ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА/DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.155.92

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ЗАДАЧИ ФИШЕРА-КОЛМОГОРОВА-ПЕТРОВСКОГО-ПИСКУНОВА

Научная статья

Барабаш О.П.[1,] *

[1] Воронежский Государственный Университет, Воронеж, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (navys9[at]yandex.ru)

Аннотация

В настоящей статье для квазилинейного уравнения Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова исследуется двухслойная шеститочечная разностная схема с весами, которая обладает первым порядком аппроксимации по временной переменной и вторым по пространственной. С использованием принципа максимума в работе получена априорная оценка разностного решения. Доказывается монотонность разностной схемы, сконструированной относительно сеточной функции, представляющей собой разность между решением разностной задачи с возмущенными входными данными и решением исходной разностной задачи. Получена оценка в сеточном аналоге нормы C, выражающая устойчивость схемы по отношению к малому возмущению всех входных данных. Приведены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: уравнение реакции-диффузии, уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова, принцип максимума, монотонная разностная схема, метод конечных разностей.

ON ONE METHOD OF DISCRETISATION OF THE FISHER-KOLMOGOROV-PETROVSKY-PISKUNOV PROBLEM

Research article

Barabash O.P.[1,] *

[1] Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

* Corresponding author (navys9[at]yandex.ru)

Abstract

In this article, a two-layer six-point difference scheme with weights, which has the first order of approximation on the time variable and the second on the spatial variable, is studied for the quasilinear Fischer-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation. Using the maximum principle, an a priori estimate of the difference solution is obtained in the paper. The monotonicity of the difference scheme constructed with respect to the grid function, which is the difference between the solution of the difference problem with disturbed input data and the solution of the original difference problem, is proved. An estimate in the grid analogue of the norm C expressing the stability of the scheme with respect to a small disturbance of all input data is obtained. The results of numerical experiment are given.

Keywords: reaction-diffusion equation, Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation, maximum principle, monotone difference scheme, finite difference method.

Введение

Базовой математической моделью среды, для которой характерна пространственно-временная самоорганизация, выступает нелинейное уравнение реакции-диффузии (УРД): $\partial_t u = D\nabla^2 u + f(u)$, где D — диагональная матрица коэффициентов диффузии, $u(x,t)$ — неизвестная векторная функция, $f(u)$ — непрерывная и достаточное число раз дифференцируемая функция.

В 1937г. Р. Фишер [1, С. 355-369] и советские математики А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский и Н.С. Пискунов [2, С. 1–6] разработали модель, основанную на уравнении из класса уравнений реакции-диффузии:

$$u_t = u_{xx} + u(1-u). \qquad (1)$$

Уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова (Ф-КПП) (1) играет большую роль в исследовании биологических, химических и социальных процессов. Справедливости ради, стоит отметить, что первоначально уравнение было предложено Г. Хотеллингом в 1921 г. [3, С. 1223–1239] в качестве модели, описывающей популяционный рост и распространение.

В статье [4, С. 1–14] приводятся необходимые и достаточные условия интегрируемости и общей мероморфности решений уравнений типа Фишера, получены точные решения типа бегущей волны. Для практических нужд важно не только исследование качественных свойств решения рассматриваемого уравнения [5, С. 296–306], но и применение численных методов [6, С. 1–9].

Одним из методов получения априорных оценок для решений разностных схем, а также исследования устойчивости является принцип максимума. Принцип максимума дает только достаточные условия устойчивости, то есть из их невыполнения не следует, что схема неустойчива. Из априорных оценок в сеточных нормах следует устойчивость решения разностной схемы по отношению к малым возмущениям входных данных задачи. В нелинейном случае из полученных априорных оценок не следует ни единственность сеточного решения, ни устойчивость. Для того чтобы пользоваться доказательным аппаратом принципа максимума, требуется построение разностной схемы, которая была бы монотонна относительно разности между решением разностной задачи с возмущенными входными данными и решением исходной задачи.

Априорная оценка решения разностной схемы

Рассмотрим в прямоугольнике $\overline{D} = \{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$

начально-краевую задачу для одномерного уравнения Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au(1-u), 0 < x < 1, 0 < t \le T, A > 0, \quad (2)$$

$$u(0,t) = u_1(t), u(1,t) = u_2(t), 0 \le t \le T, \quad (3)$$

$$u(x,0) = u_0(x), 0 \le x \le 1. \quad (4)$$

Далее будем предполагать неотрицательность входных данных (3)-(4).

