

ПРОЧНОСТЬ И ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ / STRENGTH AND THERMAL CONDITIONS OF AIRCRAFT

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.151.17>

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛОК ИЗ МАТЕРИАЛА С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

Научная статья

Малинин Г.В.^{1,*}

¹ Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (malinin2002[at]yandex.ru)

Аннотация

Рассматривается применение метода Ритца для расчета балок, выполненных из материала с эффектом памяти формы. Функционал энергии деформации записывается для материала нитинол T_iN_i , обладающего физической нелинейностью, вызванной мартенситными превращениями в режиме прямого превращения под нагрузкой. Материал деформируется полностью в аустенитном состоянии при температуре выше температуры прямого мартенситного превращения. В качестве определяющих соотношений применялись уравнения структурно-аналитической мезомеханики. Определяющие соотношения записываются для макроуровня. Деформации микро и мезо-уровней учитываются с помощью операции ориентационного усреднения структурно-аналитической мезомеханики.

Ключевые слова: структурно-аналитическая мезомеханика, обратимые мартенситные превращения, метод Ритца, материалы с эффектом памяти формы, микро- мезо- и макромасштабные уровни.

APPLICATION OF RITZ METHOD FOR CALCULATION OF STRESS-STRAIN STATE OF BEAMS MADE OF MATERIAL WITH SHAPE MEMORY EFFECT

Research article

Malinin G.V.^{1,*}

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

* Corresponding author (malinin2002[at]yandex.ru)

Abstract

The application of the Ritz method to the calculation of beams made of material with shape memory effect is studied. The strain energy functional is written for a T_iN_i nitinol material with physical nonlinearity caused by martensitic transformations in the direct transformation mode under load. The material deforms completely at a temperature above the direct martensitic transformation temperature in the austenitic state. The structural-analytical mesomechanics equations were used as the defining relations. The defining relations are written for the macro-level. Deformations of the micro and meso levels are taken into account using the orientation averaging operation of structural-analytical mesomechanics.

Keywords: structural-analytical mesomechanics, reversible martensitic transformations, Ritz method, shape memory materials, micro- meso- and macroscale levels.

Введение

В настоящее время сплавы с эффектом памяти формы (ЭПФ) находят все большее применение в различных областях человеческой деятельности. Широкое применение они нашли в медицине, авиации, машиностроении, строительстве и др.

Сплавы с ЭПФ обладают уникальными свойствами, которые отсутствуют у большинства традиционных материалов, применяемых в промышленности. Однако, нетрадиционное поведение этих материалов требует новых моделей материала, при которых возможно применение традиционных методов механики деформированного твердого тела. Разработка теории и методов расчета инженерных конструкций, выполненных из материалов с ЭПФ, является актуальной задачей современных технологий.

Математическая модель

В настоящей работе используются определяющие соотношения деформационного типа, выведенные на основе общих уравнений структурно-аналитической мезомеханики [1], [2], [3], [5]. В рамках этого подхода были решены следующие краевые задачи: толстостенные трубы под внутренним давлением, стержневые статически неопределимые системы, ферменные конструкции, балки-стенки, квадратные пластины и пологие оболочки [6], [7], [8], [9]. В данной работе применяется метод Ритца-Тимошенко для расчета статически неопределимых балок, выполненных из материалов с памятью формы, при произвольной нагрузке, с любыми закреплениями концов.

Для определенности рассматривается балка один конец которой шарнирно оперт, другой – жестко зашпелен. Рассмотрены все три наиболее часто встречающихся вида нагружения: распределенная нагрузка, сосредоточенная сила, сосредоточенный изгибающий момент. Балка работает в условиях простого нагружения (рис. 1).

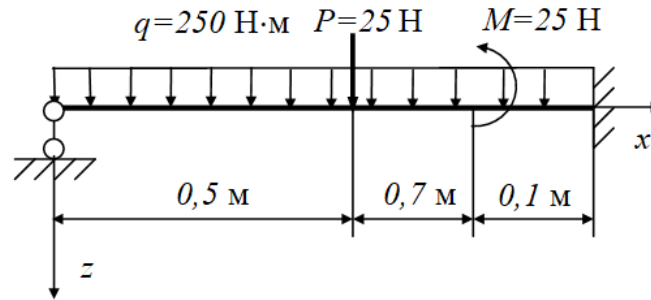


Рисунок 1 - Расчетная схема балки
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.151.17.1>

До начала нагружения материал пластины находится полностью в аустенитном состоянии (рис. 2), т.е. пластина нагрета до температуры выше температуры конца обратного мартенситного превращения (выше A_K). Далее, в изотермических условиях, пластина нагружается нагрузкой, вызывающей прямое мартенситное превращение. Задача решается в физически нелинейной постановке при использовании определяющих соотношений деформационного типа с применением гипотезы о несжимаемости материала.

