ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА/DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2025.154.102

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Научная статья

Бжеумихова О.И.[1, *]
[1] ORCID : 0000-0001-6730-9203;
[1] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (bzhoksana[at]gmail.com)

Аннотация

В настоящей работе исследована краевая задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, а именно с преобразованием аргумента, которое является инволюцией. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом возникают при моделировании различных физических и геофизических процессов, экономических задач, и имеют важное значение в описании медицинских моделей, где отклонение аргумента приобретает особую значимость. Вопрос разрешимости задачи в требуемом классе функций, методом разделения переменных, сводится к разрешимости эквивалентной ей задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с инволютивным отклонением аргумента. Доказаны теоремы, устанавливающие существование и единственность решения изучаемой задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, отклоняющийся аргумент, инволюция, краевая задача, метод разделения переменных.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARTIAL DERIVATIVE EQUATION WITH ARGUMENT DEVIATION

Research article

Bzheumikhova O.I.[1, *]
[1] ORCID : 0000-0001-6730-9203;
[1] Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russian Federation

* Corresponding author (bzhoksana[at]gmail.com)

Abstract

In this work, the boundary value problem for a differential equation with a deviating argument, namely with an argument transformation which is an involution, is studied. Differential equations with a deviating argument occur in the modelling of various physical and geophysical processes, economic problems, and are important in the description of medical models, where the deviation of the argument is of particular importance. The question of solvability of the problem in the required class of functions, by the method of separation of variables, is reduced to the solvability of the equivalent problem for an ordinary differential equation with an involutive deviation of the argument. The theorems establishing existence and uniqueness of the solution of the problem under study are proved.

Keywords: differential equations, deviating argument, involution, boundary value problem, method of separation of variables.

Введение

Тщательное изучение мира вокруг нас приводит к тому, что скорость процессов в физических системах определяется не только их текущим состоянием, но и предысторией этих процессов. Эти факторы неизбежно приводят к появлению в дифференциальных уравнениях некоторого отклонения аргумента. Хорошо известно, что дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом является дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция и ее производные входят при различных значениях аргумента. Дифференциальные уравнения с аргументом, имеющим отклонение, находят широкое применение в теории автоматического управления, при исследовании вопросов горения в ракетных двигателях, в исследованиях систем с автоколебаниями, при рассмотрении задач долгосрочного прогнозирования в экономике, а также в ряде биофизических исследований и других научно-технических областях, которые постоянно расширяются [1].

Систематическое исследование дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом было начато в середине прошлого века отечественными учеными Л.Э. Эльсгольцем [2], С.Б. Норкиным [3], А.Д. Мышкисом [4], а также зарубежным исследователями Р. Беллманом [5] и Дж. Хейлом [6]. С того времени актуальность их применения, сложность и новизна возникающих задач привлекали и продолжают привлекать к дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом множество исследователей.

Современная математическая литература изобилует трудами, как российских, так и зарубежных ученых, посвященными исследованию краевых задач для уравнений с отклоняющимся аргументом. В качестве примера приведем лишь некоторые публикации последних лет, ярко демонстрирующие актуальность данной проблематики (см. также приведенные в них ссылки). В работе [7] получены оценки решения краевой задачи для неявного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Исследованию нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейной части посвящена работа [8], в которой установлены условия асимптотической устойчивости тривиального решения. К такому классу уравнений относится уравнение колебаний перевернутого маятника, точка подвеса которого совершает произвольные периодические колебания вдоль вертикальной линии. В статье [9] анализируется функционально-дифференциальное уравнение n -го порядка с неограниченными линейными операторными коэффициентами и отклоняющимся аргументом, рассматриваемое в гильбертовом пространстве при заданных начальных условиях. Работа [10] предлагает точные решения, полученные методом преобразования Лапласа, для линейного дифференциального уравнения второго порядка нейтрального типа с отклоняющимся аргументом, широко применяемых в физике и инженерии. Статья содержит подробный иллюстративный пример. Особого внимания заслуживают работы [11] и [12], посвященные изучению краевых задач для дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и с отклоняющимся аргументом. В частности, в [12] методом Фаэдо–Галеркина исследуется нелокальная задача для дробного дифференциального уравнения типа Соболева с отклоняющимся аргументом. Перечисленные работы отличаются как используемыми методами, так и разнообразием рассматриваемых задач.