Введем равномерную сетку $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \omega_\tau = \{x_i = ih, i = 0, 1, .., N\} \times \{t_j = j\tau, j = 0, 1, .., M\}$,

ω_h — множество внутренних узлов, γ_h — множество граничных узлов, $\overline{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$. Значение сеточной функции y в узле (x_i, t_j) обозначим y_i^j .

Для аппроксимации рассматриваемой нелинейной задачи применим следующую линейную разностную схему с весами:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \sigma \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \quad (5)$$
$$+(A-\beta)(1-y_i^j)y_i^{j+1} + \beta(1-y_i^{j+1})y_i^j, 0 < i < N, 0 \le j < M,$$

где параметры $0 < \sigma < 1,\ A/2 < \beta < A$.

Начальные и краевые условия аппроксимируем точно

$$y_0^j = u_1^j, y_N^j = u_2^j, \quad (6)$$

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i). \quad (7)$$

Ранее в работе [7, С. 989–992] было доказано, что схема обладает первым порядком аппроксимации по τ и вторым по h . Кроме того, указанная разностная схема приводит к линейной трехдиагональной матрице системы уравнений, а значит позволяет использовать для решения метод прогонки.

Используя технику принципа максимума [8, С. 239–252], [9, С.339–362] найдем априорную оценку.

Пусть в ограниченной области задана сетка $\overline{\omega}_h$, на внутренних узлах которой рассматривается уравнение относительно неизвестной сеточной функции $y(Q)$:

$$\sum_{Q \in S(P)} C_h(P,Q) y(Q) = F(P), P \in \omega_h, \quad (8)$$

$C_h(P,Q), F(P)$ – заданные сеточные функции.

Выделим в качестве центрального узла тот узел, у которого коэффициент C_h максимален по модулю. Запишем разностную схему (8) в канонической форме

$$C(P)y(P) = \sum_{Q \in S'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P). \quad (9)$$

Шаблон $S(P) = S'(P) + P$. Для уравнения (9) в граничных узлах зададим условие Дирихле $y(P) = u(P), P \in \gamma_h$.

Далее будем полагать, что коэффициенты уравнения (9) удовлетворяют условиям неотрицательности:

$$C(P) > 0, B(P,Q) > 0, D(P) = C(P) - \sum_{Q \in S'(P)} B(P,Q) \ge 0 \quad (10)$$

для любого внутреннего узла $P \in \omega_h$ и любой точки Q из окрестности $S'(P)$ узла P .

Приведем ряд теорем, доказанных в [8].

Пусть

$$L_h y = C(P)y(P) - \sum_{Q \in S'(P)} B(P,Q)y(Q) = F(P), P \in \omega_h.$$

Теорема 1. (принцип максимума)

Пусть $y(P)$ — некоторая сеточная функция, заданная на ω_h и не равная постоянной $(y(P) \not\equiv const)$. Тогда, если $L_h y \le 0\ (L_h y \ge 0)$, то $y(P)$ не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения во внутренних узлах $P \in \omega_h$.

Теорема 2.

Пусть функция $y(P)$, определенная на $\overline{\omega}_h$, неотрицательна на границе γ_h и выполнено условие
$L_h y \geq 0, P \in \omega_h.$

Тогда $y(P)$ неотрицательна для всех $P \in \overline{\omega}_h$:
$y(P) \geq 0, P \in \overline{\omega}_h.$

Если же $y(P) \leq 0$ на γ_h, $L_h y \leq 0$ на ω_h, то
$y(P) \leq 0, P \in \overline{\omega}_h.$

Следствие 1.

Пусть выполнены условия (10) и $D(P) \not\equiv 0$. Тогда однородное уравнение $L_h y = 0$ имеет единственное решение $y(P) \equiv 0, P \in \overline{\omega}_h$, а уравнение $L_h y = F$ однозначно разрешимо при любых правых частях F.

