

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ
ПРОГРАММ/MATHEMATICAL MODELING, NUMERICAL METHODS AND PROGRAM COMPLEXES**

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.81>

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВТОРОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Научная статья

Канушин В.Ф.¹, Голдобин Д.Н.², Ганагина И.Г.^{3,*}, Инжеватов И.А.⁴

¹ ORCID : 0000-0001-7057-1595;

² ORCID : 0000-0002-2678-7636;

³ ORCID : 0000-0002-8543-8276;

⁴ ORCID : 0009-0002-2358-4275;

^{1, 2, 3, 4} Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (gam0209[at]yandex.ru)

Аннотация

Рассмотрены два метода вычисления второго градиента аномалии силы тяжести (ВГАСТ). В первом методе используется конечноразностная схема трехточечного шаблона, в котором аномалии силы тяжести расположены вдоль вертикальной оси симметрично относительно результирующей точки. Во втором методе использовано разложение в ограниченный ряд Фурье по сферическим функциям. Исходными данными являются коэффициенты модели геопотенциала EIGEN-6C4. Приведены результаты определения ВГАСТ по разностям значений аномалий силы тяжести на физической поверхности Земли, вычисленных на разной высоте, и, полученным по модели EIGEN-6C4. Установлено, что максимальное расхождение между рассмотренными методами получения второго градиента по аномалии равно $65,7178 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-2}$, что составляет 0, 4% от максимальных значений второго градиента. Затраты машинного времени во втором методе уменьшаются в 10 раз.

Ключевые слова: второй вертикальный градиент, аномалия сила тяжести, численное дифференцирование, разложение в ряд по сферическим функциям.

METHODS FOR CALCULATING THE SECOND VERTICAL GRADIENT OF GRAVITY ANOMALIES

Research article

Kanushin V.F.¹, Goldobin D.N.², Ganagina I.G.^{3,*}, Inzhevatov I.A.⁴

¹ ORCID : 0000-0001-7057-1595;

² ORCID : 0000-0002-2678-7636;

³ ORCID : 0000-0002-8543-8276;

⁴ ORCID : 0009-0002-2358-4275;

^{1, 2, 3, 4} Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation

* Corresponding author (gam0209[at]yandex.ru)

Abstract

Two methods for calculating the second gravity anomaly gradient (SGAG) are discussed. The first method uses the finite-difference scheme of the three-point template, in which the gravity anomalies are arranged along the vertical axis symmetrically with respect to the resultant point. In the second method, a bounded Fourier series expansion on spherical functions is used. The input data are the coefficients of the EIGEN-6C4 geopotential model. The results of determining the SGAG by the differences between the values of gravity anomalies on the physical surface of the Earth calculated at different altitudes and those obtained from the EIGEN-6C4 model are presented. It was found that the maximum discrepancy between the studied methods of obtaining the second anomaly gradient is $65.7178 \cdot 10^{-14} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2}$, which is 0, 4% of the maximum values of the second gradient. Machine time costs are 10 times less in the second method.

Keywords: second vertical gradient, gravity anomaly, numerical differentiation, spherical function series expansion.

Введение

В настоящее время очевидными являются успехи в моделировании характеристик ГПЗ различными методами на основе гармонических коэффициентов современных глобальных моделей геопотенциала.

На протяжении нескольких десятилетия гармонический анализ и синтез занимает ведущее место при обработке глобальных данных о гравитационном поле Земли. Он используется для изучения структуры гравитационного поля и его трансформант, выявляет особенности полученных результатов.

Однако остается нерешенной задача определения аномалий силы тяжести, высот квазигеоида и уклонений отвесной линии с высокой точностью, порядка 1 см, 1 мГал и 0,1" соответственно, на территории Российской Федерации. Исследование современных моделей ГПЗ показало неудовлетворительные по точности и разрешающей способности результаты определения перечисленных характеристик. Особые проблемы вызывает создание помехозащищенных навигационных систем и навигационных гравиметрических карт высокого разрешения [1], [2], решение высокоточных задач геодезии, поиск и разведка полезных ископаемых, моделирование остаточных и точечных гравитационных возмущений, таких как горные хребты, границы тектонических плит и особые характеристики точки земной поверхности.