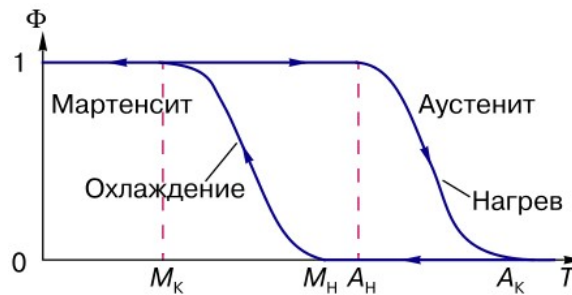


Рисунок 2 - Фазовые диаграммы для материалов с мартенситными превращениями:
 M_H, M_K, A_H, A_K – характеристические температуры начала и конца превращения; Φ – объемная доля мартенсита
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.151.17.2>

Определяющие соотношения для материала с ЭПФ на этапе нагружения с учетом уравнений структурно-аналитической мезомеханики [3], [5] представляются следующим образом:

$$\varepsilon_i^\Sigma = \frac{\sigma_i}{E} + \left(\frac{2}{3} B_\Phi \sigma_i \frac{k(\sigma_i - \sigma_{H\uparrow}^{A \rightarrow M})}{M_H - M_K} \right) H(\sigma_i - \sigma_{H\uparrow}^{A \rightarrow M}) H(\sigma_{K\uparrow}^{A \rightarrow M} - \sigma_i) H(\dot{\sigma}_i) \quad (1)$$

где σ_i – интенсивность напряжений; E – модуль упругости; B_Φ – константа материала; $k = \frac{T_0}{q_0} D_i$; T_0 – температура термодинамического равновесия; q_0 – тепловой эффект реакции; D_i – дисторсия фазового превращения; $\sigma_{H\uparrow}^{A \rightarrow M} = \frac{T_D - M_H}{k}$ – напряжение начала прямого мартенситного превращения; T_D – температура начала деформирования; M_H, M_K – температуры начала и конца прямого мартенситного превращения соответственно; $\sigma_{K\uparrow}^{A \rightarrow M} = \frac{T_D - M_K}{k}$ – напряжение конца мартенситного превращения, $\dot{\sigma}_i = \frac{d\sigma_i}{dt}$; $H(\dots)$ – функция Хевисайда.

Допущения, принятые при решении задачи:

- 1) модуль упругости материала в аустенитной и мартенситной фазах принимается одинаковым;
- 2) материал в условиях изотермического нагружения испытывает упругие и неупругие (фазовые) деформации;
- 3) для аппроксимации диаграммы деформирования принимается кубическая парабола.

По формулам модели структурно-аналитической мезомеханики [5] определим касательный модуль E_K , максимальное напряжение σ_{max} и фазовый предел текучести σ_T , определяющий начало прямого мартенситного превращения:

$$\sigma_T = \frac{T_D - M_H}{k}, \quad \sigma_{max} = \frac{T_D - M_K}{k}, \quad E_K = \frac{1}{\frac{2}{3} B_\Phi \sigma_{max} \frac{k}{M_H - M_K} + \frac{1}{E}} \quad (2)$$

В случае аппроксимации диаграммы материала кубической параболой (см.рис.3) определяющие соотношения примут вид [10]:

$$\sigma_i = E \varepsilon_i - m \varepsilon_i^3, \quad E_C = \sigma_i / \varepsilon_i = E - m \varepsilon_i^2, \quad E_K = d\sigma_i / d\varepsilon_i = E - 3m \varepsilon_i^2.$$

здесь σ_i – интенсивность напряжений, ε_i – интенсивность деформаций, E_C, E_K – секущий и касательный модули, соответственно, m – параметр материала.

