

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.124.11>

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЛЕНИЯ ОДИНОЧНОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Научная статья

Гасратова Н.¹, Колпак Е.П.^{2,*}, Гончарова А.Б.³¹ ORCID : 0000-0003-4817-327X;² ORCID : 0000-0001-6956-4814;^{1,2,3} Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (petrovich_pmpu[at]mail.ru)

Аннотация

В основе математической модели лежит вариант расселения вида по разным, но близким местам обитания. При этом предполагается, что динамика популяционного сообщества в конкретном месте обитания зависит от свойств среды обитания и внутренних регуляторных механизмов. То есть, рождаемость и смертность определяются трофическим ресурсом, а переход особей в соседние места обитания определяется поиском трофического ресурса или социогенными факторами. Переселение рассматривается как случайное передвижение в соседние зоны обитания части особей из «материнской» зоны. Модель представлена задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, связанных матрицей «переходов». За основу модели динамики численности одиночной популяции взято логистическое уравнение. Все параметры-характеристики зон выбираются случайным образом из заданного диапазона. Численная реализация решений осуществляется в среде программирования математического пакета Matlab с применением векторизации вычислений.

Ключевые слова: математическое моделирование, устойчивость, популяция, расселение, трофический ресурс.

A MATHEMATICAL MODEL OF SINGLE POPULATION DISPERSAL

Research article

Gasratova N.¹, Kolpak E.P.^{2,*}, Goncharova A.B.³¹ ORCID : 0000-0003-4817-327X;² ORCID : 0000-0001-6956-4814;^{1,2,3} St. Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

* Corresponding author (petrovich_pmpu[at]mail.ru)

Abstract

The mathematical model is based on the variant of species population settlement in different but close habitats. It is assumed that the dynamics of the population community in a particular habitat depends on its properties and internal regulatory mechanisms. That is, fertility and mortality are determined by a trophic resource, while migration of individuals to neighboring habitats is determined by the search for a trophic resource or by sociogenic factors. Resettlement is considered as a random movement of some individuals from the "maternal" zone into neighboring habitats. The model is represented by a Cauchy problem for a system of ordinary differential equations connected by a matrix of "transitions". The logistic equation is taken as the basis of the model of population dynamics of a single population. All parameters and characteristics of zones are chosen randomly from a given range. Numerical implementation of the solutions is carried out in the programming environment of the mathematical package Matlab with the use of vectorization of calculations.

Keywords: mathematical modeling, sustainability, population, resettlement, trophic resource.

Введение

В экосистеме могут существовать популяции несколько видов разной численности. Области распространения видов сильно фрагментированы промышленной деятельностью человека и образуют небольшие зоны перекрытия. Поселения населения располагаются в различных антропогенно трансформированных ландшафтах с сильной деградацией участков обитания. Заселение особями популяции территории с неравномерно распределенными трофическими ресурсами сопровождается образованием отдельных зон обитания с различными объемами ресурса, его качеством, с различной численностью населения [1].

Распространение многих видов на территории носит выраженный очаговый характер. Относительно близких участков обитания различной емкости может быть от нескольких единиц до нескольких десятков. Плотность населения участков может отличаться в несколько десятков раз. Между участками через зоны перекрытия может происходить миграция особей [2], [3], [4], [5].

Важную роль в регуляции роста и размножения особей могут играть внутривидовые, зависящие от плотности населения механизмы, связанные со стрессом. Социогенный стресс рассматривается как причина смертности и репродуктивной супрессии. В зависящих от плотности социальных средах могут запускаться регуляторные механизмы, ведущие к замедлению темпа размножения, созревания, обуславливающие смертность населения [6], [7].

Перемещения организмов в пространстве происходит по разным причинам. Это может быть активное перемещение многих видов животных и птиц, и пассивное перемещение под влиянием внешних факторов. Миграция

сопровождается массовым перемещением особей конкретного вида из одного места обитания в другое. Расселение обусловлено удалением особей друг от друга из-за переселения или недостатка трофического ресурса. Переход может сопровождаться уходом только части особей из «материнского» участка, а убыль возмещается приходом особей с других участков. Расселение вызывается покиданием материнских участков, приводящим к уменьшению численности особей на перенаселенном месте обитания. Расселение жизненно необходимо для некоторых видов, поскольку способно снять проблему перенаселения [8].

Миграция и расселение относится к группам особей, в то время как перемещается отдельно каждая особь популяции. Групповое перемещение особей характеризуется привлекательностью группы особей к конкретным местам обитания [2].

