ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА/DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.155.48

К ТЕОРИИ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ У СИСТЕМ ДИФФЕРНЕЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Научная статья

Зайцев М.Л.[1, *]
[1] ORCID : 0000-0001-8162-2829;
[1] Индивидуальный предприниматель, Москва, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (mlzaytsev[at]mail.ru)

Аннотация

В данной статье рассматриваются интегралы у систем уравнений в частных производных. Предлагается новый способ нахождения интегралов у произвольных систем УрЧП. Показывается, что, если они существуют, то их внешний вид определяется в конечном итоге из решений параметрических обыкновенных дифференциальных уравнений. А также они могут быть найдены в аналитическом виде из решения переопределённых систем дифференциальных уравнений. Через задачу Коши вводятся дополнительные параметры, и из определения интеграла сразу необходимо следуют уравнения, задающие внешний вид этого интеграла. Интегралы могут быль применены для понижения порядка у систем УрЧП, а также для контроля расчетов у различных практически значимых систем уравнений, например, уравнений Гамильтона-Якоби. Они используются в различных методах нахождения решений у дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: переопределенные системы дифференциальных уравнений, системы УрЧП произвольного порядка, интегралы у систем УрЧП, задача Коши.

TO THE THEORY OF FINDING INTEGRALS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Research article

Zaytsev M.L.[1, *]
[1] ORCID : 0000-0001-8162-2829;
[1] Individual Entrepreneur, Moscow, Russian Federation

* Corresponding author (mlzaytsev[at]mail.ru)

Abstract

This article examines the integrals of systems of partial derivative equations. A new method of finding integrals of random systems of partial differential equations is suggested. It is shown that, if they exist, their appearance is finally determined from solutions of parametric ordinary differential equations. And also they can be found analytically from the solution of overdetermined systems of differential equations. Through the Cauchy problem, additional parameters are introduced, and from the definition of the integral, the equations defining the appearance of this integral immediately follow. Integrals can be used to reduce the order of the systems of differential equations, as well as to control the calculations of various practically relevant systems of equations, such as the Hamilton-Jacobi equations. They are used in various methods of finding solutions to differential equations.

Keywords: overdetermined systems of differential equations, PD equation systems of random order, integrals of PD equation systems, Cauchy problem.

Введение

В теории дифференциальных уравнений широко используется понятие интеграла системы дифференциальных уравнений [1], [2], [3], [4]. Интегралы играют важную роль в физике. Например, законы сохранения энергии и импульса в механике определяются с помощью интегралов у систем динамических уравнений. В гидродинамике встречается уравнение Бернулли, являющееся интегралом у системы уравнений Эйлера в переменных Лагранжа [5].

Первый интеграл обыкновенного дифференциального уравнения определяется как отличная от постоянной непрерывно дифференцируемая функция, производная которой вдоль решений данного уравнения тождественно равна нулю [6]. Знание первого интеграла нормальной системы:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \tau) \tag{1}$$

где:

$\tau \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots x_N) \in \mathbb{R}^N_x, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \tau) = (G_1(\boldsymbol{x}, \tau), \ldots G_N(\boldsymbol{x}, \tau))$ — достаточно гладкие функции от своих переменных, позволяет понизить порядок этой системы на единицу, а отыскание N функционально независимых первых интегралов равносильно отысканию общего решения в неявном виде. Иногда вводят понятие общего интеграла системы (1) в некоторой области как совокупность соотношений N

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}, \tau) = C_i, \quad i = 1, ..N \tag{2}$$

содержащая N параметров $(C_1, \ldots C_N) \in \mathbb{R}^N$ и в неявном виде описывающая семейство функций, составляющих общее решение этой системы в этой области.

В данной статье мы рассматриваем интегралы у систем уравнений в частных производных. Мы обобщаем определение (2) на этот случай. А именно, мы определяем интегралы как дифференциальные выражения, состоящие из неизвестных функций и их производных, которые сохраняются на некоторых решениях у исходной системы УрЧП. В статье показывается, что, если они существуют, то их вид определяется, в конечном итоге, из решений переопределенной параметрической системы ОДУ. Решение этой системы ОДУ может быть найдено в аналитическом виде с помощью метода редукции переопределенных систем дифференциальных уравнений [7], [8], [9]. Остается только проверкой выделить из этого решения нужный интеграл.

