика жидкости и газа, численное моделирование, многофазные среды, газовзвеси, ударные трубы.

## NUMERICAL MODELING OF TEMPERATURE PARAMETERS OF SHOCK WAVE FLOW IN GAS SUSPENSION IN A CHANNEL WITH VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS

Research article

Tukmakov D.<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> Federal Research Center "Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences", Kazan, Russian Federation

\* Corresponding author (tukmakovda[at]imm.knc.ru)

## Abstract

The article presents a numerical model of shock wave propagation in a channel from a homogeneous gas to a gas suspension – a suspension of dispersed particles in a gas. This topic is relevant due to various applications in technology. The carrier medium is modeled based on the Navier-Stokes equations. The mathematical model implements a continuum technique for modeling the dynamics of inhomogeneous media — for each component of the mixture, a complete hydrodynamic system of equations of motion was solved, momentum exchange and heat exchange between the components of the mixture were taken into account. The system of equations for the dynamics of the carrier medium and the dispersed phase includes density continuity equations, equations for conservation of spatial components of the carrier and dispersed phase momentum, and energy conservation equations. The equations of the mathematical model were solved by an explicit finite-difference method. A nonlinear grid function correction scheme was used to suppress numerical oscillations.

**Keywords:** fluid and gas mechanics, numerical modeling, multiphase media, gas suspensions, shock tubes.

## Введение

Так как математические модели процессов механики жидкости и газа являются нелинейными, для решения уравнений применяются численные методы. Среди гидродинамических процессов отдельно выделяют гидродинамические процессы с движением дисперсных сред. В отличие от гидро-газодинамики однородных сред [1], в неоднородной гидродинамике [2], [3], [4] потоки сопровождаются взаимодействием компонент смеси [5], [6]. В публикации [6] разрабатываются трехмерные численные модели течений изотермальной вязкой ньютоновской многофазной. В работе [7] с помощью методов гидродинамики неоднородных сред исследованы процессы взаимодействия ударных волн с газодисперсной взвесью. В статье [8] также исследуется взаимодействие газа и дисперсных частиц. Рассматривались различные распределения концентрации дисперсных. В работе [9] с помощью континуальной методики динамики неоднородных сред исследуются процессы взаимодействия газа и слоя дисперсных частиц. В исследовании [10] рассматривались различные дисперсности частиц газовзвеси при взаимодействии газа и дисперсной завесы. В работе [11] получены математические модели распространения ударных волн в газовзвеси в плане исследования технологических процессов горной промышленности. В статье [12] численно моделируется ударно-волновые течения дисперсных сред.

Анализ работ, посвященных динамике неоднородных сред, демонстрирует, что в связи с проблемами горных и аэрокосмических технологий представляет интерес математическое моделирование ударноволновых течений газовзвесей.

## Методы исследования

Для моделирования динамики газовзвесей на данный момент существует несколько подходов [2]. Преимуществом математических моделей, разработанных в рамках континуальной концепции течений неоднородных сред является то, что такие математические модели могут более точно описывать динамику смесей с близкими массовыми долями компонент смеси, также такие модели позволяют моделировать течения с неоднородным распределением дисперсной фазы. В данной работе рассматривается течение, в котором происходит взаимодействие ударной волны, движущейся из однородного газа, с газовзвесью, дисперсная фаза которой имеет массовую долю близкую по значению с массовой долей несущей среды.

В данной работе моделируются процессы работы ударной трубы, заполненной однородным газом и газовзвесью, рассматриваются температурные поля несущей среды и дисперсной фазы для различных граничных условий скорости компонент смеси при моделировании течения газовзвеси в рамках континуальной модели динамики неоднородных сред. Математическая модель разработана на основе континуального подхода [3]. Моделирование течения газа осуществлялось с двухмерным нестационарным уравнением Навье-Стокса для сжимаемой теплопроводной среды с учетом взаимодействия с дисперсной фазой, математическая модель описана в работе [13]. Решение системы уравнений осуществлялось с помощью метода конечных разностей [13], [14].

Для улучшения численного решения применялась методика [15], [16].