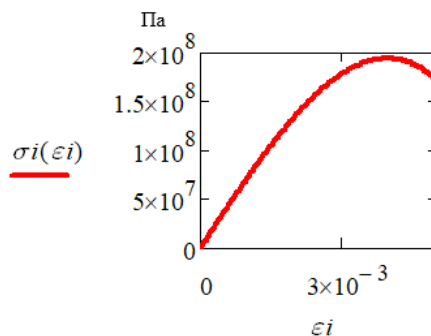


Рисунок 3 - Аппроксимация диаграммы деформирования материала TiNi кубической параболой
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.151.17.3>

Потенциальная энергия упругой деформации для выбранной аппроксимации диаграммы материала (рис. 1) запишется следующим образом [10]:

$$\Pi(W) = \frac{1}{2}EJ_y \int_0^l (W'')^2 dx - \frac{1}{4}mJ_n \int_0^l (W'')^4 dx - \int_0^l q(x)W dx - PW(x_P) - MW'(x_M) \quad (3)$$

здесь EJ_y – изгибная жесткость балки, $W(x)$ – прогиб, m – константа материала, x_P, x_M – координаты приложения сосредоточенной силы и момента соответственно; $J_y = b \cdot h^3 / 12$, $J_n = b \cdot h^5 / 80$; l – длина балки; $b = l / 7$ м и $h = 2b$ – размеры поперечного сечения.

Параметры сплава TiNi, обладающего эффектом памяти формы представлены в таблице 1.

Таблица 1 - Параметры материала TiNi
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.151.17.4>

Название	Значения
Характеристические температуры	$M_H = 330$ К, $A_H = 370$ К $M_K = 320$ К, $A_K = 380$ К
Константа материала k	$k = 0,29$ К · МПа ⁻¹
Константа материала B_Φ	$B_\Phi = 0,06$ К · 10 ⁻² МПа
Константа материала m	$m = 1,6 \cdot 10^9$ МПа
Модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ	$E = 7,42 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0,5$
Температура деформирования T_D	$T_D = A_K = 380$ К
Напряжения начала прямого мартенситного превращения (фазовый предел текучести) $\sigma_{H\uparrow}^{A \rightarrow M}$	$\sigma_{H\uparrow}^{A \rightarrow M} = \sigma_T = 172$ МПа
Напряжения конца прямого мартенситного превращения $\sigma_{K\uparrow}^{A \rightarrow M}$	$\sigma_{K\uparrow}^{A \rightarrow M} = \sigma_{\max} = 207$ МПа
Касательный модуль E_K	$E_K = 414$ МПа
Деформация на пределе текучести ε_T при T_D	$\varepsilon_T = \frac{\sigma_{H\uparrow}^{A \rightarrow M}}{E} = \frac{\sigma_T}{E} = 2,324 \cdot 10^{-3}$

Примечание: по ист. [1]

Численная модель

Согласно методу Ритца прогиб балки в первом приближении представим в виде:

$$W(x) = K\varphi(x) \quad (4)$$

где $\varphi(x)$ – аппроксимирующая функция, K – неопределенный коэффициент, представляющий собой амплитуду прогиба балки. Для построения функции $\varphi(x)$ используем метод начальных параметров, что позволит учесть не только геометрические, но и силовые граничные условия. Начало координат выбираем на левом конце балки, ось x направим вправо, ось z – вниз. Согласно универсальному уравнению метода начальных параметров для балки с постоянной жесткостью, выражение для прогиба будет иметь вид:

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ_y} + \frac{Q_0 x^3}{6EJ_y} + \frac{qx^4}{24EJ_y} + \frac{M(x-a_M)^2}{2EJ_y} + \frac{P(x-a_P)^3}{6EJ_y}, \quad (5)$$

здесь w_0, φ_0, M_0, Q_0 – начальные параметры, т.е. прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале координат, $a_M = 0,7$ м, $a_P = 0,5$ м – координаты точки приложения момента M и силы P , соответственно.