Среди быстро развивающихся направлений в области дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом можно выделить исследования, посвященные разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений, преобразования аргументов которых являются инволюциями. Инволюцией или инволютивным отображением $\varphi(t)$ называется отображение для которого $\varphi^2(t) = \varphi(\varphi(t)) = t$ [13]. Основные виды инволюции приведены в работе [13].

Впервые обыкновенные дифференциальные уравнения с инволютивным отклонением аргумента были упомянуты в работе Чарльза Бэббиджа, опубликованной в 1816 году [14]. Необходимо отметить, что такие уравнения встречаются в различных геометрических задачах [15], а также в задачах, связанных с теорией фильтрации [16, С. 61] и изучением субгармонических колебаний, описываемых уравнениями без диссипации [17, С. 271].

В настоящее время в математической литературе имеются многочисленные работы, в которых ставятся и исследуются краевые задачи как для обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией [18], [19], так и для уравнений в частных [20], [21] и дробных производных [22], [23] с инволютивным отклонением аргумента (см. также источники, указанные в этих работах). В большинстве этих работ рассматриваемые уравнения либо имеют специальный вид, либо же инволюция в них является линейной.

В данной работе исследуется разрешимость краевой задачи для одного частного случая инволютивного отклонения аргумента. В отличие от ранее проведенных исследований, данная работа посвящена изучению разрешимости краевой задачи при определенном отклонении аргумента $\varphi(t) = \ln\left(b - e^t\right)$, представляющем особый интерес. Впервые это отклонение аргумента было представлено в работе [24].

Таким образом, настоящая цель данного исследования заключается в изучении краевой задачи для дифференциального уравнения с аргументом, имеющим отклонение, а именно с инволютивным отклонением аргумента вида $\varphi(t) = \ln\left(b - e^t\right)$.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_t(x,t) = a u_{xx}(x, \ln(b - e^t)) \tag{1}$$

в конечной прямоугольной области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < x_0, t_0 < t < T\}$, где x_0, t_0, T — заданные действительные числа, причем $T < \ln b$, $2e^{t_0} \le b \le 2e^T$.

В данной области Ω исследована следующая

Задача 1. *Определить функцию* $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *, являющуюся решением уравнения (1) и такую, что удовлетворяет условиям*

$$u(0,t) = u(x_0,t) = 0, \qquad t_0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u\left(x, \ln\frac{b}{2}\right) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le x_0, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ *— заданная достаточно гладкая функция,* $a = \left(\frac{x_0}{\pi n}\right)^2$, n=1,2,... .

Хорошо известно, что данная задача достаточно подробно изучена в случае отсутствия в уравнении инволютивного отклонения аргумента.

Исследование разрешимости задачи

Решение задачи (1)–(3) будем искать методом разделения переменных, а именно в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right),$$

где $y_n(t)$ определяются из соотношений

$$y_n'(t) = y_n(\ln b - e^t)) \tag{4}$$

$$y_n(\ln\tfrac{b}{2}) = \varphi_n, \tag{5}$$

где $\varphi_n = \frac{2}{x_0}\int\limits_0^{x_0} \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{x_0} x\right) dx.$

Исследование задачи (4)–(5) будем проводить аналогично методу, предложенному в работе [25].