Теорема 3. (теорема сравнения)

Пусть $y(P)$ и $\tilde{y}(P)$ — решения задач
$L_h y = F(P), L_h \tilde{y} = \tilde{F}(P),$
где $\tilde{F}(P) \geq 0$.

Тогда, если $|F| \leq \tilde{F}$ на ω_h, $|u| \leq |\tilde{u}|$ на γ_h, то $|y(P)| \leq \tilde{y}(P)$ на $\overline{\omega}_h$.

Следствие 2.

Для решения однородного уравнения
$L_h y = 0, P \in \omega_h,$
$y(P) = 0, P \in \gamma_h,$
справедлива оценка
$\|y\|_{\overline{\omega}_h} \leq \|y\|_{\gamma},$
где $\|y\|_{\overline{\omega}_h} = \max\limits_{P \in \overline{\omega}_h} |y(P)|, \|y\|_{\gamma} = \max\limits_{P \in \gamma_h} |y(P)|.$

Теорема 4.

Пусть коэффициенты уравнения (9) удовлетворяют условиям:
$C(P) > 0, B(P,Q) > 0, D(P) > 0, P \in \omega_h,$
тогда для решения задачи (9) с нулевым граничным условием $u(P) = 0$ справедлива оценка
$\|y\|_C \leq \left\|\frac{F(P)}{D(P)}\right\|_C,$
где $\|y\|_C = \max\limits_{P \in \omega_h} |y(P)|.$

Таким образом, условия положительности коэффициентов

$$C(P) > 0, B(P,Q) > 0, D(P) > 0 \text{ для всех } P \in \omega_h, Q \in S'(P) \qquad (11)$$

гарантируют однозначную разрешимость, монотонность и устойчивость в равномерной норме по отношению к малому возмущению входных данных.

Разностное уравнение (5) можно переписать в виде

$$\left(\frac{2\sigma\tau}{h^2} - A\tau(1 - y_i^j) + \beta\tau + 1\right) y_i^{j+1} = \frac{\sigma\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}\right) +$$
$$+\frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^{j} + y_{i+1}^{j}\right) + y_i^j\left(1 + \beta\tau - 2\frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\right), 0 < i < N, 0 \leq j < M.$$

Пусть $P = P(x_i, t_{j+1})$. Шаблон $S'(P)$ состоит из узлов:
$S'(P) : Q_1(x_i, t_j), Q_2(x_{i-1}, t_{j+1}), Q_3(x_{i+1}, t_{j+1}), Q_4(x_{i-1}, t_j), Q_5(x_{i+1}, t_j).$

Тогда

$$C(P) = \frac{2\sigma\tau}{h^2} - A\tau(1 - y_i^j) + \beta\tau + 1,$$
$$B(P,Q_2) = B(P,Q_3) = \frac{\sigma\tau}{h^2},$$
$$B(P,Q_4) = B(P,Q_5) = \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2},$$
$$B(P,Q_1) = 1 + \beta\tau - 2\frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}.$$

Определим условия, при которых схема принадлежит рассматриваемому классу.

Рассмотрим коэффициент канонической формы $C(P)$:

$$\frac{2\sigma\tau}{h^2} - A\tau(1 - y_i^j) + \beta\tau + 1 > 0,$$
$$2\sigma\tau > h^2\left[A\tau(1 - y_i^j) - \beta\tau - 1\right].$$

Покажем, что

$$A\tau(1 - y_i^j) - \beta\tau - 1 < 0. \qquad (12)$$

Если $y_i^j > 1$, то ввиду неотрицательности параметров A, β и шага τ, все выражение отрицательно.

Будем рассматривать случай, когда $0 \le y_i^j \le 1$. Заменим функцию y_i^j ее минимально возможным значением, чтобы максимизировать $A\tau(1 - y_i^j)$, тогда при

$$\tau < \frac{1}{A-\beta} \tag{13}$$

неравенство (12) истинно.

Нетрудно видеть, что для $0 < \sigma < 1$, коэффициенты $B(P, Q_2), B(P, Q_3), B(P, Q_4), B(P, Q_5)$ положительны.