В соответствии с рисунком 1 балка состоит из трех участков. На каждом из участков выражения для линии прогибов имеют вид:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= w_0 + \varphi_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ_y} + \frac{Q_0 x^3}{6EJ_y} + \frac{qx^4}{24EJ_y}, \\ w_2(x) &= w_0 + \varphi_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ_y} + \frac{Q_0 x^3}{6EJ_y} + \frac{qx^4}{24EJ_y} + \frac{P(x - a_P)^3}{6EJ_y}, \\ w_3(x) &= w_0 + \varphi_0 x + \frac{M_0 x^2}{2EJ_y} + \frac{Q_0 x^3}{6EJ_y} + \frac{qx^4}{24EJ_y} + \frac{P(x - a_P)^3}{6EJ_y} + \frac{M(x - a_M)^2}{2EJ_y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Начальные параметры определяются исходя из граничных условий. На левой опоре имеем шарнирное закрепление $w_0=M_0=0$, на правой при $x=l=0,8$ м – жесткая заделка $w_3(l)=\varphi_3(l)=0$. Для определения $\varphi_3(l)$ требуется проинтегрировать выражение для прогибов на третьем участке $w_3(x)$ и в полученное выражение подставить $x=l$. В результате для определения начальных параметров получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_0 l + \frac{Q_0 l^3}{6EJ_y} + \frac{ql^4}{24EJ_y} + \frac{M(l-a_M)^2}{2EJ_y} + \frac{P(l-a_P)^3}{6EJ_y} = 0 \\ \varphi_0 + \frac{Q_0 l^2}{2EJ_y} + \frac{ql^3}{6EJ_y} + \frac{M(l-a_M)}{EJ_y} + \frac{P(l-a_P)^2}{2EJ_y} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Решая эту систему уравнений при численных значениях коэффициентов получим: $\varphi_0=3,98/EJ_y$, $Q_0=-90,4H$. Найденные значения начальных параметров позволяют записать функции прогибов на каждом участке. Умножая выражения $w_1(x)$, $w_2(x)$, $w_3(x)$ на величину $24EJ_y/q$ получим окончательное выражение для аппроксимирующей функции прогиба:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 0,38 \cdot x - 1,45 \cdot x^3 + x^4 \\ \varphi_2(x) &= 0,38 \cdot x - 1,45 \cdot x^3 + x^4 + 0,4(x - 0,5)^3 \\ \varphi_3(x) &= 0,38 \cdot x - 1,45 \cdot x^3 + x^4 + 0,4(x - 0,5)^3 + 1,2(x - 0,7)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя в (3) $W(x)=K\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – функция, построенная методом начальных параметров (8), получим зависимость полной потенциальной энергии от параметра K :

$$\Pi(K) = f_1 K^2 - f_2 K^4 - f_3 K, \quad (9)$$

где коэффициенты при параметре K определяются по формулам:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{Ebh^3}{24} \int_0^l (\varphi'')^2 dx = 8,313 \cdot 10^6, & f_2 &= \frac{mbh^5}{320} \int_0^l (\varphi'')^4 dx = 4,85 \cdot 10^9, \\ f_3 &= \int_0^l q(x)\varphi dx + P\varphi(x_P) + M\varphi'(x_M) = 3,885. \end{aligned} \quad (10)$$

Интервал интегрирования в (9) следует разбить на три участка:

$$\int_0^l \varphi dx = \int_0^{a_P} \varphi_1 dx + \int_{a_P}^{a_M} \varphi_2 dx + \int_{a_M}^l \varphi_3 dx \quad (11)$$

и в пределах каждого участка брать интегралы от производных соответствующих функций.

Минимизация полной потенциальной энергии балки по параметру K , приводит к нелинейному алгебраическому уравнению третьей степени относительно амплитуды прогиба K :

$$\frac{d\Pi}{dK} = 2f_1 K - 4f_2 K^3 - f_3 = 0 \quad (12)$$

Решая полученное уравнение в системе *Mathcad*, получим $K=0,0293$.

Результаты

Результаты расчета представлены на рисунке 4 и в таблице 2.

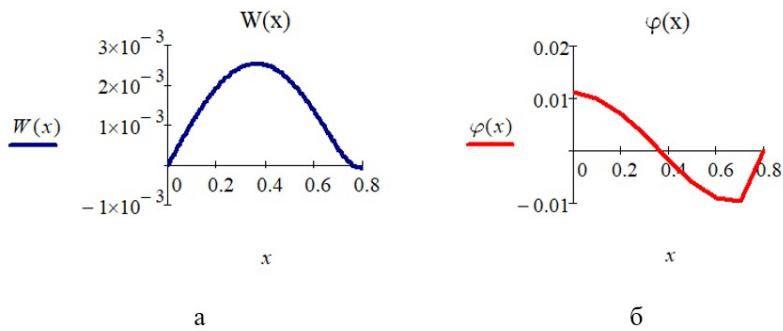


Рисунок 4 - Распределение прогиба $W(x)$ (а) и угла поворота $\varphi(x)$ (б) по длине балки
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.151.17.5>

Таблица 2 - Результаты расчета

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.151.17.6>

$W_{\max} \times 10^{-3}$, м	$\varphi_{\max} \times 10^{-2}$	$M_{\max} \times 10^8$ Нм	$\epsilon_{\max} \times 10^{-3}$
2,533	1,088	2,659	12,899

Заключение

В заключение можно отметить, что метод Ритца в сочетании с методом начальных параметров эффективен для расчетов балочных конструкций, выполненных из материалов с ЭПФ.