При случайном размещении организмов любое место в среде обитания может быть занято организмом с равной вероятностью и не связано с присутствием других организмов. При групповом размещении особи привлекаются к определенным участкам среды обитания, или привлекаются другими особями популяции [8].

Математическая модель

В основе математической модели лежит вариант расселения вида по разным, но близким, местам обитания. При этом предполагается, что динамика популяционного сообщества в конкретном месте обитания зависит от свойств среды обитания и внутренних регуляторных механизмов. То есть, рождаемость и смертность определяются трофическим ресурсом, а переход особей в соседние места обитания определяется поиском трофического ресурса или социогенными факторами [6].

Пусть среда обитания популяции состоит из n -зон различной емкости с различным трофическим ресурсом. Особям популяции доступна только часть трофического ресурса. Удельные скорости роста численности популяции в зонах различны. Часть особей популяции может перемещаться в две соседние зоны в равных долях, но различных для разных зон. В пограничных зонах переход возможен только в одну соседнюю зону. Трофический ресурс, потребляемый особями, восполняется в каждой зоне с разной удельной скоростью. При этих предположениях математическая модель расселения особей по зонам представлена задачей Коши для системы дифференциальных уравнений [9], [10]

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \mu_1 u_1 \left(\frac{S_1}{b_1 + S_1} - \frac{u_1}{K_1} \right) + (v_2 u_2 - v_1 u_1), \\ \frac{du_i}{dt} &= \mu_i u_i \left(\frac{S_i}{b_i + S_i} - \frac{u_i}{K_i} \right) + (v_{i-1} u_{i-1} - 2v_i u_i + v_{i+1} u_{i+1}), \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) \\ \frac{du_n}{dt} &= \mu_n u_n \left(\frac{S_n}{b_n + S_n} - \frac{u_n}{K_n} \right) + (v_{n-1} u_{n-1} - v_n u_n), \\ \frac{dS_i}{dt} &= \mu_{S_i} S_i \left(1 - \frac{S_i}{S_{i0}} \right) - \alpha_i \frac{S_i}{b_i + S_i} u_i \end{aligned} \quad (1)$$

где u_i - численность особей популяции в i -ой зоне ($i=1, 2, \dots, n$), S_i - объем трофического ресурса в i -ой зоне, v_i - доля особей, покидающих i -ю зону, μ_i - удельная скорость роста численности популяции в зоне i , а μ_{S_i} - трофического ресурса, K_i - емкость i -ой зоны, S_{i0} - стационарная емкость трофического ресурса, b_i и α_i - параметры. Условия $0 \leq v_i \leq 1$ предполагают, что особи могут не покидать свою зоны, а в случае перемещения часть особей остается в материнской зоне.

Слагаемое $\frac{S_i}{b_i + S_i}$ в уравнениях (1) для популяций – доля трофического ресурса в i -ой зоне доступного для особей популяции. Слагаемое $\alpha_i \frac{S_i}{b_i + S_i} u_i$ в уравнениях для S_i - скорость «поедания» трофического ресурса особями популяции.

К системе уравнений (1) добавляются начальные условия при $t=0$. Первый вариант начального заселения одновременно всех зон малочисленными группами

$$u_i = \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

где $\varepsilon_i \ll K_i \frac{S_i}{b_i + S_i}$.

Второй вариант начальных условий

$$u_1 = \varepsilon_1, u_i = 0 \quad (i = 2, \dots, n) \quad (3)$$

рассматривается как вселение особей в первую зону с последующим их последовательным расселением по остальным зонам.

Для обоих вариантов начальных условий предполагается, что при $t=0$

$$S_i = S_{i0}$$

Для случая отсутствия перемещения особей из зоны в зону из системы уравнений (1) для i -ой зоны следуют уравнения

$$\frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i \left(\frac{S_i}{b_i + S_i} - \frac{u_i}{K_i} \right), \quad (4)$$

Точки притяжения этой системы уравнений находятся из системы уравнений

$$u_i - K_i \frac{S_i}{b_i + S_i} = 0, \tag{5}$$

$$S_i \left(\left(1 - \frac{S_i}{S_{i0}}\right) - \frac{\alpha_i}{\mu S_i} K_i \frac{S_i}{(b_i + S_i)^2} \right) = 0$$

Левая часть второго уравнения в (5) при $S_i = 0$ обращается в ноль, но является возрастающей функцией S_i , а при $S_i = S_{i0}$ принимает отрицательное значение. Поэтому при $S_i \in (0, S_{i0})$ система уравнений (4) будет иметь решение. Оба собственных значения матрицы Якоби системы уравнений (4) в этой точке будут отрицательными. Соответственно эта стационарная точка будет устойчивой.