Пусть $B(P, Q_1) > 0$:

$$1 + \beta\tau - 2\frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} > 0,$$

$$\tau\left(\beta - 2\frac{(1-\sigma)}{h^2}\right) > -1.$$

Если $\beta > \frac{2(1-\sigma)}{h^2}$, то шаг τ может принимать любое допустимое значение. Однако ввиду малости шага h это условие является неестественным. Если же

$$\frac{A}{2} < \beta < min\left\{A, \frac{2(1-\sigma)}{h^2}\right\}, \tag{14}$$

то в этом случае

$$\tau < \frac{1}{2\frac{(1-\sigma)}{h^2} - \beta}. \tag{15}$$

В рассматриваемой задаче при выполнении условий (14)-(15) имеет место неравенство $F(P) = \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + y_i^j\left(1 + \beta\tau - 2\frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\right) > 0.$

Тогда коэффициент $D(P)$ будет вычисляться по формуле

$$D(P) = \frac{2\sigma\tau}{h^2} - A\tau(1 - y_i^j) + \beta\tau + 1 - \frac{2\sigma\tau}{h^2} = -A\tau(1 - y_i^j) + \beta\tau + 1 > 0.$$

Положительность $D(P)$ при выполнении условия (13) следует из того, что выражение $A\tau(1 - y_i^j) - \beta\tau - 1$ отрицательно при выполнении этого же условия.

Пусть $m_1 = \min\limits_{(x,t)\in\overline{D}}\{u_1(t), u_2(t), u_0(x)\}, m_2 = \max\limits_{(x,t)\in\overline{D}}\{u_1(t), u_2(t), u_0(x)\}.$

Теорема 5. Пусть выполнены условия

$$\frac{A}{2} < \beta < \min\left\{A, \frac{2(1-\sigma)}{h^2}\right\}, \tag{16}$$

$$\tau < \min\left\{\frac{1}{2\frac{(1-\sigma)}{h^2} - \beta}, \frac{1}{A-\beta}\right\} \tag{17}$$

и разностное решение $y(x, t)$ неотрицательно на сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$.

Тогда справедлива двусторонняя оценка: $0 \le y_i^j \le e^{At_j} m_2, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}.$

Доказательство.

Будем следовать методике доказательства, изложенной в работе [10, С. 391-398].

На нулевом слое справедлива следующая оценка

$$0 \le m_1 \le y_i^0 = u_0(x_i) \le m_2. \tag{18}$$

По индукции предположим, что оценка (18) верна также и для всех $l = \overline{1, j}$. Неравенство справедливо и для $l = j + 1$.

Максимум и минимум сеточной функции может достигаться либо на границе, либо во внутренней точке сетки.

Запишем оценку, доказанную в работе [11, P. 186–199]:

$$m_1^{j+1} \le y_i^{j+1} \le m_2^{j+1}, \tag{19}$$

где

$$m_1 = \min\left\{\min\{u_1^{j+1}, u_2^{j+1}\}, \min\left\{\frac{F_i^j}{D_i^j}\right\}\right\} \ge 0,$$

$$m_2 = \max\left\{\max\{u_1^{j+1}, u_2^{j+1}\}, \max\left\{\frac{F_i^j}{D_i^j}\right\}\right\} \ge 0.$$

Тогда

$$\max_i \frac{F(P)}{D(P)} \le \frac{\max_i y_i^j \left[\frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} + 1 + \beta\tau - 2\frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\right]}{-A\tau(1-\min_i y_i^j) + \beta\tau + 1} = \tag{20}$$

$$= \frac{\max_i y_i^j \,[1+\beta\tau]}{1+\beta\tau - A\tau} \le \max_i y_i^j e^{A\tau}.$$

С учетом (20):

$y_i^{j+1} \le \max\{m_2^{j+1}, e^{A\tau}\max y_i^j\} \le m_2 e^{At_{j+1}}$.

Что и требовалось доказать.

Назовем β и τ допустимыми, если они удовлетворяют ограничениям (16), (17) соответственно. Отметим, что множество допустимых значений β и τ непусто, если принять во внимание произвольность σ.

Будем рассматривать равномерную сеточную норму $\|y\|_C = \max_{x\in\omega_h} |y^j(x)|, \|y\|_{\overline{C}} = \max_{x\in\overline{\omega}_h} |y^j(x)|$.

Следствие.