Учитывая перечисленные сложности, растущий рост исследований и необходимость повышения точности вычисления характеристик гравитационного поля Земли глобального, регионального и локального масштаба, возобновлен интерес к новым решениям получения характеристик гравитационного поля: первого и второго градиентов потенциала, первого и второго вертикальных градиентов аномалий силы тяжести (ВГАСТ) [3]. Следует заметить, что градиенты аномалии силы тяжести обладают высокой чувствительностью к влиянию небольших и неглубоких аномальных масс. Однако непосредственно из измерений может быть определен только вертикальный градиент силы тяжести, а первый и второй вертикальные градиенты аномалий силы тяжести могут быть найдены путем пересчета аномалий силы тяжести (АСТ) на разные высоты.

В физической геодезии значение второго ВГАСТ используется для вычисления поправочного члена второго порядка теории М. С. Молоденского [4], [5]. Существует несколько методов вычисления второго градиента АСТ [6], [7]. Эти методы делятся на конечноразностные, аппроксимационные и условные [8].

В данной работе сравниваются два метода получения второго градиента. В первом используется конечноразностная схема трехточечного шаблона вычисления АСТ на разные высоты, в котором значения расположены вдоль вертикальной оси симметрично относительно результативной точки. Во втором методе вычисление выполняется с помощью гармонического синтеза по данным модели геопотенциала EIGEN-6C4 [11].

Методы и принципы исследования

В условиях плоской аппроксимации аномалия силы тяжести удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Для определения второго вертикального градиента $\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial z^2}$, согласно уравнению (1), можно использовать следующую формулу [4]

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial z^2} = - \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta g}{\partial y^2} \right). \quad (2)$$

При преобразовании вторых производных Δg к горизонтальной плоскости xy необходимо перейти от прямоугольных координат к полярным, т. е.

$x=r \cos A$ и $y=r \sin A$, где r — радиус-вектор и A — азимут.

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial x^2} = \iint \frac{\Delta g}{r^2} (1 - 3 \cos^2 A) dr dA \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial y^2} = \iint \frac{\Delta g}{r^2} (1 - 3 \sin^2 A) dr dA \quad (4)$$

Подставляя в формулу (1) выражения (3) и (4) получим

$$\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial z^2} = - \iint \frac{\Delta g}{r^2} dr dA \quad (5)$$

Однако вычисление интеграла в формуле (5) затруднено тем, что при $r=0$ подынтегральное выражение обращается в бесконечность. В связи с этим формула (5) нуждается в преобразовании.

Наиболее простым и широко применяемым для приближенного вычисления второго ВГАСТ является метод численного дифференцирования уравнения (1) путем применения конечноразностных формул [9], [10].

В этом случае производные в формуле (1) заменяются приближенными алгебраическими конечноразностными соотношениями.

Для вычисления второго градиента, используется конечноразностная схема трехточечного шаблона, в котором аномалии силы тяжести Δg расположены вдоль вертикальной оси симметрично относительно результативной точки $P(0,0,0)$ с шагом по высоте h , в интервале $[(0,0,-h) < (0,0,0) < (0,0,+h)]$.

В соответствии с этим шаблоном второй градиент вычисляется как первая производная от первой производной следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta g(0,0,0)}{\partial z^2} &= \partial \Delta g(0,0,0) \partial z \left(\frac{\partial \Delta g(0,0,0)}{\partial z} \right) = \frac{\frac{\partial \Delta g}{\partial z}(0,0,h) - \frac{\partial \Delta g}{\partial z}(0,0,-h)}{2h} = \\ &= \frac{\frac{\Delta g(0,0,+2h) - \Delta g(0,0,0)}{2h} - \frac{\Delta g(0,0,0) - \Delta g(0,0,-2h)}{2h}}{2h} = \\ &= \frac{\Delta g(0,0,+2h) - 2\Delta g(0,0,0) + \Delta g(0,0,-2h)}{2h^2} = \\ &= \frac{\Delta g(0,0,-h) - 2\Delta g(0,0,0) + \Delta g(0,0,+h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Окончательная расчетная формула примет вид

$$\frac{\partial^2 \Delta g(0,0,0)}{\partial z^2} \approx (\Delta g(0,0,-h) - 2\Delta g(0,0,0) + \Delta g(0,0,+h))/h^2. \quad (7)$$

