

## ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ/CONDENSED MATTER PHYSICS

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.73>

### СКЕЙЛИНГОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ОДНОМЕРНЫХ ИЗИНГОВСКИХ СИСТЕМАХ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

Научная статья

Шабунина Е.В.<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> ORCID : 0000-0003-1647-7084;

<sup>1</sup> Российский университет транспорта, Москва, Российская Федерация

\* Корреспондирующий автор (galichinaev[at]mail.ru)

#### Аннотация

В работе исследуются скейлинговые соотношения в одномерных изинговских системах конечного размера, описываемых модифицированной моделью Изинга с учетом взаимодействий во второй и третьей координационных сферах. В таких системах фазовые переходы, реализуются только при нулевой температуре, однако их влияние проявляется и в области конечных температур. Проведена симуляция релаксационных процессов при переходе между магнитными фазами с использованием алгоритма Метрополиса метода Монте-Карло. По полученным данным выполнен анализ критических явлений с использованием скейлинговой теории, включая проверку гипотезы масштабной инвариантности и динамического скейлинга. Установлено, что для систем конечного размера наблюдаются отклонения от классических скейлинговых соотношений, обусловленные влиянием граничных эффектов. Тем не менее, качественное поведение критических индексов указывает на сохранение некоторых черт, характерных для критических явлений.

**Ключевые слова:** одномерная модель Изинга, скейлинговая теория, критические явления, динамический скейлинг, масштабная инвариантность.

### SCALING RELATIONS IN ONE-DIMENSIONAL ISING SYSTEMS OF FINITE SIZE

Research article

Shabunina E.V.\*

<sup>1</sup> ORCID : 0000-0003-1647-7084;

<sup>1</sup> Russian University of transport, Moscow, Russian Federation

\* Corresponding author (galichinaev[at]mail.ru)

#### Abstract

In this work, the scaling relations in one-dimensional Ising systems of finite size, described by a modified Ising model taking into account interactions in the second and third coordination spheres, are studied. In such systems, phase transitions are implemented only at zero temperature, but their influence is also manifested in the region of finite temperatures. Simulation of relaxation processes at the transition between magnetic phases using the Metropolis algorithm of the Monte Carlo method has been carried out. On the basis of the obtained data, critical phenomena are analysed using the scaling theory, including the verification of the hypothesis of scale invariance and dynamical scaling. It is found that for systems of finite size, deviations from classical scaling relations due to the influence of boundary effects are observed. Nevertheless, the qualitative behaviour of the critical indices indicates the preservation of some features characteristic of critical phenomena.

**Keywords:** one-dimensional Ising model, scaling theory, critical phenomena, dynamic scaling, scale invariance.

#### Введение

Одномерные ферро- и антиферромагнитные системы, описываемые моделью Изинга, представляют собой важный класс моделей в физике конденсированного состояния. Эти системы демонстрируют уникальные свойства, не присущие макротелам, например, наличие квантовых фазовых переходов при нулевой температуре. Изучение критических явлений и определение критических индексов таких систем, сложная экспериментальная задача ввиду малости размеров и низких температур. Теоретически, фазовые переходы (включая квантовые фазовые переходы) в одномерной модели Изинга реализуются только при нулевой температуре и в бесконечной системе. Однако их влияние на физические свойства вещества проявляется и в области конечных температур [1]. Для систем конечного размера при варьировании параметров наблюдаются изменения, которые можно интерпретировать как размытые или «смазанные» фазовые переходы, обусловленные конечностью системы и влиянием граничных эффектов.