Благодарности

Автор благодарит профессора Малинину Н.А.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Acknowledgement

The author expresses gratitude to Professor Malinina N.A.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Лихачев В.А. Структурно-аналитическая теория прочности / В.А. Лихачев, В.Г. Малинин. — СПб.: Наука, 1993. — 471 с.
2. Малинин В.Г. Механические свойства материалов с эффектом памяти формы при сложных режимах изотермического нагружения / В.Г. Малинин, Н.А. Малинина, Г.В. Малинин // Приложение к Инженерному журналу: справочник. — Москва: Машиностроение, 2002. — № 10. — Ч. 1. — С. 27.; Ч. 2. — С. 25.
3. Малинин Г.В. Структурно-аналитическая мезомеханика наноструктурных состояний среды с обратимыми мартенситными превращениями (статья) / Г.В. Малинин // Наноинженерия. — 2012. — № 5. — С. 22–29.
4. Малинин В.Г. Метод прогноза эффекта пластичности превращения при сложном напряженном состоянии на основе развития структурно-аналитической мезомеханики (статья) / В.Г. Малинин, Н.А. Малинина, Г.В. Малинин [и др.] // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии (Госуниверситет-УНПК). — 2012. — № 2 (292). — С. 50–55.
5. Малинин Г.В. Вывод определяющих соотношений для материала с эффектом памяти формы (статья) / Г.В. Малинин, Н.А. Малинина // X Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Энергосбережение. Экология. Новые технологии». — Старый Оскол, 2013. — С. 57–61.
6. Малинин Г.В. Применение метода конечных элементов для расчета статически неопределимой стержневой системы, выполненной из материала с эффектом памяти формы (статья) / Г.В. Малинин // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии (Госуниверситет-УНПК). — 2015. — № 4 (312). — С. 3–11.
7. Малинин Г.В. Применение метода граничных элементов для расчета статически неопределимой фермы, выполненной из материала с эффектом памяти формы (статья) / Г.В. Малинин // Вестник Самарского государственного университета путей сообщения (СамГУПС). — 2014. — № 1 (23). — С. 71–77.
8. Малинина Н.А. Применение метода конечных разностей для расчета пластины, выполненной из материала с эффектом памяти формы (статья) / Н.А. Малинина, Г.В. Малинин // Journal of Advanced Research in Natural Science. — North Charleston: SRC MS, CreateSpace, 2017. — Iss. 1. — P. 18–24.

9. Малинина Н.А. Применение метода конечных разностей для расчета полой оболочки, выполненной из материала с эффектом памяти формы / Н.А. Малинина, Г.В. Малинин // Материалы IX Международного научного симпозиума «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела посвященного 90-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ, профессора Зубчанинова Владимира Георгиевича», Тверь, 15—17 декабря 2020 г. — С. 167–173.

10. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В.В. Петров. — М.: Инфа-Инженерия, 2014. — 479 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Lihachev V.A. Strukturno-analiticheskaja teorija prochnosti [Structural-analytical theory of strength] / V.A. Lihachev, V.G. Malinin. — SPb.: Nauka, 1993. — 471 p. [in Russian]

2. Malinin V.G. Mehanicheskie svojstva materialov s jeffektom pamjati formy pri slozhnyh rezhimah izotermicheskogo nagruženija [Mechanical properties of materials with shape memory effect under complex modes of isothermal loading] / V.G. Malinin, N.A. Malinina, G.V. Malinin // Prilozhenie k Inzhenernomu zhurnalu: spravocnik [Appendix to Engineering Journal: reference book]. — Moscow: Mashinostroenie, 2002. — № 10. — Pt. 1. — P. 27.; Pt. 2. — P. 25. [in Russian]