Продифференцировав обе части уравнения (4), получим

$$y_n''(t) = \frac{e^t}{e^t-b} y_n'(\ln(b-e^t)). \tag{6}$$

С другой стороны из (4) при $t = \ln(b-e^t)$ будем иметь

$$y_n'(\ln(b-e^t)) = y_n(t). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), а также учитывая (5) задача (4), (5) сведется к следующей эквивалентной ей начальной задаче: *найти решение* $y_n(t)$ *уравнения*

$$y_n''(t) = \frac{e^t}{e^t-b} y_n(t), \tag{8}$$

удовлетворяющее условиям (5) и

$$y_n'\left(\ln\frac{b}{2}\right) = \varphi_n. \tag{9}$$

С учетом результатов, приведенных в [26, С. 156], общее решение уравнения (8) имеет вид:

$$y_n(t) = C_1\left((b-e^t)\ln\left(\frac{e^t}{b-e^t}\right) + b\right) + C_2(e^t - b).$$

Тогда, удовлетворяя $y_n(t)$ в неподвижной точке условиям (5), (9), получим

$$\begin{cases} C_1 b - \frac{b}{2}C_2 = \varphi_n, \\ C_1 b + \frac{b}{2}C_2 = \varphi_n, \end{cases}$$

откуда имеем

$$C_1 = \frac{\varphi_n}{b}, \quad C_2 = 0 \ .$$

Следовательно, единственное решение задачи (8), (5), (9) представимо в виде:

$$y_n(t) = \frac{\varphi_n}{b}\left((b-e^t)\ln\left(\frac{e^t}{b-e^t}\right) + b\right). \tag{10}$$

Непосредственной подстановкой (10) в (4) и (5) не трудно убедиться, что данная функция также представляет собой решение задачи (4) и (5).

Таким образом, для задачи (4), (5) доказана следующая

Теорема 1. *Решение обыкновенного дифференциального уравнения (8) с начальными условиями (5) и (9) будет также решением задачи (4), (5) и имеет вид (10).*

Следовательно, искомым решением задачи (1)–(3) будет функция:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{b}\left((b-e^t)\ln\left(\frac{e^t}{b-e^t}\right) + b\right)\sin\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right). \tag{11}$$

Лемма 1. *Если функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям* $\varphi(x) \in C^3[0, x_0]$, $\varphi(0) = \varphi(x_0) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(x_0) = 0$ *, то для нее справедлива оценка:*

$$|\varphi_n| \le \frac{M|\rho_n|}{n^3},$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 < +\infty, \qquad M = const.$$

Доказательство. Трижды применив метод интегрирования по частям к интегралу

$$\varphi_n = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right)dx.$$

и учитывая условия леммы 1 на функцию $\varphi(x)$, будем иметь

$$\varphi_n = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right)dx = \frac{2}{x_0}\frac{x_0}{\pi n}\int_0^{x_0} \varphi'(x)\cos\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{x_0}\left(\frac{x_0}{\pi n}\right)^2\int_0^{x_0} \varphi''(x)\sin\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{x_0}\left(\frac{x_0}{\pi n}\right)^3\int_0^{x_0} \varphi'''(x)\cos\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right)dx = -\frac{\rho_n}{\left(\frac{\pi n}{x_0}\right)^3},$$

где

$$\rho_n = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} \varphi'''(x)\cos\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right)dx.$$

Используя неравенство Бесселя, а также учитывая свойство непрерывности функции $\varphi'''(x)$ на отрезке $[0, x_0]$, согласно условиям леммы 1 легко убедиться, что ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 < \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0} [\varphi'''(x)]^2\,dx.$$

Доказательство леммы завершено.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 1, тогда для любого* $x \in [0, x_0]$ *и* $t \in [t_0, T]$ *при достаточно больших значениях* n *верными являются нижеследующие оценки:*

$$|u(x,t)| \le \frac{N_1|\rho_n|}{n^3}, \quad |u_x(x,t)| \le \frac{N_2|\rho_n|}{n^2}, \quad |u_t(x,t)| \le \frac{N_3|\rho_n|}{n^3},$$
$$|u_{xx}(x,t)| \le \frac{N_4|\rho_n|}{n}, \quad |u_{xt}(x,t)| \le \frac{N_5|\rho_n|}{n^2}, \quad |u_{tt}(x,t)| \le \frac{N_6|\rho_n|}{n^3},$$