Для решения разностной схемы (5)-(7) справедлива априорная оценка

$\|y^j\|_{\overline{C}} \le e^{At_j} m_2, i = \overline{0,N}$.

Исследование монотонности и устойчивости

Нижеприведенное определение справедливо разностных схем, аппроксимирующих как линейные, так и нелинейные краевые задачи.

Определение 1. Пусть разностная схема

$$L_h y = \phi, \tag{21}$$

аппроксимирует дифференциальную задачу

$Ly = f$

и $\tilde{y}$ - решение разностной задачи (22) с возмущенными входными данными $\tilde{f}$ (включая начальные и краевые условия):

$$L_h \tilde{y} = \tilde{\phi}. \tag{22}$$

Тогда разностная схема (21) называется *монотонной*, если из условий

$\tilde{\phi} \ge \phi(\tilde{\phi} \le \phi)$

следует

$\tilde{y} \ge y(\tilde{y} \le y)$.

Будем рассматривать сеточную функцию $\delta y = \tilde{y} - y$, где y — решение разностной схемы (5)-(7), а $\tilde{y}$ - решение разностной схемы для задачи с возмущенными входными данными:

$$\frac{\tilde{y}_i^{j+1} - \tilde{y}_i^j}{\tau} = \sigma\frac{\tilde{y}_{i-1}^{j+1} - 2\tilde{y}_i^{j+1} + \tilde{y}_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{\tilde{y}_{i-1}^j - 2\tilde{y}_i^j + \tilde{y}_{i+1}^j}{h^2} + \tag{23}$$

$$+(A-\beta)\tilde{y}_i^{j+1} + \beta\tilde{y}_i^j - A\tilde{y}_i^j\tilde{y}_i^{j+1}, 0 < i < N, 0 \le j < M,$$

$$\tilde{y}_0^j = \tilde{u}_1^j, \tilde{y}_N^j = \tilde{u}_2^j, \tag{24}$$

$$\tilde{y}_i^0 = \tilde{y}(x_i, 0) = \tilde{u}_0(x_i). \tag{25}$$

Тогда поэлементно вычитая из (23)-(25) уравнения (5)-(7), получим задачу для сеточной функции $\delta y = \tilde{y} - y$:

$$\delta y_i^{j+1}\left(\frac{2\sigma\tau}{h^2} - A\tau\left(1-\tilde{y}_i^j\right) + \beta\tau + 1\right) = \frac{\sigma\tau}{h^2}\left(\delta y_{i-1}^{j+1} + \delta y_{i+1}^{j+1}\right) + \tag{26}$$

$$+\left[\delta y_i^j\left(1 + \tau\beta - \tau A y_i^{j+1} - \frac{2\tau(1-\sigma)}{h^2}\right) + \frac{\tau(1-\sigma)}{h^2}\left(\delta y_{i-1}^j + \delta y_{i+1}^j\right)\right].$$

$\delta y_0^j = \tilde{u}_1^j - u_1^j, \delta y_N^j = \tilde{u}_2^j - u_2^j,$

$\delta y_i^0 = \tilde{u}_0 - u_0.$

Здесь коэффициенты $B(P, Q_i), i = \overline{2,5}$ для значения параметра $0 < \sigma < 1$ положительны:

$B(P, Q_2) = B(P, Q_3) = \frac{\sigma\tau}{h^2} > 0,$

$B(P, Q_4) = B(P, Q_5) = \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} > 0.$

Коэффициенты $C(P)$ и $D(P)$ имеют вид:

$C(P) = \frac{2\sigma\tau}{h^2} - A\tau\left(1-\tilde{y}_i^j\right) + \beta\tau + 1,$

$D(P) = -A\tau\left(1-\tilde{y}_i^j\right) + \beta\tau + 1.$

Выше была доказана положительность этих коэффициентов, содержащих в формуле y_i^j. Применяя аналогичные рассуждения и для $\tilde{y}_i^j$, получаем $C(P)>0,\ D(P)>0$.