Задавались два типа граничных условий. Для всех параметров несущей среды и дисперсной фазы задавались однородные граничные условия Неймана, для составляющих скорости газа и дисперсной фазы на границах расчетной области задавались либо однородные граничные условия Неймана, либо однородные граничные условия Дирихле. Такой выбор граничных условий связан с тем, что влияние граничных условий скорости на динамику потока может иметь существенное значение [14].

Для того чтобы определить работоспособность компьютерной программы, реализующей численную модель, было проведено сопоставление численных расчетов с физическим экспериментом [13]. На рисунке 1 представлены сопоставления численных и экспериментальных результатов ударно-волновой динамики запыленных сред, изображены зависимости числа Маха фронта ударной волны от начального перепада давления. Сопоставляются данные, полученные в физическом эксперименте, проведенном в работе [17], с численными расчетами, проведенными в работе [13]. Кривые 1 и 2 являются интерполяцией экспериментальных и численных данных сплайном второго порядка [18]. Результаты физического эксперимента хорошо согласуются с результатами расчетов численной модели, что демонстрирует её работоспособность.

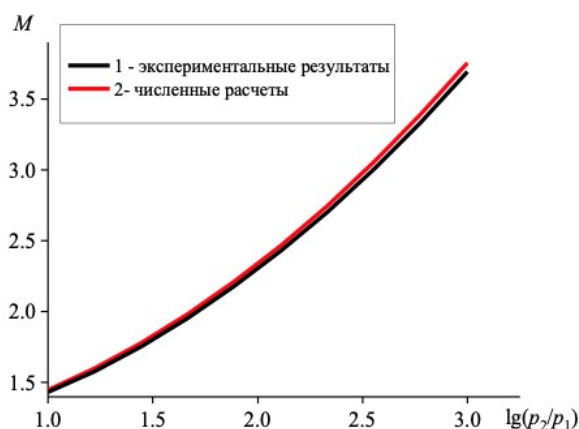


Рисунок 1 - Сопоставление числа Маха фронта ударной волны в газовзвеси

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.159.75.1>

*Примечание: кривая 1 построена обработкой экспериментов в работе [17], кривая 2 – результат численных расчетов*

## Результаты расчетов

В расчетах моделировалось течение в запыленной среде — воздухе с взвешенными твердыми частицами имеющими физическую плотность кварцевого песка. Параметры дисперсной фазы, физическая плотность материала —  $\rho_{10}=2500 \text{ кг/м}^3$ , размер дисперсных включений —  $d=2 \text{ мкм}$ , начальная объемная доля дисперсной фазы  $\alpha_0=0,001$ . Продольная длина канала —  $L=1 \text{ м}$ , размер канала в поперечном направлении —  $h=0,1 \text{ м}$ . Количество узлов в  $x$  направлении —  $N_x=300$ , количество узлов в направлении  $y$  —  $N_y=60$ . Давление газа в камере высокого давления —  $p_2=200 \text{ кПа}$ , давление газа в камере низкого давления —  $p_1=100 \text{ кПа}$  – рисунок 2.

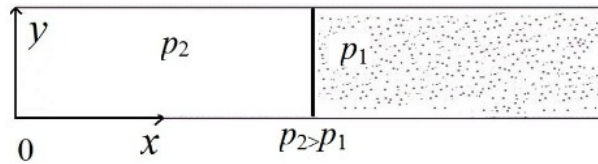


Рисунок 2 - Общая схема ударной трубы с газозвесью  
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.159.75.2>

Начальное распределение средней плотности дисперсной фазы в камере низкого давления:  $\rho_1(x, y) = \alpha_0 \rho_{10}$ ,  $x > L/2$ ; в камере высокого давления —  $\rho_1(x, y) = 0$ ,  $x \leq L/2$ .