#### Методы и принципы исследования

Базовая модель Изинга, дополненная учетом взаимодействия во второй и третьей координационной сфере, хорошо согласуется с экспериментальными данными и позволяет упростить процесс изучения низкоразмерных магнетиков [2]. Модифицированный гамильтониан имеет вид:

$$E = -J_1 \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1} - J_2 \sum_{i=1}^{N-2} S_i S_{i+2} - J_3 \sum_{i=1}^{N-3} S_i S_{i+3} - J_{1-4} \sum_{i=1}^{N-3} S_i S_{i+1} S_{i+2} S_{i+3} - H \sum_{i=1}^N S_i$$

где  $J_1, J_2, J_3$  — энергия обменного взаимодействия спинов в первой, во второй и третьей координационных сферах соответственно,  $J_{1-4}$  — энергия четырехчастичного взаимодействия,  $H$  — напряженность внешнего магнитного поля,  $S_i$

— проекция вектора спина на выбранную ось,  $N$  — количество атомов в системе,  $i$  — номер узла. В исследовании используется относительная температура  $T$  — единицы измерения  $J_1/k_B$ .

Была проведена симуляция релаксационных процессов при переходе между магнитными фазами с использованием алгоритма Метрополиса метода Монте-Карло. Для различных параметров системы были получены значения энергии, времени релаксации, корреляционной длины, что позволило рассчитать критические индексы низкоразмерного магнетика.

### Основные результаты

Вблизи нулевой температуры система проявляет критические свойства, которые могут быть описаны с использованием скейлинговой теории [3], [4]. В этой теории вещества вблизи точки фазового перехода рассматривается как система флюктуирующих областей с характерным размером  $\sim \xi$ . Где  $\xi$  — корреляционная длина, характеризующая расстояние, на котором спины коррелируют друг с другом [5]. Гипотеза масштабной инвариантности позволяет вывести универсальные соотношения между критическими показателями, причем только два из них являются независимыми, так называемый двухпараметрический скейлинг [6]. Наиболее популярной является линейная модель уравнения состояния, которая включает лишь две не универсальные константы помимо критических параметров вещества. На аналогичных принципах основана теория, связывающая критические индексы кинетических свойств с индексами термодинамических величин — динамический скейлинг. Он отличается от статического скейлинга, который ограничивается исключительно термодинамическими (равновесными) свойствами материи [7]. Одно из соотношений динамического скейлинга, которое было проверено в данном исследовании, имеет следующий вид [8]:

$$Y = zv$$

где  $Y$  — кинетический критический индекс, характеризующий зависимость времени релаксации перехода антиферромагнетик-ферромагнетик от температуры,  $z$  — динамический критический индекс, характеризующий зависимость времени релаксации от размеров системы,  $v$  — статический критический индекс, который характеризует зависимость корреляционной длины от температуры вблизи критической точки.

Для проверки была выбрана температурная зависимость системы из 11 узлов при нулевом внешнем магнитном поле и взаимодействии, ограниченном второй координационной сферой (рис. 1.а). В одной области были построены две функции:  $Y(T)$  и  $z \cdot v(T)$ .

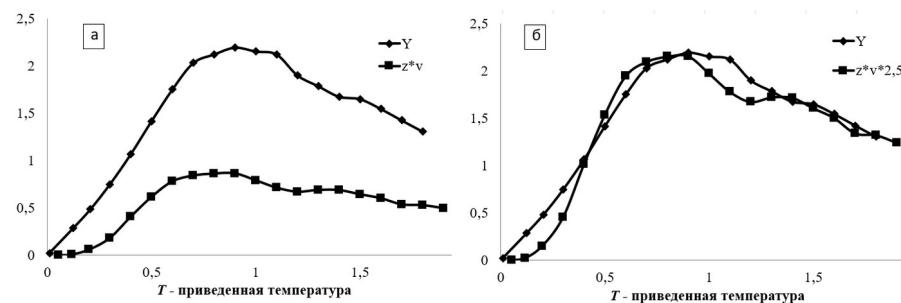


Рисунок 1 - Температурная зависимость индексов  $Y$  и  $z \cdot v$

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.73.1>

Примечание:  $H=0$ ;  $J_2=0,1$ ;  $N=11$ ;  $\varepsilon_Y \sim 16\%$ ,  $\varepsilon_{zv} \sim 18\%$

Гипотеза динамического скейлинга предполагает, что эти функции должны совпадать в критической области. Однако в данном случае наблюдается значительное расхождение между этими функциями (примерно в 2,5 раза — рис 1.б), что выходит за рамки ожидаемого отклонения в 20% (ненулевая температура, конечные размеры). Это указывает на то, что гипотеза динамического скейлинга не выполняется для данной системы в рассматриваемых условиях. Несмотря на количественное расхождение, качественное поведение функций  $Y(T)$  и  $z \cdot v(T)$  схоже. Это может свидетельствовать о том, что система демонстрирует некоторые черты, характерные для динамического скейлинга, но с существенными отклонениями, вызванными конечным размером системы или особенностями взаимодействия.