Определим условия при которых $F(P)>0$, где: $F(P)=\delta y_i^j\left(1+\tau\beta-\tau A y_i^{j+1}-\frac{2\tau(1-\sigma)}{h^2}\right)+\frac{\tau(1-\sigma)}{h^2}\left(\delta y_{i-1}^j+\delta y_{i+1}^j\right).$

Рассмотрим множитель, входящий в первое слагаемое последней формулы:

$$1+\tau\beta-\tau A y_i^{j+1}-\frac{2\tau(1-\sigma)}{h^2}=1+\tau\left[\beta-A y_i^{j+1}-\frac{2(1-\sigma)}{h^2}\right].$$

Вариант $\beta>Am_2e^{AT}+2(1-\sigma)/h^2$, при котором шаг τ может принимать любое допустимое значение, не имеет смысла, поскольку весовой коэффициент удовлетворяет условию $A/2<\beta<A$.

Для случая $\beta<Am_2e^{AT}+2(1-\sigma)/h^2$ считаем, что $\beta<A$ и

$$\tau<\frac{1}{Am_2e^{AT}+2\frac{(1-\sigma)}{h^2}-\beta}.$$

Применим двустороннюю оценку (19) к функции δy_i^j:

$$\delta m_1^{j+1}\le\delta y_i^{j+1}\le\delta m_2^{j+1},$$

где

$$m_1=\min\left\{min\{\delta u_1^{j+1},\delta u_2^{j+1}\},min\left\{\frac{F_i^j}{D_i^j}\right\}\right\}\ge 0,$$

$$m_2=\max\left\{max\{\delta u_1^{j+1},\delta u_2^{j+1}\},max\left\{\frac{F_i^j}{D_i^j}\right\}\right\}\ge 0.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{F(P)}{D(P)}=\frac{\tau\frac{(1-\sigma)}{h^2}\delta y_{i-1}^j+\delta y_i^j\left(1+\tau\beta-\tau A y_i^{j+1}-\tau\frac{2(1-\sigma)}{h^2}\right)+\tau\frac{(1-\sigma)}{h^2}\delta y_{i+1}^j}{-A\tau\left(1-\tilde{y}_i^j\right)+\beta\tau+1}. \tag{27}$$

Если выполнена оценка

$$\tau<min\left\{\frac{1}{A-\beta},\frac{1}{Am_2e^{AT}+2\frac{(1-\sigma)}{h^2}-\beta}\right\} \tag{28}$$

и для всех $(x,t)\in\overline{\omega}_{h\tau}$ справедливо

$$\tilde{u}_1^j-u_1^j\ge 0,\tilde{u}_2^j-u_2^j\ge 0,$$

$$\tilde{u}_0(x_i)-u_0(x_i)\ge 0,$$

то из отношения (27) следует $\delta y=\tilde{y}-y\ge 0.$

Следовательно, в соответствии с определением 1 разностная схема (5)-(7) является монотонной.

Исследуем устойчивость разностной схемы. Сеточная функция δy_i^j может достигать своего максимума либо на границе $\|\delta y^{j+1}\|_{\overline{C}}=max\{|\delta u_1(t)|,|\delta u_2(t)|\}$, либо во внутренней точке. Тогда для случая достижения максимума во внутренней точке из уравнения (26) следует неравенство:

$$\|\delta y^{j+1}\|_C\le\left\|\frac{F}{D}\right\|_C\le e^{\tau\lambda}\|\delta y^j\|_C,\lambda=const>0.$$

Объединим оценки:

$$\|\delta y^{j+1}\|_C\le\max\left\{\max_t\{|\delta u_1(t)|,|\delta u_2(t)|\},e^{\lambda t_{j+1}}\|\delta u_0(x)\|_C\right\}. \tag{29}$$

Неравенство (29) демонстрирует устойчивость разностной схемы (5)–(7) при выполнении условия (28) по отношению к малому возмущению входных данных.

Численный эксперимент

Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u(1-u),-20<x<20,0<t\le 4, \tag{30}$$

$$u(-20,t)=\frac{1}{(1+e^{-20/\sqrt{6}-5t/6})^2},0\le t\le 4$$

$$u(20,t)=\frac{1}{(1+e^{20/\sqrt{6}-5t/6})^2},0\le t\le 4, \tag{31}$$

$$u(x,0)=\frac{1}{(1+e^{-20/\sqrt{6}x})^2},-20\le x\le 20.$$

Приведем результаты численного эксперимента для начально-краевой задачи (30)-(31), которая была получена из исходной задачи установлением параметров $T = 4, A = 1$.