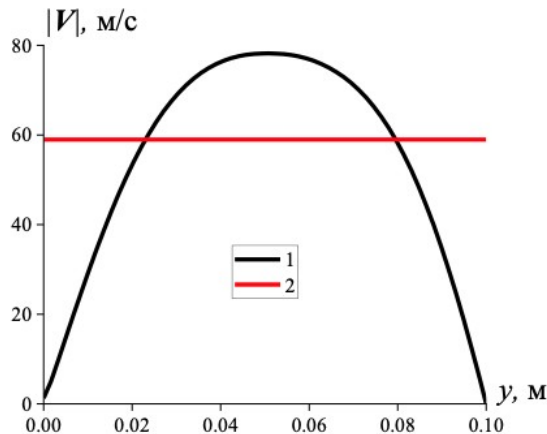


Рисунок 3 - Поперечное распределение модуля скорости газа для граничных условий Дирихле – 1, граничных условий Неймана – 2  
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.159.75.3>

Если при моделировании течения для составляющих скорости задаются однородные граничные условия Дирихле, то формируется «параболический» профиль скорости течения вязкой среды в канале [1] — рисунок 3.

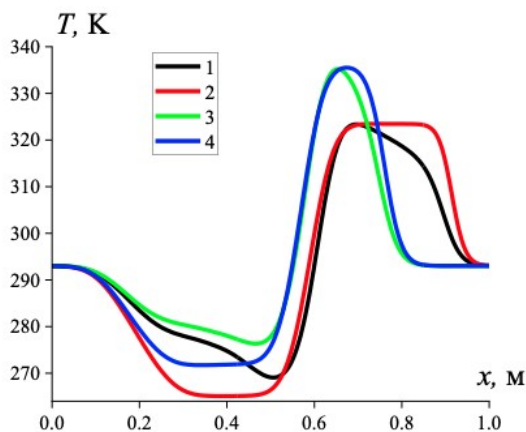


Рисунок 4 - Распределение температуры газа и несущей среды для различных граничных условий в трубе  
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.159.75.4>

Примечание: 1 – граничные условия Дирихле, однородный газ; 2 – граничные условия Неймана, однородный газ; 3 – граничные условия Дирихле, несущая среда газозвесью; 4 – граничные условия Неймана, несущая среда газозвесью

В расчетах динамики газозвесью с помощью континуальной модели наблюдается большая температура газа и меньшая скорость распространения ударной волны, чем в однородном газе — рисунок 4.

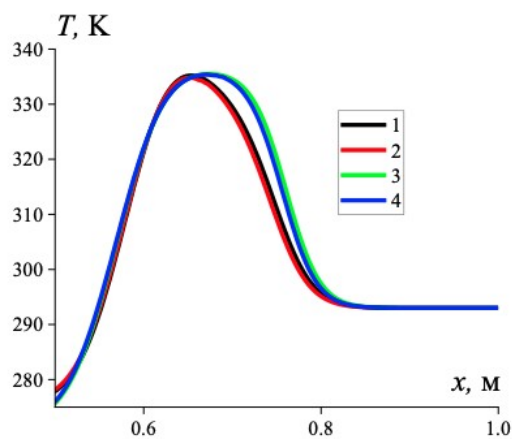


Рисунок 5 - Распределение температуры несущей среды газозвеси и дисперсной фазы для различных граничных условий в трубе

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.159.75.5>

Примечание: граничные условия Дирихле: 1 – несущая среда; 2 – дисперсная фаза, однородный газ; граничные условия Неймана: 3 – несущая среда; 4 – дисперсная фаза

При расчетах с двумя типами граничных условий, величина температуры твердой фазы газозвеси состоящий из мелкодисперсных частиц с размером дисперсных включений  $d=2$  мкм, согласуется с распределением температуры газа — рисунок 5.

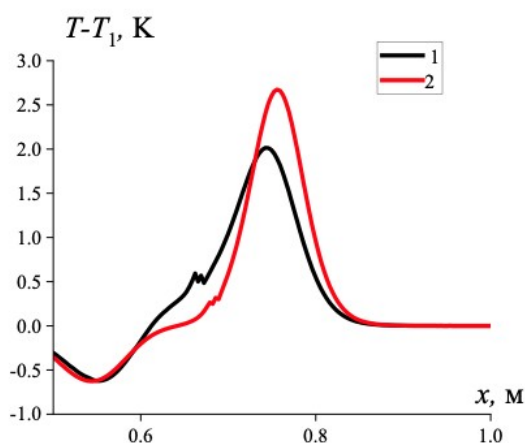


Рисунок 6 - Распределение разности температур несущей среды и дисперсной фазы

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.159.75.6>

Примечание: 1 – граничные условия Дирихле; 2 – граничные условия Неймана

При задании граничных условий Неймана скорость распространения возмущения выше, разность температур несущей и дисперсной фазы отличается в большей степени, чем при граничных условий Дирихле — рисунок 6.