Таким образом, можно заключить, что гипотеза динамического скейлинга неприменима к малым низкоразмерным магнитным системам. Конечный размер системы может вызывать дополнительные эффекты, такие как граничные условия и дискретность спектра, которые нарушают скейлинговые соотношения. Поведение времени релаксации и критических индексов также указывает на особенности свойств таких систем, которые совпадают с теоретическими представлениями (в основном сформулированными для макротел) лишь в отдельных случаях. Однако система сохраняет черты, характерные для критических явлений.

Неравенство [9]

$$\frac{T_c \chi}{\xi^3} \ll \frac{\alpha |t|}{b} ,$$

лежащее в основе применимости теории Ландау, может быть переформулировано как условие  $\xi >> r_0$ , где  $r_0$  представляет собой размер области тела, в которой среднеквадратичная флуктуация параметра порядка сравнивается с его характерным равновесным значением. При уменьшении параметра  $t$  величина  $r_0$  возрастает быстрее, чем корреляционная длина  $\xi$ , и на границе области применимости теории Ландау эти величины становятся сравнимыми. Ключевое предположение, лежащее в основе описания флуктуационной области, заключается в отсутствии какого-либо малого параметра в теории. В частности, выполняется условие  $r_0 \sim \xi$ , что делает корреляционную длину  $\xi$  единственным характерным масштабом, определяющим флуктуации. Данное предположение известно как гипотеза масштабной инвариантности [10].

Для оценки флуктуаций в объеме  $V \sim \xi^3$  можно воспользоваться формулой:

$$\frac{T_c \chi}{V} \propto \eta^2 .$$

Подставив объем  $V \sim \xi^3$  и выразив все величины  $\chi$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  через параметр времени согласно определениям критических индексов, получим:

$$\frac{T_c t^{-\gamma}}{t^{-\nu d}} = B t^{2\beta} .$$

Прологарифмируем уравнение по основанию  $e$  и разделим на  $\ln t$ :

$$\frac{\ln T_c}{\ln t} - \gamma \frac{\ln t}{\ln t} + \nu d \frac{\ln t}{\ln t} = \frac{\ln B}{\ln t} + 2\beta \frac{\ln t}{\ln t} .$$

По мере приближения к точке фазового перехода ( $t \rightarrow 0$ ):

$$\ln t \rightarrow -\infty, \text{ а } \frac{\ln T_c}{\ln t} \text{ и } \frac{\ln B}{\ln t} \rightarrow 0 .$$

Тогда

$$\nu d - \gamma = 2\beta$$

которое с учетом равенства (J.W. Essam, M.E. Fisher) [9]

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 ,$$

преобразуется в

$$\nu d = 2 - \alpha .$$

Проверим данное соотношение для одномерной модели Изинга ( $d=1$ ). Для проверки выбрана температурная зависимость системы из 10 узлов при нулевом внешнем магнитном поле и взаимодействии ограниченном только первой координационной сферой (рис. 2). В одной области было построено две функции:  $v(T)$  и  $2-\alpha(T)$ .