Для вычисления Δg , расположенных вдоль вертикальной оси в точках $P(0,0,-h)$, $P(0,0,0)$ и $P(0,0,+h)$, использовано разложение в ряд:

$$\Delta g(P) = \frac{fM}{r^2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (n-1) \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (8)$$

где fM — геоцентрическая гравитационная постоянная;

N — предельная степень разложения;

a_e — экваториальный радиус Земли;

$r=R+H$ — радиус-вектор точки $P(0,0,0)$ на земной поверхности с координатами φ и λ (геоцентрическая широта и долгота точки);

R — средний радиус Земли;

H — высота точки;

$\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{n0}^0$ — разность коэффициентов сферических функций реального и нормального поля силы тяжести;

$\Delta \bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm} - \bar{S}_{n0}^0$ — гармонические коэффициенты нормального геопотенциала, при этом \bar{S}_{n0}^0 . Гармонические коэффициенты геопотенциала отнесены к эллипсоиду WGS-84 и являются нормированными.

Вычисления Δg по формуле (8) определяются в сферической системе координат (φ, λ, r) , поэтому в конечноразностной схеме трехточечного шаблона использована та же система координат. Тогда формулу (7) для вычисления второго градиента методом численного дифференцирования представим в следующем виде

$$\frac{\partial^2 \Delta g(\varphi, \lambda, r)}{\partial r^2} \approx \frac{(\Delta g(\varphi, \lambda, r - \Delta r) - 2\Delta g(\varphi, \lambda, r) + \Delta g(\varphi, \lambda, r + \Delta r))}{\Delta r^2}, \quad (9)$$

где Δr — изменение r , которое соответствует шагу по высоте h в схеме трехточечного шаблона в прямоугольной системе координат (7).

В результате вычисления по формуле (8), используя коэффициенты модели EIGEN-6C4, при $\Delta r=0$ получены глобальные Δg (рисунок 1) [11], [12]. Вычисления выполнены по программе, разработанной в лаборатории физической геодезии СГУГИТ [13].

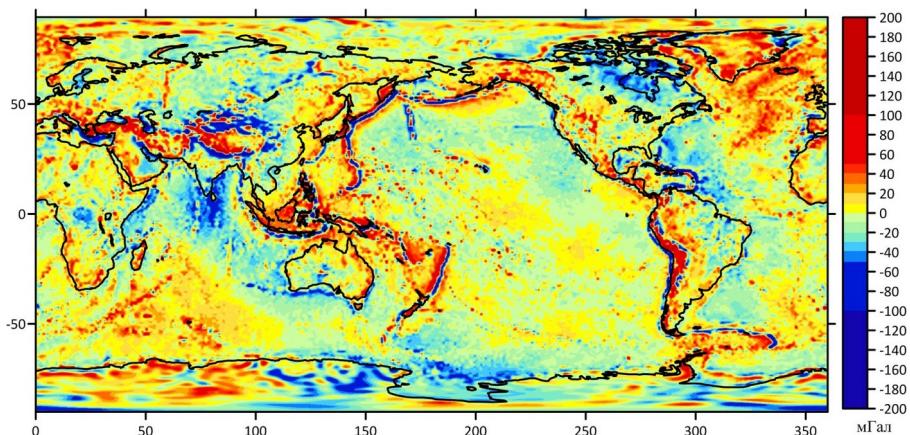


Рисунок 1 - Глобальные Δg , вычисленные по формуле (8) при $\Delta r=0$

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.81.1>

Изменив радиус-вектор r на $\Delta r=\pm 1$ метр, по формуле (8) вычислены глобальные значения Δg : $\Delta g(\varphi, \lambda, r - \Delta r)$ и $\Delta g(\varphi, \lambda, r + \Delta r)$.

