ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА/DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.154.88

ОБ ОЦЕНКЕ ГРУППЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА, УМНОЖЕННОГО НА КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ, И ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ТРЁХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Научная статья

Сучков М.В.[1,] *, Трифоненков В.П.[2]
[1, 2] Национальный Исследовательский Ядерный Университет «МИФИ», Москва, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (mv_suchkov[at]mail.ru)

Аннотация

В статье рассматривается задача на собственные функции оператора Лапласа, умноженного на кусочно-постоянный коэффициент, и задача Дирихле в трёхмерной области. Получена оценка группы собственных функций в замкнутой области (так называемой, «пачки» по терминологии В.А. Ильина, то есть части спектральной функции, когда обе точки совпадают) и асимптотика спектральной функции, когда одна точка находится на поверхности разрыва коэффициента, а другая вне этой поверхности. Оценка и асимптотика найдены с точностью до логарифмического множителя. Из доказанных оценки и асимптотики получены равномерная оценка группы собственных функций во всей замкнутой области, а также равномерная асимптотическая оценка спектральной функции.

Ключевые слова: оператор Лапласа с разрывным коэффициентом, задача Дирихле, собственные функции, спектральная функция.

ON THE EVALUATION OF THE GROUP OF EIGENFUNCTIONS AND SPECTRAL FUNCTION OF THE LAPLACE OPERATOR MULTIPLIED BY A PIECEWISE CONSTANT COEFFICIENT AND THE DIRICHLET PROBLEM IN THE THREE-DIMENSIONAL DOMAIN

Research article

Suchkov M.V.[1,] *, Trifonenkov V.P.[2]
[1, 2] National Research Nuclear University "MEPhI", Moscow, Russian Federation

* Corresponding author (mv_suchkov[at]mail.ru)

Abstract

The article examines the problem on the eigenfunctions of the Laplace operator multiplied by a piecewise constant coefficient and the Dirichlet problem in the three-dimensional domain. The evaluation of the group of eigenfunctions in a closed region (the so-called "bundle" in the terminology of V.A. Ilyin, i.e. a part of the spectral function when both points coincide) and the asymptotics of the spectral function when one point is on the surface of the coefficient discontinuity and the other is outside this surface are obtained. The estimate and asymptotics are found to the accuracy of the logarithmic multiplier. From the proved estimation and asymptotics, a uniform estimation of the group of eigenfunctions in the whole closed region and a uniform asymptotic estimation of the spectral function are obtained.

Keywords: Laplace operator with discontinuous coefficient, Dirichlet problem, eigenfunctions, spectral function.

Введение

В настоящей статье изучаются свойства спектральных разложений, отвечающих самосопряжённому оператору, который получается умножением оператора Лапласа на кусочно-постоянный коэффициент (задача Дирихле). Разрыв коэффициента происходит на достаточно гладкой замкнутой поверхности C, лежащей внутри исходной области g. В работе [1] показывается, что, если размерность N области g равна 2 или 3, то на области, принадлежащие g и «далёкие» от точек разрыва (т.е. замыкание этих областей не содержит точек разрыва), переносятся классические теоремы В.А. Ильина о локализации и равномерной сходимости спектральных разложений, отвечающих оператору Лапласа и задаче Дирихле [2], [3], [4]. Если же $N \geq 5$, то ситуация совершенно другая. В той же работе [1] приведён пример сколь угодно гладкой функции $f(x)$, финитной относительно области g (область g — шар с центром в начале координат), обращающейся в нуль в некоторой окрестности начала координат и такой, что её ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа, умноженного на кусочно-постоянный коэффициент (задача Дирихле) расходится в начале координат. Разумеется, если рассматривать не гладкие функции, а функции, удовлетворяющие тем же условиям сопряжения, что и разрывные коэффициенты, то классические теоремы будут верны и при $N \geq 5$. Случай $N=4$ до конца не исследован. В работе [5] рассматривается случай $N=2$, $f(x) \in \mathring{W}_2^{1+\varepsilon}(g)$, $\varepsilon>0$. С помощью метода интерполяции пространств доказывается абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье по собственным функциям изучаемого оператора Лапласа, умноженного на кусочно-постоянный коэффициент в замкнутой области $\overline{g}$ (в том числе и в точках разрыва). При этом число $\varepsilon>0$ в классах Соболева убрать нельзя, так как функция из класса $W_2^1(g)$ для $N=2$ не обязана быть непрерывной и поэтому не может быть равномерной сходимости к ней ряда Фурье по непрерывным собственным функциям. Кроме того, отсутствие разрывов показывает, что для функций из класса $W_2^1(g)$ (даже $C^1(\overline{g})$) нельзя гарантировать абсолютной сходимости ряда Фурье.

Целью настоящей работы является исследование поведения спектральных разложений для *N=3* на поверхности разрыва коэффициента. В ней приведена оценка групп собственных функций («пачки», по терминологии В.А. Ильина), играющая большую роль в его методе и спектральной функции. С помощью этих оценок авторы в дальнейшем надеются получить некоторые результаты, связанные со сходимостью спектральных разложений при *N=3* на поверхности разрыва коэффициентов.