где $N_i = const,\ i = \overline{1,6}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы найдем производные $u_x(x,t),\ u_t(x,t),\ u_{xx}(x,t),\ u_{xt}(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$, получим:

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{b}\left((b-e^t)\ln\left(\frac{e^t}{b-e^t}\right)+b\right)\frac{\pi n}{x_0}\cos\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right),$$
$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{b}\left(b-e^t\ln\left(\frac{e^t}{b-e^t}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right),$$
$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{b}\left((b-e^t)\ln\left(\frac{e^t}{b-e^t}\right)+b\right)\left(\frac{\pi n}{x_0}\right)^2\sin\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right),$$
$$u_{xt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{b}\left(b-e^t\ln\left(\frac{e^t}{b-e^t}\right)\right)\frac{\pi n}{x_0}\cos\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right),$$
$$u_{tt}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{b}\left(e^t\ln\left(\frac{e^t}{b-e^t}\right)+\frac{be^t}{b-e^t}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right).$$

На основе леммы 1, нетрудно подтвердить правильность следующих оценок:

$$|u(x,t)| \le Q_1|\varphi_n| \le \frac{N_1|\rho_n|}{n^3}, \quad |u_x(x,t)| \le Q_2|\varphi_n|\frac{\pi n}{x_0} \le \frac{N_2|\rho_n|}{n^2}, \quad |u_t(x,t)| \le Q_3|\varphi_n| \le \frac{N_3|\rho_n|}{n^3},$$
$$|u_{xx}(x,t)| \le Q_4|\varphi_n|\left(\frac{\pi n}{x_0}\right)^2 \le \frac{N_4|\rho_n|}{n}, \quad |u_{xt}(x,t)| \le Q_5|\varphi_n|\frac{\pi n}{x_0} \le \frac{N_5|\rho_n|}{n^2}, \quad |u_{tt}(x,t)| \le Q_6|\varphi_n| \le \frac{N_6|\rho_n|}{n^3},$$

где $Q_i = const,\ i = \overline{1,6}.$

Доказательство теоремы завершено.

Теорема 3. *Если существует решение задачи (1)–(3), то оно единственно для любого* $0 \le x \le x_0,\ t_0 \le t \le T$.

Доказательство. Действительно, пусть $\varphi(x) = 0,$ тогда на основании равенства (11) и в силу полноты системы $\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, $0 \le x \le x_0$ в пространстве $L_2[0, x_0]$, будем иметь $u(x,t) \equiv 0.$

Следовательно, убеждаемся в том, что для однородной задачи (1)-(3) существует лишь тривиальное решение. Из этого вытекает, что задача (1)–(3) имеет единственное решение.

Теорема доказана.

Таким образом, если выполняются условия теоремы 2 и теоремы 3, то существует единственное решение задачи (1)–(3), и оно может быть представлено в виде суммы сходящегося ряда (11), где

$$\varphi_n = \frac{2}{x_0}\int_0^{x_0}\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{x_0}x\right)dx.$$

Заключение

В настоящей работе для одного частного случая инволютивного отклонения аргумента впервые предложена и исследована разрешимость краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных. Применяя метод разделения переменных, вопрос о разрешимости задачи в искомом классе функций был сведен к разрешимости эквивалентной ей задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с инволютивным отклонением аргумента. Полученные в работе результаты могут быть оценены как с теоретической точки зрения, поскольку позволяют ответить на некоторые вопросы, связанные с краевыми задачами для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, так и с прикладной точки зрения, в связи со значительным спектром прикладных задач, сводящихся к уравнениям с отклоняющимся аргументом.

Финансирование

Исследование выполнено при финансовой поддержке Внутреннего гранта КБГУ (Договор №8).

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Funding

The research was carried out with the financial support of the KBSU Internal Grant (Contract No. 8).