Визуализация результатов вычисления ВГАСТ, полученных по формуле (9), в которой использованы значения: $\Delta g(\varphi, \lambda, r - \Delta r)$ при $\Delta r=-1$ м, $\Delta g(\varphi, \lambda, r)$ при $\Delta r=0$ и $\Delta g(\varphi, \lambda, r + \Delta r)$ при $\Delta r=+1$ м, вычисленные по формуле (8), показана на рисунке 2.

Изменения значений $\frac{\delta^2 \Delta g(P)}{\delta r^2}$ находятся в диапазоне от $-1,121 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-2}$ до $+0,156 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-2}$.

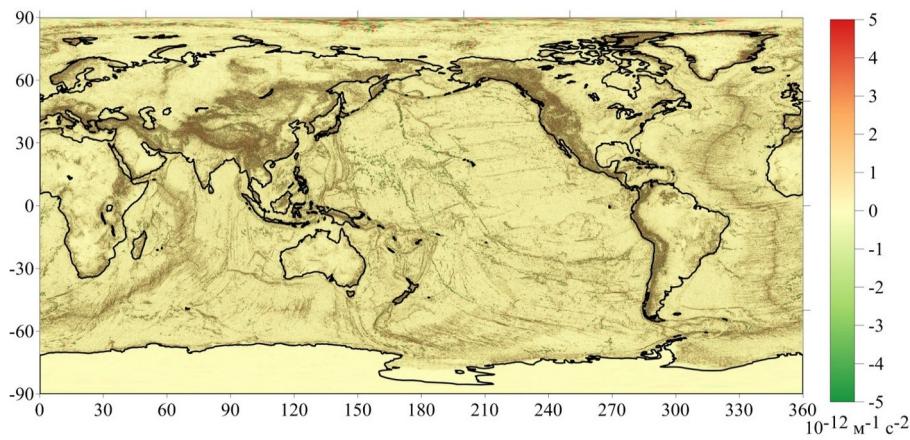


Рисунок 2 - Визуализация результатов, полученных по формуле (9)

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.81.2>

Примечание: изменения значений $(\partial^2 \Delta g(P)) / (\partial r^2)$ ограничены диапазоном от $-0,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-1} \text{c}^{-2}$ до $+5,0 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-1} \text{c}^{-2}$

Изменения значений $\frac{\partial^2 \Delta g(P)}{\partial r^2}$ ограничены диапазоном от $-0,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-1} \text{c}^{-2}$ до $+5,0 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-1} \text{c}^{-2}$.

В горных областях земной поверхности значения $\frac{\partial^2 \Delta g(P)}{\partial r^2}$ весьма значительны (рисунок 3).

Далее рассмотрен метод определения второго градиента ACT с помощью разложения в ограниченный ряд по сферическим функциям, в котором использованы коэффициенты модели геопотенциала EIGEN-6C4 до степени N=2190 [11].

Так как второй вертикальный градиент ACT является третьим градиентом от аномального потенциала, то:

$$\frac{\partial^3 T(P)}{\partial r^3} = \frac{fM}{r^4} \left\{ \sum_{n=0}^N \left[(n+1)(n+2)(n+3) \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{mn}(\sin \varphi) \right] \right\}, \quad (10)$$

где $T(P)$ — аномальный потенциал (разность между реальным и нормальным потенциалами Земли).

Изменения третьего градиента от аномального потенциала $\frac{\partial^3 T(P)}{\partial r^3}$ находятся в диапазоне от $-1,121 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1} \text{c}^{-2}$ до $+0,156 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1} \text{c}^{-2}$.

На рисунке 3 представлена визуализация результатов вычисления второго вертикального градиента ACT (третьего градиента от аномального потенциала), полученных по формуле (10) с помощью программы, разработанной в лаборатории СГУГИТ [14].