Основная часть

Пусть трёхмерная область g с границей Г разбивается некоторой лежащей внутри нее замкнутой поверхностью *C* на две подобласти g_1, лежащую внутри *C*, и g_2. Рассмотрим в (g+Г) задачу Дирихле

$$\begin{gathered} k_1\Delta u+\lambda u=0; x\in g_1 \\ k_2\Delta u+\lambda u=0; x\in g_2 \\ u|_{C-0}=u|_{C+0};\ k_1\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{C-0}=k_2\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{C+0};\ u|_{\Gamma}=0 \end{gathered} \qquad (1)$$

k_1, k_2 — положительные постоянные. Символы *C-0* и *C+0* означают предельные значения, соответственно, с внутренней и внешней стороны поверхности *C* по отношению к области g_1; $C,\ \Gamma\in C^{2,\alpha}(\alpha>0)$.

Классической собственной функцией задачи (1) называется функция *u(x)* такая, что:

1) $u(x)\not\equiv 0$;
2) $u(x)\in C^1(g_1+C)\wedge C^2(g_1)$;
3) $u(x)\in C^1(g_2+C+\Gamma)\wedge C^2(g_2)$;
4) $u(x)\in C(g+\Gamma)$;
5) *u(x)* при некотором λ удовлетворяет всем условиям задачи (1).

Из работы [3] известно, что задача (1) имеет дискретный спектр, состоящий из положительных собственных значений λ_n (с единственной бесконечно удаленной предельной точкой), которым соответствует полная ортонормированная в $L_2(g)$ система собственных функций $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Причём эта система совпадает с системой обобщенных собственных функций задачи (1) (удовлетворяющих некоторому интегральному тождеству).

Работа является продолжением цикла статей авторов, связанного с этим оператором. Так, в работе [6] доказана равномерная сходимость спектральных разложений в замкнутой области $\bar{g}$ для $f(x)\in W_2^{1+\varepsilon}(g)$; $\varepsilon>0$; $f|_{\Gamma}=0$; $N=2$. В этой теореме по сравнению с отсутствием разрыва требования гладкости завышены на 1/2+ε; (ε>0). Для того чтобы в дальнейшем уменьшить эти требования гладкости, используя метод В.А. Ильина, в статье устанавливается оценка «пачки» собственных функций и асимптотика спектральной функции, когда одна точка принадлежит поверхности разрыва коэффициента, а другая вне этой поверхности.

Основные результаты

Теорема. Пусть точка $x_0\in C$. Тогда для любого $\mu_0\geq 1$

$$\sum_{\left|\sqrt{\lambda_k}-\mu_0\right|\leq 1}\left|e_k^2(x_0)\right|\leq C_1\mu_0^2\ln(1+\mu_0) \qquad (2)$$

где C_1 не зависит ни от μ_0, ни от $x_0\in C$.

Доказательство.

Отметим, что при $k_1=k_2$ (отсутствие разрыва) оценка (2) даже в замкнутой области $\bar{g}(x_0\in\bar{g})$ получена в [7]. Поэтому, с самого начала будем предполагать, что $k_1\neq k_2$. Воспользуемся методом Е.И. Моисеева из этой работы [7], где устанавливается равномерная сходимость некоторых разложений в замкнутой области. Так как λ_n не имеет конечных точек сгущения, то оценку (2) нужно доказывать только для достаточно большого μ_0. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{gathered} k_1\Delta u_1+\mu^2u_1=f;\quad x\in g_1 \\ k_2\Delta u_2+\mu^2u_2=f;\quad x\in g_2 \\ u_1|_{C-0}=u_2|_{C+0};\quad k_1\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{C-0}=k_2\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{C+0};\quad u_2|_{\Gamma}=0 \\ u=\begin{cases} u_1; x\in\bar{g}_1 \\ u_2; x\in g_2; \end{cases}\ f\in L_2(g);\quad \mu=\mu_0+ia; a>0, a-\text{ фиксировано.} \end{gathered} \qquad (3)$$

Из работ [3], [8] вытекает, что обобщённое решение *u(x)* задачи (3), удовлетворяющее некоторому интегральному тождеству (и, для достаточно гладких *f*, являющееся классическим решением задачи (3)), принадлежит $\mathring{W}_2^1(g)\wedge C(\bar{g})$. Причём $u_i(x)\in W_2^2(g_i)$; *i=1, 2;* $u(x_0)=\int_g R(x_0,y,\mu)f(y)dy$, где $R(x_0,y,\mu)\in L_2(g)$ по переменной *y* при фиксированных μ и x_0. Тогда:

$$e_k(x_0)=\int_g R(x_0,y,\mu)e_k(y)dy\cdot[\mu^2-\lambda_k] \qquad (4)$$

Из (4) и неравенства Бесселя следует, что:

$$\sum_{\left|\sqrt{\lambda_k}-\mu_0\right|\le 1}\left|e_k^2\left(x_0\right)\right| \le C_2\mu_0^2\int_g\left|R\left(x_0,y,\mu\right)\right|^2 dy;\ C_2>0 \tag{5}$$

Поэтому для доказательства (2) достаточно установить равномерно по $x_0 \in C$ оценку

$$\int_g |R(x_0,y,\mu)|^2 dy \le C_0 ln\ \mu_0; C_0>0 \tag{6}$$

В свою очередь, (6) вытекает из оценки

$$\sup_{x_0\in C}|u\left(x_0\right)| \le C_3\sqrt{\ln\mu_0}\|f\|_{L_2(g)} \tag{7}$$

так как оператор $Af=\int_g R(x_0,y,\mu)f(y)dy$; $A:L_2(g)\to C(C)$ имеет норму $\|A\|_{L_2(g)\to C(C)}=\sup_{x_0\in C}\left(\int_g\left|R\left(x_0,y,\mu\right)\right|^2 dy\right)^{1/2}$. (Правая часть последнего равенства конечна, так как из работы [3] следует, что $R(x_0,y,\mu)$ непрерывна при $x_0 \neq y$ и $|R(x_0,y,\mu)| \le \frac{P(\mu)}{|x_0-y|}$). Итак, будем доказывать оценку (7).