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Kolmanovskii V. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations Mathematics and Its Applications / V. Kolmanovskii, A. Myshkis. — Dordrecht; Boston; London: Published by Kluwer Academic Publishers, 1999. — Vol. 463. — 664 p.

2. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц. — Москва: Наука, 1964. — 128 с.
3. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом / С.Б. Норкин. — Москва: Наука, 1965. — 356 с.
4. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис. — Москва: Наука, 1972. — 352 с.
5. Bellman R. Differential-Difference Equations / R. Bellman, K.L. Cooke. — New York-London: Academic Press, 1963. — 461 p.
6. Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations Applied Mathematical Sciences / J.K. Hale. — New York: Springer-Verlag, 1977. — Vol. 3. — 366 p.
7. Жуковская Т.В. Об оценке решения краевой задачи для неявного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. / Т.В. Жуковская, И.Д. Серова // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2020. — 186. — С. 38–44. — DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-38-44.
8. Demidenko G.V. Asymptotic stability of solutions to a class of second-order delay differential equations. / G.V. Demidenko, I.I. Matveeva // Mathematics. — 2021. — 9(16). — DOI: 10.3390/math9161847
9. Эмирова И.С. Оценка характеристического показателя решения уравнения n-го порядка с отклонением аргумента в гильбертовом пространстве. / И.С. Эмирова // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. — 2021. — 36(4). — С. 83–89. — DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-83-89
10. Sasikala K. Application of Laplace Transform Method to Solve Neutral-Type Delay Differential Equation. / K. Sasikala, D. Piriadarshani, V. Govindan et al. // Contemporary Mathematics. — 2024. — 6(1). — P. 85–97. — DOI: 10.37256/cm.6120254163
11. Петросян Г.Г. Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве. / Г.Г. Петросян // Уфимский математический журнал. — 2020. — 12(3). — С. 71–82.
12. Manjula M. Analysis on nonlinear differential equation with a deviating argument via Faedo–Galerkin method. / M. Manjula, E. Thilakraj, P. Sawangtong et al. // Results in Applied Mathematics. — 2024. — 22. — P. 1–12. — DOI: 10.1016/j.rinam.2024.100452
13. Wiener J. A glimpse into the wonderland of involutions. / J. Wiener, W. Watkins // Missouri J. Math. Sci. — 2002. — 14 (3). — P. 175–185.
14. Babbage Ch. An essay towards the calculus of function. / Ch. Babbage // Philophical transations of the Royal Society of London. — 1816. — 11. — P. 179–256.
15. Lacroix S.F. Traite du calcul differentiel et du calcul integral / S.F. Lacroix. — Paris, 1819. — Vol. 3. — Ch. 8.
16. Герсеванов Н.М. Итерационное исчисление и его приложения / Н.М. Герсеванов. — Москва: Машстройиздат, 1950. — 68 с.
17. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний / В.А. Плисс. — Москва: Наука, 1964. — 368 с.
18. Крицков Л.В. Спектральные свойства задачи Коши для оператора второго порядка с инволюцией. / Л.В. Крицков, В.Л. Иоффе // Дифференциальные уравнения. — 2021. — 57 (1). — DOI: 10.31857/S0374064121010027
19. Sarsenbi A. Boundary value problems for a second-order differential equation with involution in the second derivative and their solvability. / A. Sarsenbi, A. Sarsenbi // AIMS Mathematics. — 2023. — 8(11). — P. 26275-26289. — DOI: 10.3934/math.20231340
20. Ashyralyev A. On the hyperbolic type differential equation with time involution. / A. Ashyralyev, A. Ashyralyyev, B. Abdalmohammed // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. — 2023. — 1(109). — P. 38–47. — DOI: 10.31489/2023M1/38-47
21. Лесев В.Н. Краевая задача для модельного дифференциального уравнения с инволюцией в прямоугольной области. / В.Н. Лесев, О.И. Бжеумихова, А.О. Желдашева и др. // Международный научно-исследовательский журнал. — 2023. — 11(137). — DOI: 10.23670/IRJ.2023.137.53
22. Kirane M. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative. / M. Kirane, A.A. Sarsenbi // Fractal Fract. — 2023. — 7(2). — P. 131. — DOI: 10.3390/fractalfract7020131
23. Энеева Л.М. Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией. / Л.М. Энеева // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. — 2024. — 48(3). — С. 43–55. — DOI: 10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55
24. Dekhkonov F.N. Differential Equation Associated with Involutions. / F.N. Dekhkonov // Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics. — 2021. — 3. — P. 7–13.
25. Винер И.Я. Дифференциальные уравнения с инволюциями. / И.Я. Винер // Дифференциальные уравнения. — 1969. — 5 (6). — С. 1131–1137.
26. Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциаль-дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. — Москва: Физматлит, 2001. — 576 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Kolmanovskii V. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations Mathematics and Its Applications / V. Kolmanovskii, A. Myshkis. — Dordrecht; Boston; London: Published by Kluwer Academic Publishers, 1999. — Vol. 463. — 664 p.
2. E'l'sgol'cz L.E'. Vvedenie v teoriyu differencial'ny'x uravnenij s otklonyayushhimsya argumentom [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument] / L.E'. E'l'sgol'cz. — Moscow: Nauka, 1964. — 128 p. [in Russian]
3. Norkin S.B. Differencial'ny'e uravneniya vtorogo poryadka s zapazdy'vayushhim argumentom [Second order differential equations with retarded argument] / S.B. Norkin. — Moscow: Nauka, 1965. — 356 p. [in Russian]