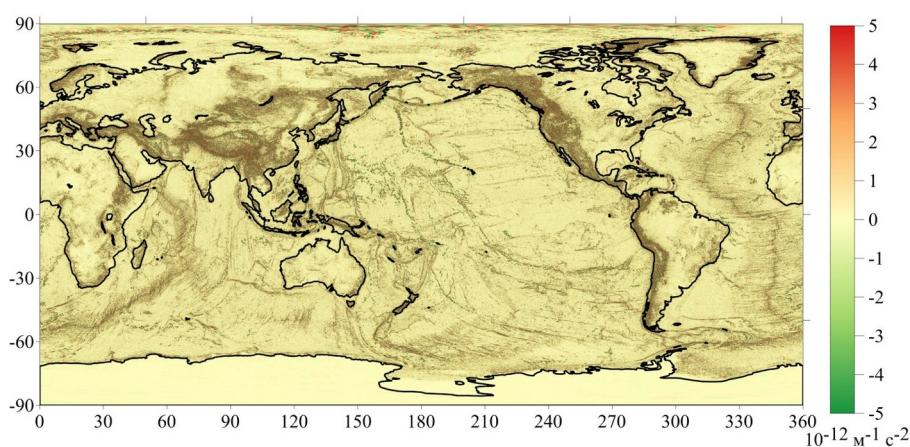


Рисунок 3 - Визуализация результатов вычисления $(\partial^3 T(P)) / (\partial r^3)$, полученных по формуле (10)

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.81.3>

Примечание: изменения $(\partial^3 T(P)) / (\partial r^3)$ ограничены диапазоном от $-0,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-1} \text{c}^{-2}$ до $+5,0 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-1} \text{c}^{-2}$

Сравнительный анализ позволяет сделать вывод об идентичности результатов, представленных на рисунках 2 и 3. На рисунке 4 представлено распределение разности ΔG на земной поверхности между вторыми вертикальными градиентами Δg , полученными по формулам (9) и (10):

$$\Delta G = \frac{\partial^2 \Delta g(P)}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 T(P)}{\partial r^3} \quad (11)$$

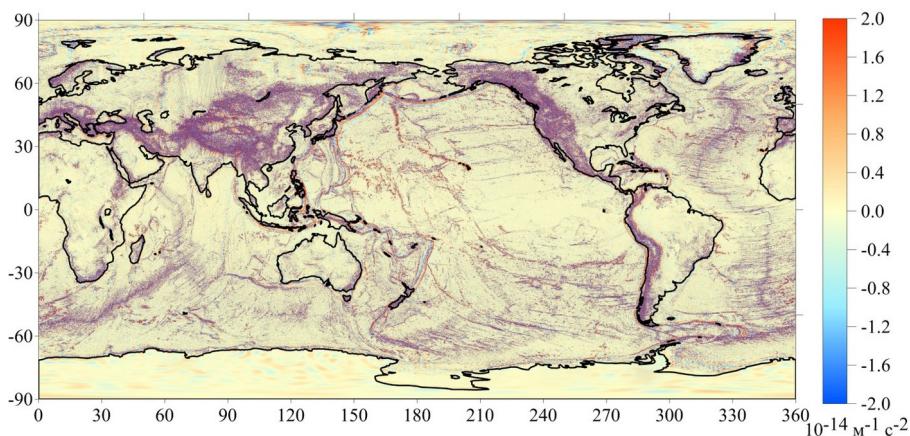


Рисунок 4 - Распределение разности ΔG между вторыми вертикальными градиентами, полученными по формулам (9) и (10)

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.81.4>

Анализируя рисунок 4, можно сделать вывод, что модальные значения распределения разностей ΔG , полученных по формуле (11), находятся в диапазоне от $-2,0 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-1} \text{с}^{-2}$ до $+2,0 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-1} \text{с}^{-2}$.

Гистограмма распределения значений (рисунок 5) по характеру соответствует почти нормальному закону: 79% значений находится в диапазоне от $-1,0 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-1} \text{с}^{-2}$ до $+1 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-1} \text{с}^{-2}$.