Заметим, что указанную оценку нужно получить лишь для достаточно гладких функций f, а затем сделать предельный переход в $L_2(g)$. Введём следующие обозначения:

$$\mu_i=\frac{\mu}{\sqrt{k_i}};\quad f_i=\frac{f}{k_i};\quad i=1,2;\quad k(x)=\begin{cases}k_1; & x\in g_1\\ k_2; & x\in g_2\end{cases}.$$

Тогда для обобщённого решения задачи (3) справедливо интегральное тождество:

$$\int_g k|\nabla u|^2 dx-\mu u^2\int_g|u|^2 dx+\int_g f\bar{u}dx=0$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим:

$$2a\mu_0\int_g|u|^2 dx=\operatorname{Im}\int_g f\bar{u}dx$$

$$\int_g k(x)|\nabla u|^2 dx=-\operatorname{Re}\int_g f\bar{u}dx+\left(\mu_0^2-a^2\right)\int_g|u|^2 dx$$

Поэтому:

$$ll\|u\|_{L_2(g)} \le \frac{a_1}{\mu_0}\|f\|_{L_2(g)}; a_1,a_2>0$$
$$\|\nabla u\|_{L_2(g)} \le a_2\|f\|_{L_2(g)}; \mu_0>a_2 \tag{8}$$

Запишем первую формулу Грина для области g_1.

$$\int_{g_1}\nabla u_1\nabla\bar{v}_1 dx-\mu_1^2\int_{g_1}u_1\bar{v}_1 dx+\int_{g_1}f_1\bar{v}_1 dx=\int_C\frac{\partial u_1}{\partial n}\bar{v}_1 dC \tag{9}$$

для любой функции $v_1(x)\in W_2^1(g_1)$. Возьмём $v_1=\sum_{i=1}^3\frac{\partial u_1}{\partial x_i}q_i 1$, где $q_{i1}\in c^{1\alpha}(\overline{g_1})$; $q_{i1}|_C=cos(\vec{n},x_i)$; $i=1, 2, 3$. $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности C по отношению к области g_1. Тогда из (9) получим

$$\int_{g_1}\nabla u_1\nabla\bar{v}_1 dx-\mu_1^2\int_{g_1}u_1\bar{v}_1 dx+\int_{g_1}f_1\bar{v}_1 dx=\int_C\left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|^2 dC \tag{10}$$

Преобразуем:

$$\sum_i\int_{g_1}\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial x_i}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}dx=\sum_{i,j}\int_{g_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_j}\frac{\partial q_{j1}}{\partial x_i}dx+\sum_{i,j}\int_{g_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial x_i\partial x_j}q_{j1}dx.$$

Интегрируя по частям, заметим, что:

$$\sum_{i,j}\int_{g_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial x_i\partial x_j}q_{j1}dx=-\sum_{i,j}\int_{g_1}q_{j1}\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i\partial x_j}dx-\sum_{i,j}\int_{g_1}\frac{\partial q_{j1}}{\partial x_j}\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx+\int_C|\nabla u_1|^2 dC$$

Поэтому: $2\operatorname{Re}\sum_{i,j}\int_{g_1}q_{j1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial x_i\partial x_j}dx=\int_C|\nabla u_1|^2 dC-\sum_{i,j}\int_{g_1}\frac{\partial q_{j1}}{\partial x_j}\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx.$

Аналогично: $2\operatorname{Re}\int_{g_1}u_1\bar{v}_1 dx=\int_C|u_1|^2 dC-\int_{g_1}\sum_i\frac{\partial q_{i1}}{\partial x_i}|u_1|^2 dx.$

$$\int_C\left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|^2 dC+\frac{\mu_0^2-a^2}{2k_1}\int_C|u_1|^2 dC-\frac{1}{2}\int_C|\nabla u_1|^2 dC=$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_{g_1}\frac{\partial q_{j1}}{\partial x_j}\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|^2 dx+\operatorname{Re}\left[\sum_{i,j}\int_{g_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_j}\frac{\partial q_{j1}}{\partial x_i}dx\right]+\frac{2\mu_0 a}{k_1}\operatorname{Im}\left[\int_{g_1}u_1\bar{v}_1 dx\right]+ \tag{11}$$
$$+\frac{\mu_0^2-a^2}{2k_1}\int_{g_1}\sum_i\frac{\partial q_{i1}}{\partial x_i}|u_1|^2 dx+\operatorname{Re}\left[\int_{g_1}f_1\bar{v}_1 dx\right]$$

Теперь запишем первую формулу Грина по области g_2. Для определённости будем считать, что $k_2>k_1$. Положим $v_2(x)=\sum_{i=1}^3\frac{\partial u_2}{\partial x_i}q_{i2}(x)$, где $q_{i2}(x)\in C^{1,\alpha}(\overline{g}_2)$; $q_{i2}|_C=q_{i1}|_C=cos(\vec{n},x_i)$; $q_{i2}|_\Gamma=cos(\vec{N}_\Gamma,x_i)$; $i=1, 2, 3$. $\vec{N}_\Gamma$ - внешняя нормаль к поверхности Γ по отношению к области g. (Заметим, что, если $k_1>k_2$, то нужно брать $q_{i2}|_\Gamma=-cos(\vec{N}_\Gamma,x_i)$; $i=1, 2, 3$). Получим совершенно так же, как и (11), формулу