3. Malinin G.V. Strukturno-analiticheskaja mezomehanika nanostrukturnyh sostojanij sredy s obratimymi martensitnymi prevrashhenijami (stat'ja) [Structure-analytical mesomechanics of nanostructured medium states with reversible martensitic transformations (article)] / G.V. Malinin // Nanoinzhenerija [Nanoengineering]. — 2012. — № 5. — P. 22–29. [in Russian]

4. Malinin V.G. Metod prognoza jeffekta plastichnosti prevrashhenija pri slozhnom naprjazhennom sostojanii na osnove razvitiya strukturno-analiticheskoy mezomehaniki (stat'ja) [Method for predicting the effect of transformation plasticity under complex stress state on the basis of development of structural-analytical mesomechanics (article)] / V.G. Malinin, N.A. Malinina, G.V. Malinin [et al.] // Fundamental'nye i prikladnye problemy tehniki i tehnologii (Gosuniversitet-UNPK) [Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology (State University-UNPK)]. — 2012. — № 2 (292). — P. 50–55. [in Russian]

5. Malinin G.V. Vyvod opredelajushhih sootnoshenij dlja materiala s jeffektom pamjati formy (stat'ja) [Conclusion of determining relations for the material with shape memory effect (article)] / G.V. Malinin, N.A. Malinina // H Vserossijskaja nauchno-prakticheskaja konferencija s mezhdunarodnym uchastiem «Sovremennye problemy gorno-metallurgicheskogo kompleksa. Jenergosberezenie. Jekologija. Novye tehnologii [X All-Russian Scientific and Practical Conference with International Participation 'Modern Problems of Mining and Metallurgical Complex. Energy Saving. Ecology. New Technologies']». — Staryj Oskol, 2013. — P. 57–61. [in Russian]

6. Malinin G.V. Primenenie metoda konechnyh jelementov dlja rascheta staticheski neopredelimoj sterzhnevoj sistemy, vypolnennoj iz materiala s jeffektom pamjati formy (stat'ja) [Application of finite element method for calculation of statically indeterminate rod system made of material with shape memory effect (article)] / G.V. Malinin // Fundamental'nye i prikladnye problemy tehniki i tehnologii (Gosuniversitet-UNPK) [Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology (State University-UNPK)]. — 2015. — № 4 (312). — P. 3–11. [in Russian]

7. Malinin G.V. Primenenie metoda granichnyh jelementov dlja rascheta staticheski neopredelimoj fermy, vypolnennoj iz materiala s jeffektom pamjati formy (stat'ja) [Application of the boundary element method for the calculation of a statically indeterminate truss made of material with shape memory effect (article)] / G.V. Malinin // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta putej soobshhenija (SamGUPS) [Bulletin of Samara State University of Railway Engineering (SamSURE)]. — 2014. — № 1 (23). — P. 71–77. [in Russian]

8. Malinina N.A. Primenenie metoda konechnyh raznostej dlja rascheta plastiny, vypolnennoj iz materiala s jeffektom pamjati formy (stat'ja) [Application of the finite difference method for the calculation of a plate made of material with shape memory effect (article)] / N.A. Malinina, G.V. Malinin // Journal of Advanced Research in Natural Science. — North Charleston: SRC MS, CreateSpace, 2017. — Iss. 1. — P. 18–24. [in Russian]

9. Malinina N.A. Primenenie metoda konechnyh raznostej dlja rascheta pologoj obolochki, vypolnennoj iz materiala s jeffektom pamjati formy [Application of the finite difference method for calculation of a hollow shell made of material with shape memory effect] / N.A. Malinina, G.V. Malinin // Materialy IH Mezhdunarodnogo nauchnogo simpoziuma «Problemy prochnosti, plastichnosti i ustojchivosti v mehanike deformiruемого твердого тела posvjashhennogo 90-letiju so dnja rozhdenija zasluzhennogo dejatelja nauki i tehniki RF, professora Zubchaninova Vladimira Georgievicha», Tver', 15—17 dekabrja 2020 g. [Proceedings of the IX International Scientific Symposium 'Problems of Strength, Plasticity and Stability in Mechanics of Deformable Solids dedicated to the 90th anniversary of the Honoured Scientist and Technician of the Russian Federation, Professor Vladimir Georgievich Zubchaninov', Tver, 15-17 December 2020] — P. 167–173. [in Russian]

10. Petrov V.V. Nelinejnaja inkremental'naja stroitel'naja mehanika [Nonlinear incremental structural mechanics] / V.V. Petrov. — М.: Инфа-Инженерия, 2014. — 479 p. [in Russian]