При моделировании распространения ударной волны с граничными условиями Неймана в однородном газе наблюдается большая скорость распространения ударной волны, чем при моделировании течения с граничными условиями Дирихле.

### Заключение

В статье рассмотрены ударноволновые течения однородного газа и газозвеси в канале. Математическая модель течения однородного газа и газозвеси учитывала вязкость газа. При этом математическая модель позволяла учесть воздействие дисперсной фазы на течение газа. Целью работы было определить влияние выбора граничных условий на процесс моделирования работы ударно-волновой трубы. Выявлено, что для однородных граничных условий Дирихле, которые в большей степени соответствуют процессу движения ударной волны в канале, наблюдается меньшая

скорость распространения ударной волны, а также меньшая величина параметров «температурного скольжения» фаз неоднородной среды. Результаты могут быть применены при моделировании ударноволновых течений газовзвесей в каналах и трубах.

### Финансирование

Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

### Конфликт интересов

Не указан.

### Рецензия

Деменченко О.Г., Восточно-Сибирский институт МВД России, Иркутск Российская Федерация  
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.159.75.7>

### Funding

The work was carried out within the framework of the state assignment of the Federal Research Center of the Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

### Conflict of Interest

None declared.

### Review

Demenchenok O.G., East-Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of the Russian Federation, Irkutsk Russian Federation  
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.159.75.7>

### Список литературы / References

1. Лоицянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лоицянский. — Москва : Дрофа, 2003. — 840 с.
2. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. — Москва : Наука, 1978. — 336 с.
3. Киселев С.П. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах / С.П. Киселев, Г.А. Руев, А.П. Трунев [и др.]. — Новосибирск : Наука, 1992. — 261 с.
4. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / А.Г. Кутушев. — Санкт-Петербург : Недра, 2003. — 284 с.
5. Федоров А.В. Волновые процессы в газовзвешах частиц металлов / А.В. Федоров, В.М. Фомин, Т.А. Хмель. — Новосибирск : Параллель, 2015. — 305 с.
6. Короткий А.И. Численное моделирование лавовых потоков в моделях изотермальной вязкой многофазной несжимаемой жидкости / А.И. Короткий, И.А. Цепелев // Международный научно-исследовательский журнал. — 2021. — № 12–1 (114). — С. 12–18. — DOI: 10.23670/IRJ.2021.114.12.001.
7. Тропин Д.А. Физико-математическое моделирование ослабления гомогенных и гетерогенных детонационных волн облаками капель воды / Д.А. Тропин, С.А. Лаврук // Физика горения и взрыва. — 2022. — Т. 58. — № 3. — С. 80–90. — DOI: 10.15372/FGV20220308.
8. Назаров У.А. Прерывание распространения детонационных волн в газовзвешах унитарного топлива слоем неоднородных инертных частиц / У.А. Назаров // Физика горения и взрыва. — 2021. — Т. 57. — № 6. — С. 65–76. — DOI: 10.15372/FGV20210608.
9. Волков К.Н. Моделирование нестационарного течения газовзвеси, возникающего при взаимодействии ударной волны со слоем частиц / К.Н. Волков, В.Н. Емельянов, А.Г. Карпенко [и др.] // Вычислительные методы и программирование. — 2020. — Т. 21. — № 1. — С. 96–114. — DOI: 10.26089/NumMet.v21r109.
10. Садин Д.В. Приложение гибридного метода крупных частиц к расчету взаимодействия ударной волны со слоем газовзвеси / Д.В. Садин // Компьютерные исследования и моделирование. — 2020. — Т. 12. — № 6. — С. 1323–1338. — DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1323-1338.
11. Мазепа Е.Е. О численном решении задачи распространения воздушных ударных волн в горных выработках шахты / Е.Е. Мазепа, П.И. Кусаинов, О.Ю. Лукашов [и др.] // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2018. — № 64. — С. 108–120. — DOI: 10.17223/19988621/64/8.
12. Порошина Я.Э. Характеристический анализ динамики распространения ударной волны в среде с неравномерным распределением плотности / Я.Э. Порошина, А.И. Лопато, П.С. Уткин // Химическая физика. — 2022. — Т. 41. — № 8. — С. 48–58. — DOI: 10.31857/S0207401X22080106.
13. Нигматулин Р.И. Ударно-волновой разлет газовзвесей / Р.И. Нигматулин, Д.А. Губайдуллин, Д.А. Тукмаков // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 466. — № 4. — С. 418–421. — DOI: 10.7868/S0869565216040101.
14. Fletcher C. Computation Techniques for Fluid Dynamics / C. Fletcher. — Berlin : Springer-Verlag, 1988. — 898 p.
15. Музафаров И.Ф. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа / И.Ф. Музафаров, С.В. Утюжников // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5. — № 3. — С. 74–83.
16. Тукмаков А.Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе / А.Л. Тукмаков // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. — 2006. — № 4. — С. 33–36.
17. Гельфанд Б.Е. Ударные волны при разлете сжатого объема газовзвеси твердых частиц / Б.Е. Гельфанд, А.В. Губанов, Е.И. Медведев [и др.] // Доклады академии наук СССР. — 1985. — Т. 281. — № 5. — С. 1113–1116.
18. Вержбицкий В.М. Численные методы / В.М. Вержбицкий. — Москва : Высшая школа, 2001. — 382 с.