$$-\int_C \left|\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|^2 dC - \frac{\mu_0^2 - a^2}{2k_2}\int_C |u_2|^2\, dC + \frac{1}{2}\int_C |\nabla u_2|^2\, dC + \int_\Gamma \left|\frac{\partial u_2}{\partial N_\Gamma}\right|^2 ds - \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla u_2|^2\, ds =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_{g_2}\frac{\partial q_{j2}}{\partial x_j}\left|\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|^2 dx + \mathrm{Re}\left[\sum_{i,j}\int_{g_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_j}\frac{\partial q_{j2}}{\partial x_i}dx\right] + \frac{2\mu_0 a}{k_2}\,\mathrm{Im}\left[\int_{g_2} u_2\bar{v}_2 dx\right] + \tag{12}$$

$$+\frac{\mu_0^2 - a^2}{2k_2}\int_{g_2}\sum_i \frac{\partial q_{i2}}{\partial x_i}|u_2|^2\, dx + \mathrm{Re}\left[\int_{g_2} f_2\bar{v}_2 dx\right]$$

Так как $u_2|_\Gamma = 0$, то $\int_\Gamma |\nabla u_2|^2 ds = \int_\Gamma \left|\frac{\partial u_2}{\partial N_\Gamma}\right|^2 ds$ (см. [7]). Сложим формулы (11) и (12) и воспользуемся условиями сопряжения и оценками (8). Тогда:

$$\left|\left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right)\int_C \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|^2 dC + \frac{\mu_0^2 - a^2}{2k_1 k_2}(k_2 - k_1)\int_C |u_1|^2\, dC + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{2}\left[\int_C |\nabla u_2|^2\, dC - \int_C |\nabla u_1|^2\, dC\right] + \frac{1}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_2}{\partial N_\Gamma}\right|^2 ds\right| \le A\|f\|^2_{L_2(g)} \tag{13}$$

A>0, константа *A* не зависит ни от *f*, ни от μ_0.

Рассмотрим разность: $\int_C |\nabla u_2|^2 dC - \int_C |\nabla u_1|^2 dC = \phi(u_1, u_2)$. Если бы участок $\tilde{C}$ поверхности *C* был плоский, то в местной системе координат $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$, и, в силу условий сопряжения, $(|\nabla u_2|^2 - |\nabla u_1|^2)|_{\tilde{C}} = \left(\left|\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|^2 - \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|^2\right)\Big|_{\tilde{C}}$. Докажем, что в случае произвольной поверхности *C*

$$\varphi\,(u_1, u_2) = \int_C \left|\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|^2 dC - \int_C \left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|^2 dC \tag{14}$$

Для доказательства (14) локально распрямим поверхность *C*. Предположим, что точка $\bar{x}_0 \in C$ является началом местных координат (x_1, x_2, x_3) и x_3 имеет направление внешней нормали по отношению к области g_1, а (x_1, x_2) лежит в касательной плоскости к поверхности *C* в точке $\bar{x}_0$. Причём, участок поверхности *C*, однозначно проектирующийся на касательную плоскость, имеет вид $x_3=\psi(x_1, x_2)$. Этого всегда можно добиться сдвигом и поворотом исходных координат. При этом

$$\cos(\vec{n}, x_3) = \cos\alpha_3 = \left[1 + \left(\psi'_{x_1}\right)^2 + \left(\psi'_{x_2}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$\cos(\vec{n}, x_i) = \cos\alpha_i = \pm\psi'_{x_i}\cos\alpha_3;\;\; i = 1, 2 \tag{15}$$

Для удобства будем рассматривать ту часть поверхности *C*, которая соответствует координатной области (x_1, x_2), где в формулах (15) нужно брать знак минус. (Этого всегда можно достичь соответствующим изменением направления координат, учтя, что $(\vec{n},\ x_i)$ — непрерывная функция.). Сделаем замену координат: $y_1=x_1$; $y_2=x_2$; $y_3=x_3-\psi(x_1, x_2)$. Тогда участок $\tilde{C}$ поверхности *C* перейдёт в плоский участок $\tilde{L}$, причём $u_i(y)$ будут локально удовлетворять уже другим эллиптическим уравнениям, но $u_1|_{\tilde{L}-0} = u_2|_{\tilde{L}+0}$. Подсчитаем в новых координатах $|\nabla u_1|^2$ и $\left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|^2$. Временно опустим индекс «1» у решения u_1. Тогда:

$$u_{x_i} = u_{y_i} - u_{y_3}\psi'_{y_i};\quad i = 1, 2;\quad u_{x_3} = u_{y_3}$$

$$|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{2}\left(u_{y_i} - u_{y_3}\psi'_{y_i}\right)\left(\bar{u}_{y_i} - \bar{u}_{y_3}\psi'_{y_i}\right) + u_{y_3}\bar{u}_{y_3} =$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\left(u_{y_1}\bar{u}_{y_3}\right)\psi'_{y_1} - 2\,\mathrm{Re}\left(u_{y_2}\bar{u}_{y_3}\right)\psi'_{y_2} + \left|u_{y_3}\right|^2\left(1 + \left(\psi'_{y_1}\right)^2 + \left(\psi'_{y_2}\right)^2\right) + \tag{17}$$