4. My'shkis A.D. Linejny'e differencial'ny'e uravneniya s zapazdy'vayushhim argumentom [Linear differential equations with retarded argument] / A.D. My'shkis. — Moscow: Nauka, 1972. — 352 p. [in Russian]

5. Bellman R. Differential-Difference Equations / R. Bellman, K.L. Cooke. — New York-London: Academic Press, 1963. — 461 p.

6. Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations Applied Mathematical Sciences / J.K. Hale. — New York: Springer-Verlag, 1977. — Vol. 3. — 366 p.

7. Zhukovskaya T.V. Ob ocenke resheniya kraevoj zadachi dlya neyavnogo differencial'nogo uravneniya s otklonyayushhimsya argumentom [On Estimates of Solutions of Boundary-value Problems for Implicit Differential Equations with Deviating Argument]. / T.V. Zhukovskaya, I.D. Serova // Progress in Science and Technology. Contemporary Mathematics and its Applications. Thematic Surveys. — 2020. — 186. — P. 38–44. — DOI: 10.36535/0233-6723-2020-186-38-44. [in Russian]

8. Demidenko G.V. Asymptotic stability of solutions to a class of second-order delay differential equations. / G.V. Demidenko, I.I. Matveeva // Mathematics. — 2021. — 9(16). — DOI: 10.3390/math9161847

9. E'mirova I.S. Ocenka xarakteristicheskogo pokazatelya resheniya uravneniya n-go poryadka s otkloneniem argumenta v gil'bertovom prostranstve [Estimation of characteristic exponent of the solution of the n-order equation in the argument deviation in hilbert space]. / I.S. E'mirova // Bulletin of Dagestan State University. Series 1: Natural Sciences. — 2021. — 36(4). — P. 83–89. — DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-83-89 [in Russian]

10. Sasikala K. Application of Laplace Transform Method to Solve Neutral-Type Delay Differential Equation. / K. Sasikala, D. Piriadarshani, V. Govindan et al. // Contemporary Mathematics. — 2024. — 6(1). — P. 85–97. — DOI: 10.37256/cm.6120254163

11. Petrosyan G.G. Ob antiperiodicheskoj kraevoj zadache dlya polulinejnogo differencial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s otklonyayushhimsya argumentom v banaxovom prostranstve [On Antiperiodic Boundary Value Problem for Semilinear Fractional Differential Inclusion with Deviating Argument in Banach Space]. / G.G. Petrosyan // Ufa Mathematical Journal. — 2020. — 12(3). — P. 71–82. [in Russian]

12. Manjula M. Analysis on nonlinear differential equation with a deviating argument via Faedo–Galerkin method. / M. Manjula, E. Thilakraj, P. Sawangtong et al. // Results in Applied Mathematics. — 2024. — 22. — P. 1–12. — DOI: 10.1016/j.rinam.2024.100452

13. Wiener J. A glimpse into the wonderland of involutions. / J. Wiener, W. Watkins // Missouri J. Math. Sci. — 2002. — 14 (3). — P. 175–185.