Стационарные точки $S_i = S_{i0}$, $u_i = 0$ и $S_i = 0$, $u_i = 0$ будут неустойчивыми.

Из системы уравнений (1) следует уравнение

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i \left(\frac{S_i}{b_i + S_i} - \frac{u_i}{K_i} \right) \tag{6}$$

Как следует из анализа этого уравнения при $S_i = S_{i0}$ ($i=1, 2, \dots, n$) и малых значениях правая часть этого уравнения будет положительной величиной. Поэтому при любом начальном заселении зон малочисленными группами популяции общая численность популяции будет увеличиваться.

Из уравнения (6) также следует, что при отсутствии трофического ресурса ($S_i = 0$) во всех зонах общая численность особей будет убывать.

Две зоны

Пусть особи популяции расселились в двух зонах. Для случая двух зон $n=2$ из (1) следуют уравнения динамики численности населения двух популяционных групп

$$\frac{du_1}{dt} = \mu_1 u_1 \left(\frac{S_1}{b_1 + S_1} - \frac{u_1}{K_1} \right) + (v_2 u_2 - v_1 u_1),$$

$$\frac{du_2}{dt} = \mu_2 u_2 \left(\frac{S_2}{b_2 + S_2} - \frac{u_2}{K_2} \right) + (v_1 u_1 - v_2 u_2)$$

В отсутствие миграции (при $v_1 = 0$ и $v_2 = 0$) в стационарном состоянии

$$u_1 = u_1^0 = K \frac{S_1}{b_1 + S_1},$$

$$u_2 = u_2^0 = K \frac{S_2}{b_2 + S_2}$$

При начале перехода малых долей ($v_i \ll 1$ и $v_2 \ll 1$) особей из зоны в зону стационарные значения u_1^0 и u_2^0 изменяться на малую величину так, что

$$u_1 = u_1^0 + \delta u_1, u_2 = u_2^0 + \delta u_2$$

где $|\delta u_1| \ll u_1^0$ и $|\delta u_2| \ll u_2^0$.

При этом предполагается, что малым изменением трофического ресурса можно пренебречь.

С учетом этих предположений смещение стационарных точек в линейном приближении находятся из системы уравнений

$$-(\mu_1 u_1^0 \frac{1}{K_1} + v_1) \delta u_1 + v_2 \delta u_2^0 = v_1 u_1^0 - v_2 u_2^0,$$

$$v_1 \delta u_1^0 - (\mu_2 u_2^0 \frac{1}{K_2} + v_2) \delta u_2^0 = -v_1 u_1^0 + v_2 u_2^0$$

Отсюда следует, что

$$\delta u_1 = -\mu_2 u_2^0 \frac{1}{BK_2} (v_1 u_1^0 - v_2 u_2^0),$$

$$\delta u_2 = \mu_1 u_1^0 \frac{1}{BK_1} (v_1 u_1^0 - v_2 u_2^0) \tag{7}$$

где

$$B = (\mu_1 u_1^0 \frac{1}{K_1} + v_1)(\mu_2 u_2^0 \frac{1}{K_2} + v_2) - v_1 v_2.$$

Как следует из анализа соотношений (7) в линейном приближении уменьшается численность особей в той зоне, которую покидает большая часть особей.

Имитационная модель

Все зоны обитания групп особей популяции имеют разные трофические ресурсы, потребляемые особями, разные емкости среды, восстановление ресурсов может происходить с разными скоростями. Удельная скорость роста численности популяции зависит от качества трофического ресурса. Поэтому в рамках имитационной модели предполагается, что все параметры модели (1) могут отличаться от базовых значений не более, чем в три раза. Причем принимается, что отклонение носит случайный характер. Таким образом, принималось, что $\mu_i \in (1; 3)$,

$K_i \in (1; 3)$, $b_i \in (0, 15; 0, 45)$, $S_{i0} \in (0, 5; 1, 5)$, $\mu_{iS} \in (0, 2; 0, 6)$, $v_i \in (0, 1; 0, 3)$. Параметры μ_i соответствует периоду удвоения численности популяции от 3 до 8 месяцев, а параметры μ_{iS} - периоду восстановления трофического ресурса от 12 до 36 месяцев. Выбор всех параметров выбирался случайным образом для каждой зоны отдельно.