Численная реализация метода прогонки производилась на языке Python с весовыми коэффициентами $\sigma = 0,5$ и $\beta = 0,5$.

Количество отрезков разбиения по оси Ot и оси Ox составляет $M = 400$ и $N = 200$ соответственно. Результаты расчета сравнивались с точным решением, определенным по формуле [6]:

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(1+e^{1/\sqrt{6}x-5t/6}\right)^2}.$$

Графики демонстрируют, что численное решение в моменты времени $t_1 = T/4, t_2 = T/2, t_3 = T$ совпадают с графиками точного решения, имеющими профиль "бегущей волны".

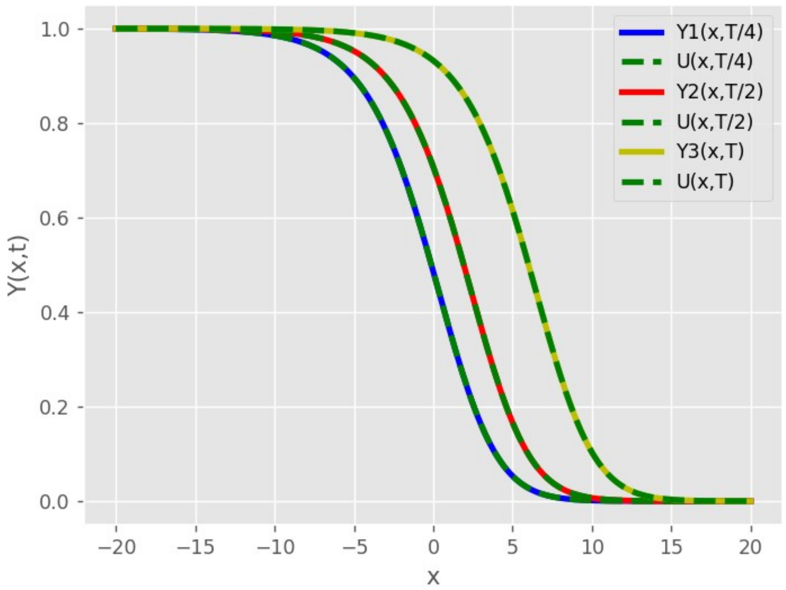

Рисунок 1 - Численное и точное решения в различные моменты времени для M=200, N=400, σ=0,5, β = 0,5.

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.155.92.1

В таблице 1 приведены абсолютные ошибки численного решения на разных временах, полученные при расчете с параметрами $N = 200, M = 400$ и $N = 200, M = 1000$. Таблица 2 содержит относительные ошибки численного решения при тех же параметрах.

Таблица 1 - Абсолютные ошибки в разные моменты времени для одного значения шага пространственной сетки и двух значений шага временной сетки

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.155.92.2

M	Error t_1	Error t_2	Error t_3
400	2.65924e-08	2.08158e-08	7.09457e-08
1000	2.78334e-08	2.17883e-08	7.42831e-08

Таблица 2 - Относительные ошибки в разные моменты времени для одного значения шага пространственной сетки и двух значений шага временной сетки

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.155.92.3

M	Error t_1	Error t_2	Error t_3
400	2.65932e-06	2.08191e-06	7.09721e-06
1000	2.78342e-06	2.17919e-06	7.43107e-06