Эти интегралы могут быть использованы как дополнительные уравнения в методе дифференциальных связей для поиска частных решений у исходной системы УрЧП [10], а также в других методах получения решений дифференциальных уравнений, например, в теории групп. Также они могут быль применены для понижения порядка у систем УрЧП.

Если эти новые интегралы будут иметь физический смысл в прикладных задачах, где исследуются системы УрЧП, то они могут описывать какие-то новые закономерности, важные для понимания физических процессов.

Целью данной работы является исследование вопроса о нахождении интегралов у достаточно произвольных систем дифференциальных уравнений и расширить понимание этой проблемы, применив новые идеи. Предлагается применение этого метода к нахождению новых физических закономерностей. Также целью является такая постановка этой задачи, чтобы идеи автора о методах решений переопределенных систем дифференциальных уравнений [7], [8], [9] нашли в ней применение. Чтобы данная задача стала объектом исследования и других ранее хорошо разработанных методов решения систем УрЧП.

Основная идея метода

Рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v = S_v(\boldsymbol{x}), v = 1 \ldots p, \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots x_m) \in \mathbb{R}^m_{\boldsymbol{x}}$:

$$H_k\left(\frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{x}}, \ldots \frac{\partial S_v}{\partial \boldsymbol{x}} \ldots \frac{\partial S_p}{\partial \boldsymbol{x}}, S_1, \ldots S_v \ldots S_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right) = 0, k, v = 1 \ldots p. \quad (3)$$

Здесь $H_k\left(\partial S_1/\partial \boldsymbol{x}, \ldots \partial S_v/\partial \boldsymbol{x}, \ldots \partial S_p/\partial \boldsymbol{x}, S_1, \ldots S_v, \ldots S_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right), k = 1 \ldots p,$ — некоторые достаточно гладкие функции от своих аргументов $\partial S_v/\partial \boldsymbol{x} = \left(\partial S_v/\partial x_1, \ldots \partial S_v/\partial x_m\right), S_v, \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots x_m) \in \mathbb{R}^m_{\boldsymbol{x}}, v = 1 \ldots p, \mathbb{R}^m_{\boldsymbol{x}}$ — евклидово пространство размерности m .

Зададим к системе уравнений (3) на поверхности $x_m = 0$, согласованную задачу Коши следующего вида:

$$x_m = 0, \partial S_v/\partial x_m = A^0_v\left(x_1, \ldots x_{m-1}\right), S_v = 0, \quad v = 1 \ldots p \quad (4)$$

где:

$A^0_v\left(x_1, \ldots x_{m-1}\right), \quad v = 1 \ldots p$ — достаточно гладкие функции от своих аргументов $\left(x_1, \ldots x_{m-1}\right), x_j \in \mathbb{R}, j = 1 \ldots (m-1)$.

Пусть система уравнений (3) имеет интеграл, хотя бы на решении с условием Коши (4). Запишем его определение для удобства в виде:

$$\varphi\left(S_1, \ldots S_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right) = \varphi\left(0, \ldots 0, x_1, \ldots x_{m-1}\right) \quad (5)$$

где:

$\varphi\left(S_1, \ldots S_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right)$ — достаточно гладкая функция от своих аргументов.

Обобщим задачу Коши (4) следующим образом:

$$x_m = 0, \partial S_v/\partial x_m = \left(A^0_v\right)'\left(x_1, \ldots x_{m-1}, C_1, \ldots C_p\right), S_v = C_v, \quad v = 1 \ldots p, \quad (6)$$

где мы вводим новые параметры $C_v \in \mathbb{R}$ и $\left(A^0_v\right)'\left(x_1, \ldots x_{m-1}, C_1, \ldots C_p\right), \quad v = 1 \ldots p$ достаточно гладкие функции от своих аргументов $\left(x_1, \ldots x_{m-1}, C_1, \ldots C_p\right), x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1 \ldots (m-1).$ Пусть $\left(A^0_v\right)'\left(x_1, \ldots x_{m-1}, 0, \ldots 0\right) \equiv A^0_v\left(x_1, \ldots x_{m-1}\right), \quad v = 1 \ldots p.$ Задача Коши (6) сводится к задаче Коши (4) при $C_1 = 0, \ldots C_p = 0$.