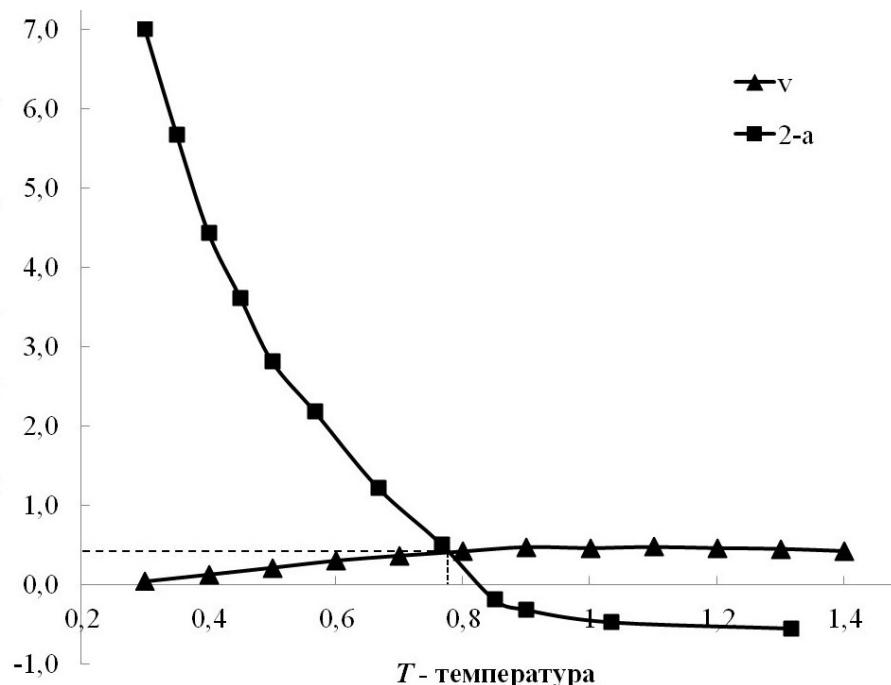


Рисунок 2 - Температурная зависимость индексов  $v$  и  $2-\alpha$

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.73.2>

Примечание:  $H=J_2=J_3=0$ ;  $N=11$ ;  $\varepsilon_\alpha \sim 13\%$ ,  $\varepsilon_v \sim 8\%$

Пересечение кривых для данных наблюдается только в одной точке ( $T=0,78$ ). Нарушение равенства  $v \cdot d = 2 - \alpha$  наблюдается как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения температуры, что не противоречит теоретическим представлениям [11]. При учете энергии взаимодействия  $J_2$  и  $J_3$  точка пересечения кривых смещается вправо, и для  $J_2=J_3=0,5$  в области исследуемых температур пересечения уже не наблюдается.

## Заключение

Можно сделать вывод, что гипотеза скейлинга строго применима только вблизи критической точки, где флуктуации становятся масштабно-инвариантными. Вне этой области влияние конечного размера системы и других факторов приводит к отклонениям от скейлинговых соотношений.

Динамический скейлинг является важным инструментом для описания временных корреляций и релаксационных процессов в одномерных магнитных системах. Исследования динамического скейлинга продолжают углублять наше понимание магнитоупорядоченности и критических явлений в низкоразмерных системах.

## Конфликт интересов

Не указан.

## Рецензия

Эминов Б.Ф., Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань Российская Федерация  
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.73.3>

## Conflict of Interest

None declared.

## Review

Eminov B.F., Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan Russian Federation  
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.73.3>

## Список литературы / References

1. Горшунов Б.П. Терагерцевая спектроскопия квантовых фазовых переходов и температурно-частотный скейлинг. / Б.П. Горшунов, А.В. Пронин, А.С. Прохоров // Физика твердого тела. — 2011. — Т. 53, № 4. — С. 774–777.
2. Шабунина Е.В. Особенности поведения теплоемкости в одномерных магнетиках, описываемых моделью Изинга. / Е.В. Шабунина, Д.В. Спирин, В.Н. Удодов // Известия Алтайского государственного университета. — 2013. — №. 1-1 (77). — С. 184–188.
3. Goldenfeld N. Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group / N. Goldenfeld. — Boca Raton: CRC Press, 2018. — 394 p.
4. Sachdev S. Quantum Phase Transitions / S. Sachdev. — Cambridge: Cambridge University Press, 2011. — 501 p.
5. Herbut I. Modern Approach to Critical Phenomena / I. Herbut. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — 352 p.
6. Кузнецов С.П. Гибрид удвоений периода и касательной бифуркации: количественная универсальность и двухпараметрический скейлинг. / С.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1995. — №4. — С. 3–11.
7. Täuber U.C. Critical Dynamics: A Field Theory Approach to Equilibrium and Non-Equilibrium Scaling Behavior / U.C. Täuber. — Cambridge: Cambridge University Press, 2014. — 631 p.
8. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Учебное пособие Физическая кинетика: в 10 т.; / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2021. — Т. 10. — 536 с.
9. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Учебное пособие Статистическая физика: в 10 т.; / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2020. — Т. 5. — 616 с.
10. Pelissetto A. Critical phenomena and renormalization-group theory. / A. Pelissetto, E. Vicari // Physics Reports. — 2002. — Vol. 368, No. 6. — P. 549–727. — DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00219-3
11. Udodov V.N. Heat capacity and new classification of phase transitions of fractional order: Ising model. / V.N. Udodov // Bulletin of the American Physical Society. — 2013. — Vol. 58, No. 1. — P. C17.00003. — URL: <https://meetings.aps.org/Meeting/MAR13/Session/C17.3> (accessed: 13.03.25).