$$+F_1\left(\psi, u_{y_1}, u_{y_2}, y_1, y_2, y_3\right)$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2=\left[\sum_{i=1}^{2}\left(u_{y_i}-u_{y_3}\psi'_{y_i}\right)\cos\alpha_i+u_{y_3}\cos\alpha_3\right]\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\bar u_{y_i}-\bar u_{y_3}\psi'_{y_i}\right)\cos\alpha_i+\right.$$
$$\left.+\bar u_{y_3}\cos\alpha_3\right]=-2\,\mathrm{Re}\left(u_{y_1}\bar u_{y_3}\right)\psi'_{y_1}\cos^2\alpha_1+\left|u_{y_3}\right|^2\left(\psi'_{y_1}\right)^2\cos^2\alpha_1-$$
$$-u_{y_1}\bar u_{y_3}\psi'_{y_2}\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\bar u_{y_2}u_{y_3}\psi'_{y_1}\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\left|u_{y_3}\right|^2\psi'_{y_1}\psi'_{y_2}\cos\alpha_1\cos\alpha_2+$$
$$+u_{y_1}\bar u_{y_3}\cos\alpha_1\cos\alpha_3-\left|u_{y_3}\right|^2\psi'_{y_1}\cos\alpha_1\cos\alpha_3-u_{y_2}\bar u_{y_3}\psi'_{y_1}\cos\alpha_1\cos\alpha_2- \tag{18}$$
$$-\bar u_{y_1}u_{y_3}\psi'_{y_2}\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\left|u_{y_3}\right|^2\psi'_{y_1}\psi'_{y_2}\cos\alpha_1\cos\alpha_2-$$
$$-2\,\mathrm{Re}\left(u_{y_2}\bar u_{y_3}\right)\psi'_{y_2}\cos\alpha_2+\left|u_{y_3}\right|^2\left(\psi'_{y_2}\right)^2\cos^2\alpha_2+u_{y_2}\bar u_{y_3}\cos\alpha_2\cos\alpha_3-$$
$$-\left|u_{y_3}\right|^2\psi'_{y_2}\cos\alpha_2\cos\alpha_3+u_{y_3}\bar u_{y_1}\cos\alpha_1\cos\alpha_3-\left|u_{y_3}\right|^2\psi'_{y_1}\cos\alpha_1\cos\alpha_3+$$
$$+u_{y_3}\bar u_{y_2}\psi'_{y_2}\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\left|u_{y_3}\right|^2\cos^2\alpha_3+F_2\left(\psi,u_{y_1},u_{y_2},y_1,y_2,y_3\right)$$

Подставляя в (17) и (18) формулы (15), убеждаемся в том, что

$$|\tfrac{\partial u_1}{\partial n}|^2=|\nabla u_1|^2+\Phi(\psi,\ (u_1)_{y_1},\ (u_1)_{y_2},\ y_1,\ y_2,\ y_3) \tag{19}$$

на участке $\tilde{L}$. Аналогично

$$|\tfrac{\partial u_2}{\partial n}|^2=|\nabla u_2|^2+\Phi(\psi,\ (u_2)_{y_1},\ (u_2)_{y_2},\ y_1,\ y_2,\ y_3) \tag{20}$$

на участке $\tilde{L}$. Вычитая (19) из (20) и учитывая условия сопряжения (16), получим:

$$\left(\left|\tfrac{\partial u_2}{\partial n}\right|^2-\left|\tfrac{\partial u_1}{\partial n}\right|^2\right)\Big|_{\tilde L}=\left(|\nabla u_2|^2-|\nabla u_1|^2\right)\big|_{\tilde L}$$

Возвращаясь к старым координатам и производя локальную склейку, получим (14). Тем самым, (13) преобразуется к виду:

$$\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{k_1^2}{k_2^2}\right)\int_C\left|\tfrac{\partial u_1}{\partial n}\right|^2 dC+\tfrac{\mu_0^2-a^2}{2k_1k_2}(k_2-k_1)\int_C|u_1|^2dC+\tfrac{1}{2}\int_\Gamma\left|\tfrac{\partial u_2}{\partial N_\Gamma}\right|^2 ds\le A\ ||f||^2_{L_2(g)} \tag{21}$$

Из (21) вытекают следующие оценки

$$\begin{gathered}\int_C\left|\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|^2 dC\le A_1\|f\|^2_{L_2(g)}\\ \int_C|u_1|^2\,dC+\le\frac{A_2}{\mu_0}\|f\|^2_{L_2(g)}\\ \int_\Gamma\left|\frac{\partial u_2}{\partial N_\Gamma}\right|^2 ds\le A_3\|f\|^2_{L_2(g)}\end{gathered} \tag{22}$$

$A_1, A_2, A_3 >0$. Константы A_1, A_2, A_3 не зависят ни от f, ни от μ_0.

Получим предварительную оценку решения задачи (3)

$$u(x)=\int_g G(x,y)f(y)dy-\mu^2\int_g G(x,y)u(y)dy\ ,$$

где $G(x,y)=R(x,y,0)$ — функция Грина задачи (1) и, в частности, $|G(x,y)|\le\frac{C_0}{|x-y|}$; $x, y\in g$. Тогда:

$$||u||_{C(\bar g)}\le C_1\ \mu_0||f||_{L_2(g)};\ C_0,\ C_1>0 \tag{23}$$

(В (23) использовано неравенство Коши_Буняковского и оценка (8).) Далее, по формуле Грина:

$$\begin{gathered}u\left(x_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{\exp\left(i\mu_1\left|x_0-s\right|\right)}{\left|x_0-s\right|}\frac{\partial u_1}{\partial n_s}ds-\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{\partial}{\partial n_s}\left(\frac{\exp\left(i\mu_1\left|x_0-s\right|\right)}{\left|x_0-s\right|}\right)u_1(s)ds-\\ -\frac{1}{2\pi}\int_{g_1}f_1(y)\frac{\exp\left(i\mu_1\left|x_0-y\right|\right)}{\left|x_0-y\right|}dy\end{gathered} \tag{24}$$