Пусть для новой задачи (6) интеграл (5) также существует. Соотношения (5) запишутся в виде:

$$\varphi\left(S_1, \ldots S_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right) = \varphi\left(C_1, \ldots C_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right). \quad (7)$$

Продифференцируем выражение (7) по переменным $C_k, x_m, k = 1...p$. Находим, что:

$$\sum_{k=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial S_k}\frac{\partial S_k}{\partial x_m} = 0 \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^p \frac{\partial \varphi}{\partial S_k}\frac{\partial S_k}{\partial C_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial C_j}, j = 1 \ldots p \quad (9)$$

Исключим из $p+1$ выражений (8), (9) p величин $\partial\varphi/\partial S_k, \quad k = 1 \ldots p.$ Получим следующее соотношение:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial S_p}{\partial x_m} & 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial C_1} & \dots & \frac{\partial S_p}{\partial C_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial S_1}{\partial C_p} & \dots & \frac{\partial S_p}{\partial C_p} & \frac{\partial \varphi}{\partial C_p} \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

Разложим определитель (10) по последнему столбцу. Тогда с учетом свойств определителя получим:

$$A_0 \cdot 0 + A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} + \ldots + A_p \frac{\partial \varphi}{\partial C_p} = 0, \qquad (11)$$

где:

$\left(A_0, A_1, \ldots A_p\right)$ выражения, составлены из $\partial S_k / \partial C_j, \quad \partial S_k / \partial x_m, \quad k, j = 1 \ldots p$.

Преобразуем (11) к следующему виду:

$$\frac{A_1}{A_0} \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} + \frac{A_2}{A_0} \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} + \ldots + \frac{A_p}{A_0} \frac{\partial \varphi}{\partial C_p} = 0. \qquad (12)$$

В случае, если (3) есть система ОДУ, то можно показать, что коэффициенты при $\partial \varphi / \partial C_j, \quad j = 1 \ldots p$ в (12) не зависят от x_m и уравнение (12) тогда совпадает с уравнением для определения первых интегралов для систем ОДУ [6].

Продифференцируем (12) по x_m p-2 раза. Тогда:

$$\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^{(j)}_{x_m} \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} + \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^{(j)}_{x_m} \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} + \ldots + \left(\frac{A_p}{A_0}\right)^{(j)}_{x_m} \frac{\partial \varphi}{\partial C_p} = 0, \quad j = 1 \ldots (p-2). \qquad (13)$$

Решим полученную систему линейных уравнений (12), (13) относительно $\partial \varphi / \partial C_j, j = 1 \ldots p$. Пусть $\partial \varphi / \partial C_1 \neq 0$ и

$$\begin{vmatrix} \frac{A_2}{A_0} & \dots & \frac{A_p}{A_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^{(p-2)}_{x_m} & \dots & \left(\frac{A_p}{A_0}\right)^{(p-2)}_{x_m} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (14)$$

Тогда получим некоторые соотношения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_2} = B_2 \frac{\partial \varphi}{\partial C_1}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial C_p} = B_p \frac{\partial \varphi}{\partial C_1}, \qquad (15)$$

где:

$\left(B_2, B_2, \ldots B_p\right)$ выражения, составлены из $\partial S_k / \partial C_j, \quad \partial S_k / \partial x_m, \quad k, j = 1 \ldots p$ и их производных по x_m .

Таким образом, из (15) мы видим, что $\left(B_2, B_2, \ldots B_p\right)$ должны не зависеть от x_m . Следовательно, мы можем записать

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_2} = \left(B_2|_{x_m=0}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial C_1}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial C_p} = \left(B_p|_{x_m=0}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial C_1}, \qquad (16)$$

где:

$\left(B_j|_{x_m=0}\right), \quad j = 2 \ldots p$ есть некоторые функции от $\left(x_1, \ldots x_{m-1}, C_1, \ldots C_p\right)$ и определяются из задачи Коши (6) и системы уравнений (3).

Если система уравнений (3) с параметрической задачей Коши (6) имеет интеграл (7) и выполняется условие (14), то этот интеграл находится среди решений переопределенной системы уравнений (16). Решение системы (16) сводится к решению цепочки параметрических обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка от одного неизвестного [6]. Также существуют методы нахождения аналитического решения переопределенных систем УрЧП, которые могут быть применены к системе (16) [8].