Заключение

В данной работе построена и исследована разностная схема для квазилинейного параболического уравнения Ф-КПП. Получены двусторонние оценки разностного решения, доказаны монотонность и достаточное условие устойчивости рассмотренного метода в сеточном аналоге нормы C, проведен вычислительный эксперимент. Неизвестно является ли условие устойчивости необходимым условием. Результаты численного моделирования показывают, что устойчивость имеет место и при нарушении этих условий.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. / R.A. Fisher // The Annals of Human Genetics. — 1937. — Vol. 7. — 4. — P. 355–369. (accessed: 14.05.25).
2. Колмогоров А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме. / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюллетень МГУ, Серия А, Математика и механика. — 1937. — № 6. — С. 1–16.
3. Hotelling H.A. A mathematical theory of migration. / H.A. Hotelling // Environment and Planning A. — 1978. — Vol.10 — 11. — P. 1223–1239.
4. Yuan W. The general traveling wave solutions of the Fisher type equations and some related problems. / W. Yuan, B. Xiao, Y. Wu et al. // Journal of Inequalities and Applications. — 2014. — 2014:500.
5. Кудряшов Н.А. О точных решениях уравнений семейства Фишера. / Н.А. Кудряшов // Теоретическая и математическая физика. — 1993. — Vol.2 — 94. — С. 296–306.
6. Ильина К.П. Эффективный численный метод решения задачи Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова. / К.П. Ильина // Международный научно-исследовательский журнал. — 2023. — 3(129).
7. Barabash O.P. On a difference scheme for the Growth-Propagation Equation. / O.P. Barabash, M.V. Polovinkina, I.P. Polovinkin et al. // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol.44 — 3. — P. 989–992.
8. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — Москва: Наука, 1971. — 553 с.
9. Самарский А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — Москва: Наука. Физматлит, 1973. — 415 с.
10. Матус П.П. Монотонные разностные схемы повышенного порядка точности для параболических уравнений. / П.П. Матус, Б.Д. Утебаев // Доклады Национальной академии наук Беларуси. — 2020. — Vol. 64. 4. — С. 391–398.
11. Matus P.P Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations. / P.P Matus, L.M. Hieu, L.G. Vulkov // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — 310. — P. 186–199.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. / R.A. Fisher // The Annals of Human Genetics. — 1937. — Vol. 7. — 4. — P. 355–369. (accessed: 14.05.25).
2. Kolmogorov A.N. Issledovanie uravneniya diffuzii, soedinennoj s vozrastaniem veshhestva, i ego primenenie k odnoj biologicheskoj probleme [Investigation of the Equation of Diffusion Combined with Increasing of the Substance and Its Application to a Biology Problem]. / A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovskij, N.S. Piskunov // Bulletin of Moscow State University Series A: Mathematics and Mechanics. — 1937. — № 6. — P. 1–16. [in Russian]
3. Hotelling H.A. A mathematical theory of migration. / H.A. Hotelling // Environment and Planning A. — 1978. — Vol.10 — 11. — P. 1223–1239.
4. Yuan W. The general traveling wave solutions of the Fisher type equations and some related problems. / W. Yuan, B. Xiao, Y. Wu et al. // Journal of Inequalities and Applications. — 2014. — 2014:500.
5. Kudryashov N.A. O tochny'x resheniyax uravnenij semejstva Fishera [On exact solutions of the Fisher family equations]. / N.A. Kudryashov // Theoretical and Mathematical Physics. — 1993. — Vol.2 — 94. — P. 296–306. [in Russian]
6. Il'ina K.P. E'ffektivny'j chislenny'j metod resheniya zadachi Fishera-Kolmogorova-Petrovskogo-Piskunova [An efficient numerical method for solving the Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov problem]. / K.P. Il'ina // International Research Journal. — 2023. — 3(129). [in Russian]
7. Barabash O.P. On a difference scheme for the Growth-Propagation Equation. / O.P. Barabash, M.V. Polovinkina, I.P. Polovinkin et al. // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol.44 — 3. — P. 989–992.
8. Samarskij A.A. Vvedenie v teoriyu raznostny'x sxem [Introduction to the Theory of Difference Schemes] / A.A. Samarskij, A.V. Gulin. — Moscow: Nauka, 1971. — 553 p. [in Russian]
9. Samarskij A.A. Ustojchivost' raznostny'x sxem [Stability of difference schemes] / A.A. Samarskij, A.V. Gulin. — Moscow: Nauka. Fizmatlit, 1973. — 415 p. [in Russian]

10. Matus P.P. Monotonny'e raznostny'e sxemy' povy'shennogo poryadka tochnosti dlya parabolicheskix uravnenij [Monotone difference schemes of higher accuracy for parabolic equations]. / P.P. Matus, B.D. Utebaev // Reports of the National Academy of Sciences of Belarus. — 2020. — Vol. 64. 4. — P. 391–398. [in Russian]

11. Matus P.P Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations. / P.P Matus, L.M. Hieu, L.G. Vulkov // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — 310. — P. 186–199.