### Список литературы на английском языке / References in English

1. Loitsyansky L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of liquid and gas] / L.G. Loitsyansky. — Moscow : Drofa, 2003. — 840 p. [in Russian]

2. Nigmatulin R.I. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred [Fundamentals of mechanics of heterogeneous media] / R.I. Nigmatulin. — Moscow : Nauka, 1978. — 336 p. [in Russian]
3. Kiselev S.P. Udarno-volnovye protsessy v dvukhkomponentnykh i dvukhfaznykh sredakh [Shock-wave processes in two-component and two-phase media] / S.P. Kiselev, G.A. Ruev, A.P. Trunev [et al.]. — Novosibirsk : Nauka, 1992. — 261 p. [in Russian]
4. Kutyshev A.G. Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media] / A.G. Kutyshev. — Saint Petersburg : Nedra, 2003. — 284 p. [in Russian]
5. Fedorov A.V. Volnovye protsessy v gazovzvesyakh chastits metallov [Wave processes in gas suspensions of metal particles] / A.V. Fedorov, V.M. Fomin, T.A. Khmel. — Novosibirsk : Parallel, 2015. — 305 p. [in Russian]
6. Korotkiy A.I. Chislennoe modelirovanie lavovykh potokov v modelyakh izotermalnoi vyazkoi mnogofaznoi neszimaemoi zhidkosti [Numerical simulation of lava flows in models of isothermal viscous multiphase incompressible fluid] / A.I. Korotkiy, I.A. Tsepelev // Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal [International Research Journal]. — 2021. — № 12–1 (114). — P. 12–18. — DOI: 10.23670/IRJ.2021.114.12.001. [in Russian]
7. Tropin D.A. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie oslableniya gomogennykh i geterogennykh detonatsionnykh voln oblakami kapel vody [Physicomathematical modeling of attenuation of homogeneous and heterogeneous detonation waves by clouds of water droplets] / D.A. Tropin, S.A. Lavruk // Fizika goreniya i vzryva [Combustion, Explosion, and Shock Waves]. — 2022. — Vol. 58. — № 3. — P. 80–90. — DOI: 10.15372/FGV20220308. [in Russian]
8. Nazarov U.A. Preryvanie rasprostraneniya detonatsionnykh voln v gazovzvesyakh unitarnogo topliva sloem neodnorodnykh inertnykh chastits [Interruption of detonation wave propagation in monofuel-air mixtures by a layer of inhomogeneous inert particles] / U.A. Nazarov // Fizika goreniya i vzryva [Combustion, Explosion, and Shock Waves]. — 2021. — Vol. 57. — № 6. — P. 65–76. — DOI: 10.15372/FGV20210608. [in Russian]
9. Volkov K.N. Modelirovanie nestatsionarnogo techeniya gazovzvesi, vznikayushchego pri vzaimodeistvii udarnoi volny so sloem chastits [Simulation of unsteady gas-particle flow induced by the shock-wave interaction with a particle layer] / K.N. Volkov, V.N. Emelyanov, A.G. Karpenko [et al.] // Vychislitelnye metody i programmirovaniye [Numerical Methods and Programming]. — 2020. — Vol. 21. — № 1. — P. 96–114. — DOI: 10.26089/NumMet.v21r109. [in Russian]