Таким образом, мы имеем следующую процедуру нахождения интегралов у системы (3):

1. Находим все решения системы (16).
2. Делаем преобразование $\varphi\left(C_1, \ldots C_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right) \longrightarrow \varphi\left(S_1, \ldots S_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right)$
3. Проверяем, являются ли полученные функции $\varphi\left(S_1, \ldots S_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right)$ интегралами исходной системы (3). Для этого достаточно их продифференцировать по x_m и посмотреть, являются ли полученные выражения тождественно равными нулю.

При $C_1 = 0, \ldots C_p = 0$ мы получим переопределение системы УрЧП (3) с условием Коши (4) с помощью уравнений (5). Оно позволяет исключить сразу одно или несколько неизвестных из системы уравнений (3).

Пример применения метода

Рассмотрим дифференциальное уравнение относительно неизвестного $S, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = G\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right). \qquad (17)$$

Здесь $G(\frac{\partial S}{\partial x}, x)$ достаточно гладкая функция в некоторой области от своих аргументов. Поставим для этого уравнения задачу Коши:

$$S|_{t=0} = 0 \tag{18}$$

Рассмотрим уравнение от неизвестного U:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -G\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right). \tag{19}$$

Пусть

$$U|_{t=0} = 0 \tag{20}$$

Система уравнений (17), (19) имеет очевидный интеграл

$$\varphi(S, U) = S + U. \tag{21}$$

Найдем все интегралы вида $\varphi(S, U, x)$ у системы уравнений (17), (19). Поставим для системы (17), (19) задачу Коши:

$$S|_{t=0} = S_0,\ U|_{t=0} = U_0, \tag{22}$$

где:

$U_0 \in \mathbb{R}, S_0 \in \mathbb{R}$ параметры. Тогда можно записать

$$\varphi(S, U, x) = \varphi\ (S_0, U_0, x). \tag{23}$$

Продифференцируем соотношение (23) по переменным t, S_0, U_0. Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial S_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial S_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial S_0} \tag{25}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial U_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial U_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial U_0} \tag{26}$$

Исключим из уравнений (24) - (26) неизвестные $\partial\varphi/\partial U, \partial\varphi/\partial S$. Находим, что должно выполняться

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial t} & \frac{\partial U}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial S}{\partial S_0} & \frac{\partial U}{\partial S_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial S_0} \\ \frac{\partial S}{\partial U_0} & \frac{\partial U}{\partial U_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial U_0} \end{vmatrix} = 0 \tag{27}$$

Разложим определитель (27) по последнему столбцу. Имеем,

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial U_0}\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial t} & \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial S}{\partial S_0} & \frac{\partial U}{\partial S_0} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial t} & \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial S}{\partial U_0} & \frac{\partial U}{\partial U_0} \end{vmatrix}} + \frac{\partial \varphi}{\partial S_0} = 0 \tag{28}$$

Уравнение (28) должно выполняться при $t = 0$. Тогда, используя (17), (19) и (22), получим

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial U_0}\frac{G(0,x)}{G(0,x)} + \frac{\partial \varphi}{\partial S_0} = 0 \tag{29}$$

Пусть $G(0, x) \neq 0$. Тогда (29) преобразовывается к виду

$$\frac{\partial \varphi(S_0,U_0,x)}{\partial S_0} - \frac{\partial \varphi(S_0,U_0,x)}{\partial U_0} = 0. \tag{30}$$

Общее решение уравнения (30) имеет вид [6]

$$\varphi\ (S_0, U_0, x) = F\ ((S_0 + U_0)\ , x), \tag{31}$$

где:

$F\ ((S_0 + U_0)\ , x)$ — достаточно гладкая функция от своих аргументов.

Таким образом, мы показали, что, если система (17), (19) имеет интегралы вида $\varphi = \varphi(S, U, x)$, то по формуле (31) необходимо, что:

$$\varphi(S, U, x) = F((S + U), x). \tag{32}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что выражения (32) являются интегралами системы (17), (19) для решений даже произвольной задачи Коши.

При $U_0 = 0, S_0 = 0$ мы имеем, что:

$$\mathrm{F((S{+}U),\ x){=}F(0,\ x).} \tag{33}$$

Соотношение (33) переопределяет систему (17), (19) с задачей Коши (18).