Для получения оценки (7) второй и третий интегралы в (24) оценим с помощью неравенства Коши-Буняковского. При этом второй интеграл необходимо разбить на два: по области S_μ: $|x_0-s|\le\mu_0^{-p}$; где p — достаточно большое натуральное число, и по области $C\backslash S_\mu$. А далее учесть оценки (22), (23). Разобьём первый интеграл в (24) также на два: по области S_μ и по области $C\backslash S_\mu$. По области $C\backslash S_\mu$ интеграл оценивается с помощью неравенства Коши-Буняковского с учётом оценки (22). Для того чтобы оценить интеграл по области S_μ, проделаем следующее: обозначим через t достаточно близкую точку к точке $x\in C$ на нормали к точке x $t\in g_1$. Тогда:

$$u_1(t)=\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\exp\left(i\mu_1|t-s|\right)}{|t-s|}\frac{\partial u_1}{\partial n_s}ds-\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\partial}{\partial n_s}\left(\frac{\exp\left(i\mu_1|t-s|\right)}{|t-s|}\right)u_1(s)ds-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{g_1}f_1\frac{\exp\left(i\mu_1|t-y|\right)}{|t-y|}dy \qquad (25)$$

Теперь применим к функциям $u_2(y)$ и $v(y)=\frac{1}{4\pi}\frac{exp(i\mu_1|t-y|)}{|t-y|}$ вторую формулу Грина по области g_2. Учитывая условия сопряжения на поверхности C, получим

$$-\frac{1}{k_2}\mu^2\int_{g_2}u_2vdy+\int_{g_2}f_2vdy+\frac{1}{k_1}\mu^2\int_{g_2}u_2vdy=-\frac{k_1}{k_2}\int_C\frac{\partial u_1}{\partial n_s}vds+$$
$$+\int_C u_1\frac{\partial v}{\partial n_s}ds+\int_\Gamma\frac{\partial u_2}{\partial N_\Gamma}vds \qquad (26)$$

Сложим (25) и (26). Получим:

$$u_1(t)=\mu^2\frac{k_1-k_2}{k_1k_2}\int_{g_2}u_2vdy+\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\int_C\frac{\partial u_1}{\partial n_s}vds+\int_\Gamma\frac{\partial u_2}{\partial N_\Gamma}vds-$$
$$-\int_{g_1}f_1vdy-\int_{g_2}f_2vdy \qquad (27)$$

Продифференцируем по t по нормали к точке x равенство (27) и устремим t к x. Тогда:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{\partial u_1}{\partial n_x}(x)=\mu^2\frac{k_1-k_2}{k_1k_2}\int_{g_2}u_2(y)\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{\exp\left(i\mu_1|x-y|\right)}{|x-y|}\right)dy+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\int_C\frac{\partial u_1}{\partial n_s}\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{\exp\left(i\mu_1|x-s|\right)}{|x-s|}\right)ds+\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\frac{\partial u_2}{\partial N_\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{\exp\left(i\mu_1|x-s|\right)}{|x-s|}\right)ds- \qquad (28)$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{g_1}f_1\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{\exp\left(i\mu_1|x-y|\right)}{|x-y|}\right)dy-\frac{1}{4\pi}\int_{g_2}f_2\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{\exp\left(i\mu_1|x-y|\right)}{|x-y|}\right)dy$$

Теперь проинтегрируем обе части (28) по S_μ, предварительно умножив их на функцию $\frac{1}{4\pi}\frac{exp(i\mu_1|x-x_0|)}{|x-x_0|}$. Из оценок (22), (23), свойств поверхностных потенциалов и неравенства Коши-Буняковского немедленно вытекает оценка (7) для первого интеграла в (24), что и завершает доказательство теоремы.

<u>Замечание 1.</u> Из доказательства оценки (2) нетрудно получить равномерную оценку во всей замкнутой области $\bar{g}$:

$$\sum\nolimits_{\left|\sqrt{\lambda_k}-\mu_0\right|\le 1}\left|e_k^2(x)\right|\le C_1\mu_0^2\ln\left(1+\mu_0\right) \qquad (29)$$

$x\in\bar{g}$; $\mu_0\ge 1$, C_1 не зависит ни от x, ни от μ_0. Для доказательства оценки (29) достаточно показать, что

$$\sup\nolimits_{x\in\bar{g}}|u(x)|\le C_3\sqrt{\ln\mu_0}\|f\|_{L_2(g)};C_3>0 \qquad (30)$$

Пусть $x\in g_1$. Тогда:

$$u_1(x)=\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\exp\left(i\mu_1|x-s|\right)}{|x-s|}\frac{\partial u_1}{\partial n_s}ds-\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\partial}{\partial n_s}\left(\frac{\exp\left(i\mu_1|x-s|\right)}{|x-s|}\right)u_1(s)ds-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{g_1}f_1\frac{\exp\left(i\mu_1|x-y|\right)}{|x-y|}dy \qquad (31)$$