14. Babbage Ch. An essay towards the calculus of function. / Ch. Babbage // Philophical transations of the Royal Society of London. — 1816. — 11. — P. 179–256.

15. Lacroix S.F. Traite du calcul differentiel et du calcul integral [Features of Differential and Integral Calculus] / S.F. Lacroix. — Paris, 1819. — Vol. 3. — Ch. 8. [in French]

16. Gersevanov N.M. Iteracionnoe ischislenie i ego prilozheniya [Iterative Calculus and its Applications] / N.M. Gersevanov. — Moscow: Mashstrojizdat, 1950. — 68 p. [in Russian]

17. Pliss V.A. Nelokal'ny'e problemy' teorii kolebanij [Non-local Problems of Oscillation Theory] / V.A. Pliss. — Moscow: Nauka, 1964. — 368 p. [in Russian]

18. Kriczkov L.V. Spektral'ny'e svojstva zadachi Koshi dlya operatora vtorogo poryadka s involyuciej [Spectral Properties of the Cauchy Problem for a Second-Order Operator with Involution]. / L.V. Kriczkov, V.L. Ioffe // Differential Equations. — 2021. — 57 (1). — DOI: 10.31857/S0374064121010027 [in Russian]

19. Sarsenbi A. Boundary value problems for a second-order differential equation with involution in the second derivative and their solvability. / A. Sarsenbi, A. Sarsenbi // AIMS Mathematics. — 2023. — 8(11). — P. 26275-26289. — DOI: 10.3934/math.20231340

20. Ashyralyev A. On the hyperbolic type differential equation with time involution. / A. Ashyralyev, A. Ashyralyyev, B. Abdalmohammed // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. — 2023. — 1(109). — P. 38–47. — DOI: 10.31489/2023M1/38-47

21. Lesev V.N. Kraevaya zadacha dlya model'nogo differencial'nogo uravneniya s involyuciej v pryamougol'noj oblasti [Boundary Value Problem for a Model Differential Equation with Involution in a Rectangular Domain]. / V.N. Lesev, O.I. Bzheumixova, A.O. Zheldasheva et al. // International Research Journal. — 2023. — 11(137). — DOI: 10.23670/IRJ.2023.137.53 [in Russian]

22. Kirane M. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative. / M. Kirane, A.A. Sarsenbi // Fractal Fract. — 2023. — 7(2). — P. 131. — DOI: 10.3390/fractalfract7020131

23. E'neeva L.M. Zadacha Koshi dlya uravneniya drobnogo poryadka s involyuciej [Cauchy Problem for Fractional Order Equation with Involution]. / L.M. E'neeva // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. — 2024. — 48(3). — P. 43–55. — DOI: 10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55 [in Russian]

24. Dekhkonov F.N. Differential Equation Associated with Involutions. / F.N. Dekhkonov // Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics. — 2021. — 3. — P. 7–13.

25. Viner I.Ya. Differencial'ny'e uravneniya s involyuciyami [Differential equations with involutions]. / I.Ya. Viner // Differential equations. — 1969. — 5 (6). — P. 1131–1137. [in Russian]

26. Zajcev V.F. Spravochnik po oby'knovenny'm differencial'-differencial'ny'm uravneniyam [Handbook of Ordinary Differential Equations] / V.F. Zajcev, A.D. Polyanin. — Moscow: Fizmatlit, 2001. — 576 p. [in Russian]