Обобщение метода

Заметим, что можно рассмотреть более общий интеграл с условием Коши (4) и определяемый как:

$$\varphi\left(\partial S_1/\partial \boldsymbol{x} \ldots \partial S_p/\partial \boldsymbol{x}, S_1, \ldots S_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right) = \varphi\left(0 \ldots 0, x_1, \ldots x_{m-1}\right), \quad (34)$$

где:

$\varphi\left(\partial S_1/\partial \boldsymbol{x} \ldots \partial S_p/\partial \boldsymbol{x}, S_1, \ldots S_p, x_1, \ldots x_{m-1}\right)$ — достаточно гладкая функция от своих аргументов, $\partial S_v/\partial \boldsymbol{x} = \left(\partial S_v/\partial x_1, \ldots \partial S_v/\partial x_{m-1}\right), v = 1 \ldots p$.

Если мы введем в задачу Коши (6) большее количество параметров, то мы также аналогично получим уравнения вида (16) для определения внешнего вида интеграла (34). Например, можно взять

$$x_m = 0, \partial S_v/\partial x_m = \left(A_v^0\right)''\left(x_1, \ldots x_{m-1}, C_1, \ldots C_p, R_1^1, \ldots R_p^{m-1}\right), S_v = C_v + \sum_{k=1}^{m-1} x_k R_v^k, \quad v = 1 \ldots p, \quad (35)$$

где:

мы вводим новые параметры $C_v \in \mathbb{R}, R_v^i \in \mathbb{R}$ и $\left(A_v^0\right)''\left(x_1, \ldots x_{m-1}, C_1, \ldots C_p, R_1^1, \ldots R_p^{m-1}\right), v = 1 \ldots p, i = 1 \ldots (m-1)$ – достаточно гладкие функции от своих аргументов $\left(x_1, \ldots x_{m-1}, C_1, \ldots C_p, R_1^1, \ldots R_p^{m-1}\right)$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1 \ldots (m-1), \left(A_v^0\right)''\left(x_1, \ldots x_{m-1}, 0, \ldots 0\right) \equiv A_v^0\left(x_1, \ldots x_{m-1}\right)$.

Заметим также, что если мы продифференцируем выражение (7) по переменным $C_k, x_m, k = 1 \ldots p$ больше одного раза, то мы получим дополнительные уравнения к уравнениям (16). Полученную таким образом переопределенную систему будет легче исследовать [7], [8], [9].

Заключение

В данной статье рассматриваются в общем виде системы УрЧП. В данной работе мы получили способ нахождения интегралов у систем УрЧП.

Сначала мы рассмотрели определение интеграла у систем дифференциальных уравнений в виде (5). Потом ввели через задачу Коши дополнительные параметры (6) и рассмотрели определение интеграла (7). Из определения (7) сразу необходимо следуют уравнения (16) для определения внешнего вида интеграла (7). Система уравнений (16) есть переопределенная система УрЧП, решение которой сводится к решению параметрических обыкновенных дифференциальных уравнений [6]. Также к решению системы (16) может быть применен метод решения переопределённых систем дифференциальных уравнений из работ [8], [11]. Потом мы заметили, что можно рассмотреть более общий интеграл (34). Если ввести параметры (35), то также можно получить необходимую систему уравнений вида (16) для определения внешнего вида интеграла (34). Потом мы заметили, что можно дифференцировать по параметрам $C_k, x_m, k = 1 \ldots p$ более одного раза и получать новые уравнения, дополнительные к (16).

Интегралы систем дифференциальных уравнений могут быть использованы для контроля расчетов у различных практически значимых систем уравнений, например, уравнений Гамильтона-Якоби. Также они могут быть применены для снижения размерности у систем уравнений (3) [10], [12].

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — Москва : Наука, 1966. — 736 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — Москва : Мир, 1964. — 830 с.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. — Москва : МЦНМО, 2012. — 344 с.
4. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. — 2-е изд. — Москва : URSS, 2007. — 240 с.
5. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: Гидродинамика. Т. VI / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — Москва : Наука, 1986. — 736 с.
6. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. — Санкт-Петербург : Лань, 2003. — 416 с.

7. Зайцев М.Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 2. — С. 5–27.