Первый и третий интегралы в (31) с помощью оценок (22) и (23) и неравенства Коши-Буняковского уже были оценены при доказательстве теоремы. (Ибо там нигде не использовалось то, что $x_0\in C$.) Рассмотрим второй интеграл в (31)

$$\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\partial}{\partial n_s}\left(\frac{\exp\left(i\mu_1|x-s|\right)}{|x-s|}\right)u_1(s)ds=\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\exp\left(i\mu_1|x-s|\right)}{|x-s|^2}\cos\left(n_s,\overrightarrow{xx}\right)u_1(s)ds-$$
$$-i\mu_1\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\exp\left(i\mu_1|x-s|\right)}{|x-s|}\cos\left(n_s,\overrightarrow{sx}\right)u_1(s)ds \qquad (32)$$

Второй интеграл в (32) оценивается так же, как и при доказательстве теоремы, с помощью оценок (22), (23) и неравенства Коши-Буняковского. При этом нужно разбить область интегрирования на S_μ: $|x\text{-}s|\le\mu_0^{-p}$ и $C\backslash S_\mu$. Первый интеграл в (32) оценивается так:

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_C\frac{\exp(i\mu_1|x-s|)}{|x-s|^2}\cos\left(n_s,\overrightarrow{sx}\right)u_1(s)ds\right|\le C_1\sup\nolimits_{x\in C}|u_1(x)|\int_C\frac{\left|\cos\left(n_s,\overrightarrow{sx}\right)\right|}{|x-s|^2}ds\le$$
$$\le C_2\sqrt{\ln\mu_0}\|f\|_{L_2(g)};\ C_1,C_2>0$$

Здесь использована уже полученная оценка (7) в теореме для $x_0 \in C$ и известное неравенство: $\int_C \frac{|cos(n_s \vec{sx})|}{|x-s|^2} ds \leq C_0$; $C_0>0$. Следовательно, складывая все оценки для интегралов в (31), получим $\sup_{x \in \bar{g}_1} |u(x)| \leq C_1^* \sqrt{\ln \mu_0} \|f\|_{L_2(g)}$. Совершенно аналогично показывается, что: $\sup_{x \in \bar{g}_2} |u(x)| \leq C_2^* \sqrt{\ln \mu_0} \|f\|_{L_2(g)}$. Из последних двух неравенств вытекает (30).

Замечание 2. Для $N=2$ можно получить аналогичную оценку:

$$\sum_{\left|\sqrt{\lambda_i}-\mu_0\right| \leq 1} \left|e_k^2(x)\right| \leq C_1 \mu_0 \ln^2 (1+\mu_0) \, ; \; x \in \bar{g}; \; C_1 \geq 0.$$

Замечание 3. Из оценки (29) нетрудно получить, используя результат работы [7], равномерную асимптотическую оценку спектральной функции, когда одна точка принадлежит замкнутой области $\bar{g}_i \; i = 1, \, 2$, а другая — строго внутренней подобласти $\Omega_i \subset g_i$:

$$\sum_{\lambda_k < \lambda} e_k(x) e_k(y) = (2\pi)^{-3/2} \left(\frac{\lambda}{k_i}\right)^{3/4} r_{xy}^{-3/2} J_{3/2} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{k_i}} r_{xy}\right) + O\left(\lambda \ln^{1+\varepsilon} \lambda\right)$$
$$\varepsilon > 0; \; x \in \bar{g}_i; \; y \in \Omega_i \subset g_i$$

Ибо в работе [7] для фундаментальных функций оператора Лапласа в области g_i при наличии равномерной оценки «пачки» (29) в замкнутой области $\bar{g}_i$ показана справедливость такой асимптотики.

Замечание 4. Оценку (2) можно улучшить лишь на логарифмический множитель, что показывает случай $k_1=k_2$ и отсутствие разрыва.

Замечание 5. Равномерные оценки отдельных собственных функций и их производных в $\bar{g}$ для более общей задачи, чем (1), установлены в [9] И.А. Шишмарёвым.

Заключение

В этой работе, являющейся продолжением цикла статей авторов, связанного с оператором Лапласа, умноженным на кусочно-постоянный коэффициент, рассматриваемым в областях различной размерности N, для этого оператора и задачи Дирихле в случае $N=3$ получены оценка группы собственных функций в замкнутой области и асимптотика спектральной функции (когда одна точка находится на поверхности разрыва коэффициента, а другая вне этой поверхности), которые могут быть улучшены лишь на логарифмический множитель.

Эти оценки необходимы для того, чтобы в дальнейшем, используя метод В.А. Ильина, уменьшить требования гладкости к классу функций, для спектральных разложений которых, с помощью этих оценок авторы в дальнейшем надеются получить некоторые результаты, связанные со сходимостью спектральных разложений при $N=3$ на поверхности разрыва коэффициента.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Сучков М.В. О принципе локализации для оператора Лапласа с разрывным коэффициентом в областях, не содержащих точек разрыва / М.В. Сучков, В.П. Трифоненков // Вестник МГОУ Серия Физика-Математика. — 2017. — № 1. — С. 8–17.
2. Ильин В.А. О разрешимости задач Дирихле и Неймана для линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами / В.А. Ильин // ДАН СССР. — 1961. — Т. 137. — № 1. — С. 28–30.
3. Ильин В.А. О системе классических собственных функций линейного самосопряженного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами / В.А. Ильин // ДАН СССР. — 1961. — Т. 137. — № 2. — С. 272–275.
4. Ильин В.А. Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа / В.А. Ильин // У.М.Н. — 1968. — Т. 23. — № 2. — С. 61–120.
5. Сучков М.В. Об абсолютной сходимости спектральных разложений в двумерной замкнутой области для оператора Лапласа с разрывным коэффициентом и задачи Дирихле / М.В. Сучков, В.П. Трифоненков // Международный научно-исследовательский журнал. — 2023. — № 3 (129).
6. Сучков М.В. О сходимости спектральных разложений для оператора Лапласа с разрывным коэффициентом в замкнутой области, содержащей точки разрыва / М.В. Сучков, В.П. Трифоненков // East European Scientific Journal. — 2021. — Т. 1. — № 3 (67). — С. 48–53.
7. Моисеев Е.И. Равномерная сходимость в замкнутой области некоторых разложений / Е.И. Моисеев // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233. — № 6. — С. 1042–1045.
8. Ройтберг Я.А. Граничные задачи и задачи на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными коэффициентами / Я.А. Ройтберг, З.Г. Шефтель // Матем. физика. — Киев, 1965. — С. 119–135.
9. Шишмарёв И.А. Равномерные оценки производных решений задачи Дирихле и задачи на собственные функции для оператора с разрывными коэффициентами / И.А. Шишмарёв // ДАН СССР. — 1961. — Т. 137. — № 1. — С. 45–47.