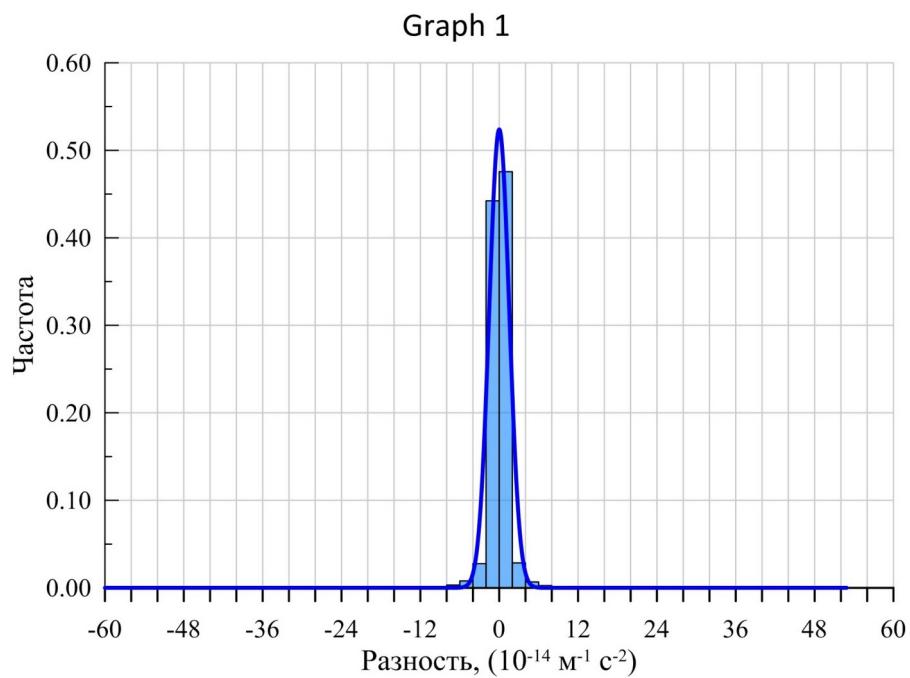


Рисунок 5 - Гистограмма распределения значений ΔG

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.81.5>

Анализ статистического распределения значений показал, что максимальное абсолютное значение ΔG равно $65,7178 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-1} \text{с}^{-2}$ и составляет 0,4% от максимального абсолютного значения второго вертикального градиента ACT (равного $15\ 600 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-1} \text{с}^{-2}$), полученного по формулам (9) и (10). Среднее арифметическое значение ΔG равно $0,005554 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-1} \text{с}^{-2}$, а стандартное отклонение – $\sigma=1,523213 \cdot 10^{-14} \text{ м}^{-1} \text{с}^{-2}$.

Заключение

Для решения фундаментальных и прикладных задач, связанных с определением высокоточных характеристик гравитационного поля, получен второй вертикальный градиент АСТ.

Сравнение результата конечноразностной схемы трехточечного шаблона, в котором расположены вдоль вертикальной оси оз симметрично относительно результативной точки, с результатами гармонического синтеза показало расхождение в 0,4% от максимальных значений второго градиента по аномалии.

Определение данной характеристики гравитационного поля возможно любым из рассмотренных методов. Применение гармонического анализа приводят к уменьшению затрат машинного времени в 10 раз.

Финансирование

Контракт СЧ НИР «Геотех-Квант».

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Деменченок О.Г., Восточно-Сибирский институт МВД России, Иркутск Российской Федерации

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.81.6>

Funding

"Geotech-Kvant-2" Research and Development Contract.

Conflict of Interest

None declared.

Review

Demenchenok O.G., East-Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of the Russian Federation, Irkutsk Russian Federation