8. Зайцев М.Л. Алгоритм нахождения решений переопределенных систем дифференциальных уравнений в явном виде / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». — 2020. — Т. 12, № 4. — С. 5–18.

9. Зайцев М.Л. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 43–67.

10. Полянин А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. — Москва : Физматлит, 2005. — 496 с.

11. Зайцев М.Л. К идентификации решений уравнения Риккати и других полиномиальных систем дифференциальных уравнений / М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». — 2022. — Т. 14, № 3. — С. 23–37.

12. Полянин А.Д. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики / А.Д. Полянин, А.И. Журов. — Москва : ИПМех РАН, 2020. — 512 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Tikhonov A.N. Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of Mathematical Physics] / A.N. Tikhonov, A.A. Samarskij. — Moscow : Nauka, 1966. — 736 p. [in Russian]

2. Courant R. Uravnenija s chastnymi proizvodnymi [Partial Differential Equations] / R. Courant. — Moscow : Mir, 1964. — 830 p. [in Russian]

3. Arnold V.I. Obyknovennye differencial'nye uravnenija [Ordinary Differential Equations] / V.I. Arnold. — Moscow : MCNMO, 2012. — 344 p. [in Russian]

4. Filippov A.F. Vvedenie v teoriju differencial'nyh uravnenij [Introduction to the Theory of Differential Equations] / A.F. Filippov. — 2nd ed. — Moscow : URSS, 2007. — 240 p. [in Russian]

5. Landau L.D. Teoreticheskaja fizika: Gidrodinamika. T. VI [Theoretical Physics: Hydrodynamics. Vol. VI] / L.D. Landau, E.M. Lifshic. — Moscow : Nauka, 1986. — 736 p. [in Russian]

6. Fedorjuk M.V. Obyknovennye differencial'nye uravnenija [Ordinary Differential Equations] / M.V. Fedorjuk. — Saint Petersburg : Lan, 2003. — 416 p. [in Russian]

7. Zajcev M.L. Gipoteza ob uproshhenii pereopredelennyh sistem differencial'nyh uravnenij i ee primenenie k uravnenijam gidrodinamiki [Hypothesis on Simplification of Overdetermined Systems of Differential Equations and Its Application to Hydrodynamic Equations] / M.L. Zajcev, V.B. Akkerman // Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika [Bulletin of the VSU. Series: Physics. Mathematics]. — 2015. — № 2. — P. 5–27. [in Russian]

8. Zajcev M.L. Algoritm nahozhdenija reshenij pereopredelennyh sistem differencial'nyh uravnenij v javnom vide [Algorithm for Finding Solutions of Overdetermined Systems of Differential Equations in Explicit Form] / M.L. Zajcev, V.B. Akkerman // Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika» [Bulletin of SUSU. The series "Mathematics. Mechanics. Physics"]. — 2020. — Vol. 12, № 4. — P. 5–18. [in Russian]

9. Zajcev M.L. Redukcija pereopredelennyh sistem differencial'nyh uravnenij matematicheskoj fiziki [Reduction of Overdetermined Systems of Differential Equations in Mathematical Physics] / M.L. Zajcev, V.B. Akkerman // Matematicheskaya fizika i komp'yuternoe modelirovanie [Mathematical physics and computer modeling]. — 2017. — Vol. 20, № 4. — P. 43–67. [in Russian]

10. Poljanin A.D. Metody reshenija nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki i mehaniki [Methods for Solving Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics] / A.D. Poljanin, V.F. Zajcev, A.I. Zhurov. — Moscow : Fizmatlit, 2005. — 496 p. [in Russian]

11. Zajcev M.L. K identifikacii reshenij uravnenija Rikkati i drugih polinomial'nyh sistem differencial'nyh uravnenij [On Identification of Solutions of Riccati Equation and Other Polynomial Systems of Differential Equations] / M.L. Zajcev, V.B. Akkerman // Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika» [Bulletin of SUSU. The series "Mathematics. Mechanics. Physics"]. — 2022. — Vol. 14, № 3. — P. 23–37. [in Russian]

12. Poljanin A.D. Metody razdelenija peremennyh i tochnye reshenija nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics] / A.D. Poljanin, A.I. Zhurov. — Moscow : IPMech RAN, 2020. — 512 p. [in Russian]