На рис. 1 приведено распределение групп особей по численности в стационарном состоянии для случая 50 зон. За единицу принята максимальная численность из всех численностей в зонах. Распределения для начальных условий (2) и (3) отличаются не более чем на 2% в максимальных отклонениях. Для случая начальных условий (3) на рис. 2 приведено распределение групп популяций по времени начала заселения последней зоны из 10. За единицу принят наибольший промежуток времени достижения последней зоны. Как следует из анализа полученных результатов при увеличении параметров v_i ($v_i \in (0, 4; 0, 6)$) эти зависимости отличаются не более чем на 5% в максимальных отклонениях. На эти распределения практически не влияет и количество зон.

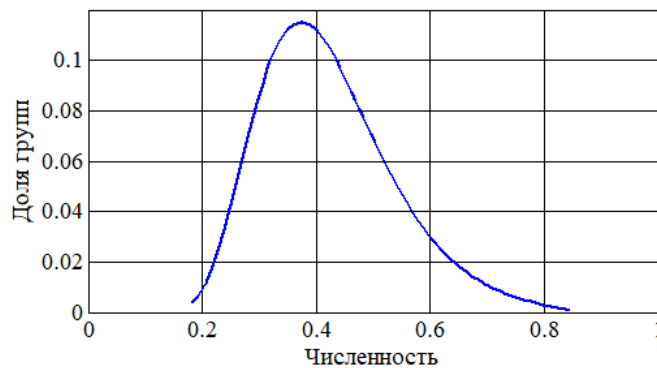


Рисунок 1 - Распределение мест обитания по численности населения
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.124.11.1>

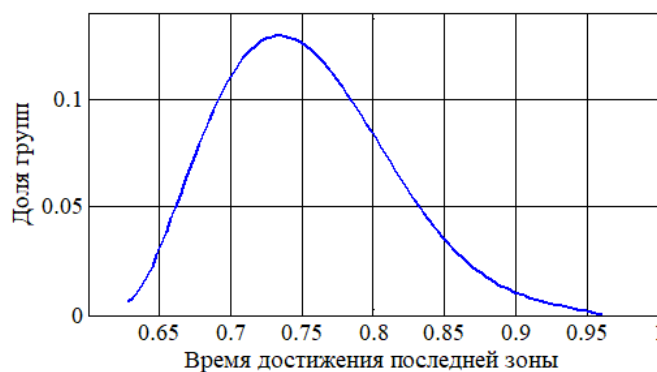


Рисунок 2 - Распределение групп популяций по продолжительности заселения территории
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.124.11.2>

Распределение зон по численности населения согласуются с данными полевых наблюдений за расселением птиц, приведенными в [8].