10. Сучков М.В. О некоторых свойствах спектральных разложений, отвечающих самосопряженному эллиптическому оператору второго порядка с разрывными коэффициентами / М.В. Сучков // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251. — № 6. — С. 1314–1316.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Suchkov M.V. O principe lokalizacii dlja operatora Laplasa s razryvnym kojefficientom v oblastjah, ne soderzhashhih tochek razryva [On the localisation principle for the Laplace operator with a discontinuous coefficient in regions containing no break points] / M.V. Suchkov, V.P. Trifonenkov // Vestnik MGOU Serija Fizika-Matematika [Bulletin of Moscow State University Physics-Mathematics series]. — 2017. — № 1. — P. 8–17. [in Russian]

2. Il'in V.A. O razreshimosti zadach Dirihle i Nejmana dlja linejnogo jellipticheskogo operatora s razryvnymi kojefficientami [On the solvability of Dirichlet and Neumann problems for a linear elliptic operator with discontinuous coefficients] / V.A. Il'in // DAN SSSR [DAS USSR]. — 1961. — Vol. 137. — № 1. — P. 28–30. [in Russian]

3. Il'in V.A. O sisteme klassicheskih sobstvennyh funkcij linejnogo samosoprjazhennogo jellipticheskogo operatora s razryvnymi kojefficientami [On the system of classical eigenfunctions of a linear selfadjoint elliptic operator with discontinuous coefficients] / V.A. Il'in // DAN SSSR [DAS USSR]. — 1961. — Vol. 137. — № 2. — P. 272–275. [in Russian]

4. Il'in V.A. Problemy lokalizacii i shodimosti dlja rjadov Fur'e po fundamental'nym sistemam funkcij operatora Laplasa [Localisation and convergence problems for Fourier series on fundamental systems of Laplace operator functions] / V.A. Il'in // U.M.N. — 1968. — T. 23. — № 2. — P. 61–120. [in Russian]

5. Suchkov M.V. Ob absoljutnoj shodimosti spektral'nyh razlozhenij v dvumernoj zamknutoj oblasti dlja operatora Laplasa s razryvnym kojefficientom i zadachi Dirihle [On the absolute convergence of spectral expansions in a two-dimensional closed region for the Laplace operator with a discontinuous coefficient and the Dirichlet problem] / M.V. Suchkov, V.P. Trifonenkov // Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal [International Research Journal]. — 2023. — № 3 (129). [in Russian]

6. Suchkov M.V. O shodimosti spektral'nyh razlozhenij dlja operatora Laplasa s razryvnym kojefficientom v zamknutoj oblasti, soderzhashhej tochki razryva [On convergence of spectral expansions for the Laplace operator with a discontinuous coefficient in a closed region containing discontinuity points] / M.V. Suchkov, V.P. Trifonenkov // East European Scientific Journal. — 2021. — Vol. 1. — № 3 (67). — P. 48–53. [in Russian]

7. Moiseev E.I. Ravnomernaja shodimost' v zamknutoj oblasti nekotoryh razlozhenij [Uniform convergence in a closed region of some decompositions] / E.I. Moiseev // DAN SSSR [DAS USSR]. — 1977. — Vol. 233. — № 6. — P. 1042–1045. [in Russian]

8. Rojtberg Ja.A. Granichnye zadachi i zadachi na sobstvennye znachenija dlja uravnenij jellipticheskogo tipa s razryvnymi kojefficientami [Boundary value problems and eigenvalue problems for elliptic type equations with discontinuous coefficients] / Ja.A. Rojtberg, Z.G. Sheftel' // Matem. fizika [Mathematical Physics]. — Kyiv, 1965. — P. 119–135. [in Russian]

9. Shishmarjov I.A. Ravnomernye ocenki proizvodnyh reshenij zadachi Dirihle i zadachi na sobstvennye funkcii dlja operatora s razryvnymi kojefficientami [Uniform estimates of derivatives of solutions of the Dirichlet problem and the eigenfunction problem for an operator with discontinuous coefficients] / I.A. Shishmarjov // DAN SSSR [DAS USSR]. — 1961. — Vol. 137. — № 1. — P. 45–47. [in Russian]

10. Suchkov M.V. O nekotoryh svojstvah spektral'nyh razlozhenij, otvechajushhih samosoprjazhennomu jellipticheskomu operatoru vtorogo porjadka s razryvnymi kojefficientami [On some properties of spectral expansions corresponding to a self-adjoint second-order elliptic operator with discontinuous coefficients] / M.V. Suchkov // DAN SSSR [DAS USSR]. — 1980. — Vol. 251. — № 6. — P. 1314–1316. [in Russian]