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.156.81.6>

Список литературы / References

1. Донченко С.И. Обзор методов и средств спутниковой градиентометрии и постановка задачи исследований возможности многоспутниковой гравиметрической системы на основе наноспутников / С.И. Донченко, В.Ф. Фатеев, В.П. Лопатин [и др.] // Альманах современной метрологии. — Менделеево : ВНИИФТРИ, 2024. — № 1 (37). — С. 8–51.
2. Донченко С.И. Теоретическое обоснование и исследование методов измерения первого, второго и третьего градиентов гравитационного потенциала в кластере наноспутников по прямым сигналам ГНСС / С.И. Донченко, В.Ф. Фатеев, Р.А. Давлатов // Альманах современной метрологии. — Менделеево : ВНИИФТРИ, 2024. — № 1 (37). — С. 60–79.
3. Маловичко А.К. Исследование по аналитическому продолжению гравитационных аномалий / А.К. Маловичко // Труды НИИГАиК. — Новосибирск : Изд. НИИГАиК, 1951. — Т. IV. — 28 с.
4. Мориц Г. Современная физическая геодезия / Г. Мориц. — Москва : Недра, 1983. — 392 с.
5. Молоденский М.С. Исследование решения задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли / М.С. Молоденский // Труды ЦНИИГАиК. — Москва : Геодезиздат, 1956. — № 112. — С. 3–8.
6. Юркина М.И. Вычисление первой и второй вертикальных производных силы тяжести по картам ее аномалий / М.И. Юркина // Труды ЦНИИГАиК. — Москва: Геодезиздат, 1965. — № 157. — С. 116–124.
7. Керимов И.А. Вычисление высших производных гравитационного потенциала на основе F-аппроксимации / И.А. Керимов // Геология и Геофизика Юга России. — Владикавказ : ВНЦ РАН, 2016. — Т. 6. — № 3. — С. 65–84.
8. Маловичко А.К. Детальная гравиразведка на нефть и газ / А.К. Маловичко, В.И. Костицын, О.Л. Тарунина. — Москва : Недра, 1979. — 190 с.
9. Русаков С.В. Численные методы: курс лекций : учебное пособие / С.В. Русаков, М.М. Бузмакова. — Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2020. — Ч. 2. — 112 с.
10. Блох Ю.И. Обнаружение и разделение гравитационных и магнитных аномалий: Учебное пособие / Ю.И. Блох. — Москва : Московская Государственная Геологоразведочная академия имени Серго Орджоникидзе, 1995. — 80 с.
11. ICGEM-International Center for Global Gravity Field Models. — URL: <https://icgem.gfz-potsdam.de/home> (accessed: 27.01.2025).
12. Канушин В.Ф. Исследование современных глобальных моделей гравитационного поля Земли: монография / В.Ф. Канушин, А.П. Карпик, И.Г. Ганагина [и др.]. — Новосибирск: СГУГиТ, 2015. — 150 с.
13. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2015661196 Российской Федерации. Geoanom ver 1.0 / Д.Н. Голдобин, В.Ф. Канушин, И.Г. Ганагина; заявитель и правообладатель Сибирский государственный университет геосистем и технологий. — 2015617768; заявл. 28.08.2015; опубл. 20.11.2015. — 1 с.
14. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2017614543 Российской Федерации. Geo_vagrd ver. 1.0 / Д.Н. Голдобин, В.Ф. Канушин; заявитель и правообладатель Сибирский государственный университет геосистем и технологий. — 2017610069; заявл. 10.01.2017; опубл. 19.04.2017. — 1 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Donchenko S.I. Obzor metodov i sredstv sputnikovoj gradientometrii i postanovka zadachi issledovanij vozmozhnosti mnogosputnikovoj gravimetriceskoj sistemy na osnove nanosputnikov [Review of methods and means of satellite gradientometry and statement of the research problem on the possibility of multi-satellite gravimetric system based on nanosatellites] / S.I. Donchenko, V.F. Fateev, V.P. Lopatin [et al.] // Al'manah sovremennoj metrologii [Almanac of Modern Metrology]. — Mendelevо : VNIIFTRI, 2024. — № 1 (37). — P. 8–51. [in Russian]
2. Donchenko S.I. Teoreticheskoe obosnovanie i issledovanie metodov izmerenija pervogo, vtorogo i tret'ego gradientov gravitacionnogo potenciala v klastere nanosputnikov po prjamym signalam GNSS [Theoretical substantiation and research of

methods for measuring the first, second and third gradients of the gravitational potential in a cluster of nanosatellites using direct GNSS signals] / S.I. Donchenko, V.F. Fateev, R.A. Davlatov // Al'manah sovremennoj metrologii [Almanac of Modern Metrology]. — Mendeleevo : VNIIFTRI, 2024. — № 1 (37). — P. 60–79. [in Russian]

3. Malovichko A.K. Issledovanie po analiticheskому prodolzheniju gravitacionnyh anomalij [Study on the analytical continuation of gravity anomalies] / A.K. Malovichko // Trudy NIIGAiK [Proceedings of NIIGAiK]. — Novosibirsk : Publishing House NIIGAiK, 1951. — Vol. IV. — 28 p. [in Russian]