## Список литературы на английском языке / References in English

1. Gorshunov B.P. Teragercevaya spektroskopiya kvantovy'x fazovy'x perexodov i temperaturno-chastotnyj skejling [Terahertz spectroscopy of quantum phase transitions and temperature-frequency scaling]. / B.P. Gorshunov, A.V. Pronin, A.S. Proxorov // Physics of the Solid State. — 2011. — Т. 53, № 4. — P. 774–777. [in Russian]
2. Shabunina E.V. Osobennosti povedeniya teploemkosti v odnomerny'x magnetikax, opisy'vaemy'x model'yu Izinga [Features of heat capacity behavior in one-dimensional magnets described by the Ising model]. / E.V. Shabunina, D.V. Spirin, V.N. Uododov // Bulletin of Altai State University. — 2013. — №. 1-1 (77). — P. 184–188. [in Russian]
3. Goldenfeld N. Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group / N. Goldenfeld. — Boca Raton: CRC Press, 2018. — 394 p.
4. Sachdev S. Quantum Phase Transitions / S. Sachdev. — Cambridge: Cambridge University Press, 2011. — 501 p.
5. Herbut I. Modern Approach to Critical Phenomena / I. Herbut. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — 352 p.
6. Kuznecov S.P. Gibrid udvoenij perioda i kasatel'noj bifurkacii: kolichestvennaya universal'nost' i dvuxparametricheskij skejling [Hybrid of period-doubling and tangent bifurcations: Quantitative universality and two-parameter scaling]. / S.P. Kuznecov, I.R. Sataev // Proceedings of Universities. Applied Nonlinear Dynamics. — 1995. — №4. — P. 3–11. [in Russian]
7. Täuber U.C. Critical Dynamics: A Field Theory Approach to Equilibrium and Non-Equilibrium Scaling Behavior / U.C. Täuber. — Cambridge: Cambridge University Press, 2014. — 631 p.
8. Landau L.D. Teoreticheskaya fizika: Uchebnoe posobie [Theoretical Physics: Textbook] Physical Kinetics: in 10 vol.; / L.D. Landau, E.M. Lifshic. — Moscow: FIZMATLIT, 2021. — Vol. 10. — 536 p. [in Russian]

9. Landau L.D. Teoreticheskaya fizika: Uchebnoe posobie [Theoretical Physics: Textbook] Statistical Physics: in 10 vol.; / L.D. Landau, E.M. Lifshic. — Moscow: FIZMATLIT, 2020. — Vol. 5. — 616 p. [in Russian]
10. Pelissetto A. Critical phenomena and renormalization-group theory. / A. Pelissetto, E. Vicari // Physics Reports. — 2002. — Vol. 368, No. 6. — P. 549–727. — DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00219-3
11. Uvodov V.N. Heat capacity and new classification of phase transitions of fractional order: Ising model. / V.N. Uvodov // Bulletin of the American Physical Society. — 2013. — Vol. 58, No. 1. — P. C17.00003. — URL: <https://meetings.aps.org/Meeting/MAR13/Session/C17.3> (accessed: 13.03.25).