Заключение

Фрагментирование человеком территории приводит и к фрагментации зон обитания по их размерам, по разнообразию трофических ресурсов и их объемам. Расселение особей вида по зонам сопровождается образованием групп зон с малой численностью населения и высокой численностью с отличием в несколько раз. Численность населения в большей части зон будет отличаться незначительно от средней численности населения. Полученные варианты распределения особей согласуются с расселением особей в ненарушенных человеком естественных ареалах.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Астафьева Н.М. Дистанционное зондирование и космические катастрофы. К 100-летию тунгусского феномена / Н.М. Астафьева. // Исследование Земли из космоса. - 2008. - № 5. - С. 83 – 94.
2. Вольперт Я.Л. Мелкие млекопитающие Северо-востока Сибири / Я.Л. Вольперт, Е.Г. Шадрина. – Новосибирск : Наука, 2002. - 246 с.
3. Ешчанова С.Ш.К. Экологические особенности популяций мелких млекопитающих тугайных экосистем Южного Приаралья / С.Ш.К. Ешчанова. // Universum: химия и биология. - 2022. - № 3-1 (93). - С. 16-20. - DOI - 10.32743/UniChem.2022.93.3.13205.
4. Дудников А.А. История изучения распространения и современное состояние популяций сусликов Самарского края / А.А. Дудников, О.В. Чернышова, М.Д. Симаков и др. // Russian Journal of Ecosystem Ecology. - 2022. - Т. 7. - № 1. - С. 1-11.
5. Ахметбеков Н.А. Состояние популяции архара в центральном Казахстане / Н.А. Ахметбеков, Л.М. Мурзабекова, А.А. Бербер. // The Scientific Heritage. - 2022. - № 90 (90). - С. 4-7.
6. Яскин В.А. Изменения гиппокампа в связи с динамикой плотности популяции рыжей полевки / В.А. Яскин. // Известия Российской академии наук. Серия биологическая. - 2022. - № 2. - С. 160-165.
7. Завьялов Е.Л. Стресс и территориальная организация локального поселения водяной полевки (*arvicola terrestris*) / Е.Л. Завьялов, Л.А. Герлинская, Л.Е. Овчинникова и др. // Зоологический журнал. - 2007. - Т. 86. - № 2. - С. 242–251.
8. Бигон М. Экология. Особи, популяции, сообщества / М. Бигон, Дж. Харпер, К. Таунсенд. – Москва : Мир, 1989. - 667 с.
9. Колпак Е.П. Математические модели одиночной популяции: учебное пособие / Е.П. Колпак, Е.А. Ефремова. – Казань : Бук, 2017. - 122 с.
10. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. - 368 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Astaf'eva N.M. Distancionnoe zondirovanie i kosmicheskie katastrofy. K 100-letiyu tungusskogo fenomena [Remote Sensing and Space Catastrophes. To the 100 Years Since Tunguska Phenomenon] / N.M. Astaf'eva // Issledovanie Zemli iz kosmosa [Exploring Earth from Space]. - 2008. - № 5. - P. 83 – 94. [in Russian]
2. Vol'pert YA.L. Melkie mlekopitayushchie Severo-Vostoka Sibiri [Small mammals of the North-East of Siberia] / Ya.L. Vol'pert, E.G. Shadrina. - Novosibirsk : Nauka, 2002. - 246 p. [in Russian]
3. Eshchanova S.SH.K. Ekologicheskie osobennosti populyacij melkih mlekopitayushchih tugajnyh ekosistem YUzhnogo Priaral'ya [Ecological features of populations of small mammals of tугai ecosystems of Southern Aral sea area] / S.SH.K. Echanova // Universum: himiya i biologiya [Universum: Chemistry and Biology]. - 2022. - № 3-1 (93). - P. 16-20. - DOI: 10.32743/UniChem.2022.93.3.13205. [in Russian]
4. Dudnikov A.A. Istoriya izucheniya rasprostraneniya i sovremennoe sostoyanie populyacij suslikov Samarskogo kraja [The history of the study of the distribution and the current state of the populations of ground squirrels of the Samara region] / A.A. Dudnikov, O.V. Chernyshova, M.D. Simakov et al. // Russian Journal of Ecosystem Ecology. - 2022. - Vol. 7. - № 1. - P. 1-11. [in Russian]
5. Ahmetbekov N.A. Sostoyanie populyacii arhara v central'nom Kazahstane [State of the argali population in central Kazakhstan] / N.A. Aetbekov, L.M. Murzabekova, A.A. Berber // The Scientific Heritage. - 2022. - № 90 (90). - P. 4-7. [in Russian]
6. YAskin V.A. Izmeneniya gippokampa v svyazi s dinamikoj plotnosti populyacii ryzhej polevki [Hippocampal changes due to population density dynamics of the Bank Vole] / V.A. YAskin // Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya biologicheskaya [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Biological Series]. - 2022. - № 2. - P. 160-165. [in Russian]
7. Zav'yalov E.L. Stress i territorial'naya organizaciya lokal'nogo poseleniya vodyanoj polevki (*arvicola terrestris*) [Stress and territorial structure of a local water vole (*arvicola terrestris*) population] / E.L. Zav'yalov, L.A. Gerlinskaya, L.E. Ovchinnikova et al. // Zoologicheskij zhurnal [Zoological Journal]. - 2007. - Vol. 86. - № 2. - P. 242–251. [in Russian]
8. Bigon M. Osobi, populyacii, soobshchestva [Ecology. Individuals, populations, communities] / M. Bigon, Dzh. Harper, K. Taunsend - Moscow : Mir. 1989. - 667 p. [in Russian]
9. Kolpak E.P. Matematicheskie modeli odinochnoj populyacii [Mathematical models of a single population] / E.P. Kolpak, E.A. Efremova. - Kazan' : Buk, 2017. - 122 p. [in Russian]
10. Bazykin A.D. Nelinejnaya dinamika vzaimodejstvuyushchih populyacij [Nonlinear dynamics of interacting populations] / A.D. Bazykin - Moscow; Izhevsk: Institute for Computer Research, 2003. - 368 p. [in Russian]