10. Sadin D.V. Prilozhenie gibridnogo metoda krupnykh chastits k raschetu vzaimodeistviya udarnoi volny so sloem gazovzvesi [Application of a hybrid large-particle method to the computation of the interaction of a shock wave with a gas suspension layer] / D.V. Sadin // Kompiuternye issledovaniya i modelirovanie [Computer research and modeling]. — 2020. — Vol. 12. — № 6. — P. 1323–1338. — DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1323-1338. [in Russian]
11. Mazepa E.E. O chislennom reshenii zadachi rasprostraneniya vozdukhnykh udarnykh voln v gornykh vyrabotkakh shakhty [On the numerical solution to the problem of air shock wave propagation in mine workings] / E.E. Mazepa, P.I. Kusainov, O.Yu. Lukashov [et al.] // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics]. — 2018. — № 64. — P. 108–120. — DOI: 10.17223/19988621/64/8. [in Russian]
12. Poroshyna Y.E. Kharakteristicheskii analiz dinamiki rasprostraneniya udarnoi volny v srede s neravnomernym raspredeleniem plotnosti [Characteristic analysis of the dynamics of shock wave propagation in a medium with a nonuniform density distribution] / Y.E. Poroshyna, A.I. Lopato, P.S. Utkin // Khimicheskaya fizika [Russian Journal of Physical Chemistry B]. — 2022. — Vol. 41. — № 8. — P. 48–58. — DOI: 10.31857/S0207401X22080106. [in Russian]
13. Nigmatulin R.I. Udarno-volnovoi razlet gazovzvesei [Shock Wave Dispersion of Gas-Particle Mixtures] / R.I. Nigmatulin, D.A. Gubaidullin, D.A. Tukmakov // Doklady akademii nauk [Doklady Physics]. — 2016. — Vol. 466. — № 4. — P. 418–421. — DOI: 10.7868/S0869565216040101. [in Russian]
14. Fletcher C. Computation Techniques for Fluid Dynamics / C. Fletcher. — Berlin : Springer-Verlag, 1988. — 898 p.
15. Muzafarov I.F. Primenenie kompaktnykh raznostnykh skhem k issledovaniyu nestatsionarnykh techenii szhimaemogo gaza [Application of compact difference schemes to investigation of unstationary gas flows] / I.F. Muzafarov, S.V. Utyuzhnikov // Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical modeling]. — 1993. — Vol. 5. — № 3. — P. 74–83. [in Russian]
16. Tukmakov A.L. Chislennoe modelirovanie akusticheskikh techenii pri rezonansnykh kolebaniyakh gaza v zakrytoi trube [Numerical simulation of acoustic flows at resonance gas oscillations in a closed tube] / A.L. Tukmakov // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsionnaya tekhnika [News of higher educational institutions. Aviation technology]. — 2006. — № 4. — P. 33–36. [in Russian]
17. Gelfand B.E. Udarne volny pri razlete szhatogo obema gazovzvesi tverdykh chastits [Shock waves during the expansion of a compressed volume of a gas suspension of solid particles] / B.E. Gelfand, A.V. Gubanov, E.I. Medvedev [et al.] // Doklady akademii nauk SSSR [DAN USSR]. — 1985. — Vol. 281. — № 5. — P. 1113–1116. [in Russian]
18. Verzhbitsky V.M. Chislennyye metody [Numerical methods] / V.M. Verzhbitsky. — Moscow : Higher School, 2001. — 382 p. [in Russian]