4. Moric G. Sovremennaja fizicheskaja geodezija [Modern physical geodesy] / G. Moric. — Moscow : Nedra, 1983. — 392 p. [in Russian]

5. Molodenskij M.S. Issledovanie reshenija zadachi Stoksa s otnositel'noj pogreshnost'ju porjadka kvadrata szhatija Zemli [Investigation of the solution of the Stokes problem with a relative error of the order of the square of the Earth's compression] / M.S. Molodenskij // Trudy CNIIGAiK [Proceedings of CNIIGAiK]. — Moscow : Geodezizdat, 1956. — № 112. — P. 3–8. [in Russian]

6. Jurkina M.I. Vychislenie pervoj i vtoroj vertikal'nyh proizvodnyh sily tjazhesti po kartam ee anomalij [Calculation of the first and second vertical derivatives of gravity from maps of its anomalies] / M.I. Jurkina // Trudy CNIIGAiK [Proceedings of CNIIGAiK]. — Moscow: Geodezizdat, 1965. — № 157. — P. 116–124. [in Russian]

7. Kerimov I.A. Vychislenie vysshih proizvodnyh gravitacionnogo potenciala na osnove F-approksimacii [Calculation of higher derivatives of the gravitational potential on the basis of F-approximation] / I.A. Kerimov // Geologija i Geofizika Juga Rossii [Geology and Geophysics of the South of Russia]. — Vladikavkaz : VSC RAS, 2016. — Vol. 6. — № 3. — P. 65–84. [in Russian]

8. Malovichko A.K. Detal'naja gravirazvedka na neft' i gaz [Detailed gravity exploration for oil and gas] / A.K. Malovichko, V.I. Kosticyn, O.L. Tarunina. — Moscow : Nedra, 1979. — 190 p. [in Russian]

9. Rusakov S.V. Chislennye metody: kurs lekcij : uchebnoe posobie [Numerical methods: a course of lectures : textbook] / S.V. Rusakov, M.M. Buzmakova. — Perm: Permskij gosudarstvennyj nacional'nyj issledovatel'skij universitet [Perm State National Research University], 2020. — Pt. 2. — 112 p. [in Russian]

10. Bloh Ju.I. Obnaruzhenie i razdelenie gravitacionnyh i magnitnyh anomalij: Uchebnoe posobie [Detection and separation of gravitational and magnetic anomalies: Manual] / Ju.I. Bloh. — Moscow : Moscow State Geological Exploration Academy named after Sergo Ordzhonikidze, 1995. — 80 p. [in Russian]

11. ICGEM-International Center for Glodal Gravity Field Models. — URL: <https://icgem.gfz-potsdam.de/home> (accessed: 27.01.2025).

12. Kanushin V.F. Issledovanie sovremennyh global'nyh modelej gravitacionnogo polja Zemli: monografija [Study of modern global models of the Earth's gravitational field: monograph] / V.F. Kanushin, A.P. Karpik, I.G. Ganagina [et al.]. — Novosibirsk: SGUGiT, 2015. — 150 p. [in Russian]

13. Svidetel'stva o gosudarstvennoj registracii programm dlja JeVM 2015661196 Rossijskaja Federacija. Geoanom ver 1.0 [Certificates of state registration of computer programmes 2015661196 Russian Federation. Geoanom ver 1.0] / D.N. Goldobin, V.F. Kanushin, I.G. Ganagina; applicant and right holder Siberian State University of Geosystems and Technologies. — 2015617768; appl. 28.08.2015; publ. 20.11.2015. — 1 p. [in Russian]

14. Svidetel'stva o gosudarstvennoj registracii programm dlja JeVM 2017614543 Rossijskaja Federacija. Geo_vagrd ver. 1.0 [Certificates of state registration of computer programmes 2017614543 Russian Federation. Geo_vagrd ver. 1.0] / D.N. Goldobin, V.F. Kanushin; applicant and right holder Siberian State University of Geosystems and Technologies.. — 2017610069; appl. 10.01.2017; publ. 19.04.2017. — 1 p. [in Russian]