

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА/DIFFERENTIAL EQUATIONS,
DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL**

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.147.21>

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ
МЕТОДОМ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ**

Научная статья

Канушин В.Ф.¹, Ганагина И.Г.^{2,*}, Голдобин Д.Н.³, Инжеватов И.А.⁴

¹ORCID : 0000-0001-7057-1595;

²ORCID : 0000-0002-8543-8276;

³ORCID : 0000-0002-2678-7636;

⁴ORCID : 0009-0002-2358-4275;

^{1, 2, 3, 4} Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (gam0209[at]yandex.ru)

Аннотация

В статье рассмотрен достаточно простой метод вычисления вертикального градиента аномалий силы тяжести (ВГАСТ), основанный на использовании формулы численного дифференцирования аномалий силы тяжести. Проведен анализ результатов сравнения значений ВГАСТ, полученных методом численного дифференцирования аномалий силы тяжести со значениями вертикального градиента аномалий силы тяжести, вычисленных методом разложения в ряд по сферическим функциям, в котором использован набор гармонических коэффициентов глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4, до степени N=2190. Показано, что стандартное отклонение, полученное в результате сравнения этих методов, составило 0,13 Э. Таким образом, метод вычисления ВГАСТ, основанный на использовании формул численного дифференцирования аномалий силы не уступает по точности аналитическому методу с помощью разложения в ряд по сферическим функциям, в котором использован набор гармонических коэффициентов глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4, до степени N=2190.

Ключевые слова: численное дифференцирование, вертикальный градиент аномалий силы тяжести, сферические функции.

**DETERMINATION OF VERTICAL GRADIENT OF GRAVITY ANOMALIES BY NUMERICAL
DIFFERENTIATION METHOD**

Research article

Kanushin V.F.¹, Ganagina I.G.^{2,*}, Goldobin D.N.³, Inzhevatov I.A.⁴

¹ORCID : 0000-0001-7057-1595;

²ORCID : 0000-0002-8543-8276;

³ORCID : 0000-0002-2678-7636;

⁴ORCID : 0009-0002-2358-4275;

^{1, 2, 3, 4} Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation

* Corresponding author (gam0209[at]yandex.ru)

Abstract

The article examines a fairly simple method of calculating the vertical gradient of gravity anomalies (VGGA), based on the use of the formula of numerical differentiation of gravity anomalies. The results of comparing the values of VGGA obtained by the method of numerical differentiation of gravity anomalies with the values of the vertical gradient of gravity anomalies calculated by the method of expansion in a series of spherical functions, which uses a set of harmonic coefficients of the global model of geopotential EIGEN-6C4, up to the degree N=2190 have been analysed. It is shown that the standard deviation obtained as a result of comparison of these methods was 0.13 E. Thus, the method of calculating the VGGA based on the use of formulas for numerical differentiation of force anomalies is not inferior in accuracy to the analytical method using the spherical function series expansion, which uses a set of harmonic coefficients of the global geopotential model EIGEN-6C4, up to degree N=2190.

Keywords: numerical differentiation, vertical gradient of gravity anomalies, spherical functions.

Введение

Вопрос о способах вычисления вертикального градиента аномалий силы тяжести (ВГАСТ) имеет большое практическое значение, поскольку его использование значительно расширяет возможности геологической интерпретации результатов гравиметрической съемки, а также для геодезических целей, где вертикальный градиент аномалий силы тяжести входит в формулы первого приближения теории Молоденского [1], [2].

При получении числовых значений ВГАСТ по заданному распределению, аномалий силы тяжести Δg на плоскости наблюдений обычно используются различные схемы вычислений, вытекающие из формулы Нумерова [3], которая имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^2} dr \quad (1)$$

где

Δg_0 – аномалия силы тяжести в исследуемой точке;

Δg – аномалия силы тяжести в текущей точке на плоскости;

r, a – ее полярные координаты;

ось z направлена вертикально вниз.

Определение ВГАСТ на физической поверхности Земли по аномалиям силы тяжести, заданным на ее поверхности, с помощью формулы (1) возможно только в равнинных районах. В работах [4], [5] для вычисления по формуле (1) предложены различные вычислительные схемы и палетки. Однако авторы не учитывают влияния отклонения физической поверхности Земли от отсчетной плоскости. В работе [6] приведены результаты исследования точности формулы (1) на различных моделях, схематически представляющих формы рельефа, которые показали, что применение этой формулы при определении фигуры Земли и элементов ее гравитационного поля с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия неудовлетворительно [7].

Существует ряд методов вычисления значений ВГАСТ [8], [9], [10], в которых учитывается реальная физическая поверхность Земли и оценивается влияние наклонов местности. Однако, в процессе вычисления с помощью приведенных в этих работах формулах, необходимо предварительно получить поправку первого приближения теории Молоденского – G_1 и затем, с помощью этой поправки исправить аномалии силы тяжести в формуле (1) как $\Delta g' = \Delta g + G_1$. В результате, используя исправленные аномалии силы тяжести $\Delta g'$, при вычислении по формуле (1), получают вертикальный градиент аномалии силы тяжести в первом приближении. При этом неоднократное использование методов численного интегрирования физической поверхности Земли может обесценить искомый результат. Кроме того, следует отметить, что при вычислении интеграла в формуле (1) на отсчетной плоскости $z = 0$ при $r \rightarrow 0$ подынтегральное выражение на поверхности наблюдения обращается в бесконечность. Поэтому значения ВГАСТ при $g = 0$ на отсчетной поверхности $z = 0$ не могут быть вычислены.

В данной работе предлагается достаточно простой метод вычисления ВГАСТ, основанный на использовании формул численного дифференцирования [11]. Численное дифференцирование применяется, когда исследуемую функцию невозможно продифференцировать аналитически, например, когда она задана таблично или в виде цифровой модели физического поля.

Основные результаты

Метод численного дифференцирования заключается в том, что бесконечно малые приращения функций и аргументов исследуемой функции заменяются отношением конечных разностей. Причем, чем меньше будет приращение аргумента, тем точнее численное значение производной.

Для вычисления ВГАСТ методом численного дифференцирования используется значение аномалии силы тяжести в двух точках. Приращение аргумента вычисления производных задается путем пересчета аномалий силы тяжести вверх по оси OZ на величину Δz от исследуемой точки. Это соответствует использованию конечноразностной схеме двухточечного шаблона численного дифференцирования, суть которого заключается в том, что на отсчетной плоскости OZ в начале прямоугольных координат $P(0,0,0)$ задана аномалия силы тяжести $\Delta g(0,0,0)$, дифференцируемая достаточно раз. Исходя из определения первой производной [12] как

$$\frac{\partial \Delta g(0,0,0)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\Delta g(0,0,\Delta z) - \Delta g(0,0,0)) / \Delta z \quad (2)$$

можно получить значение ВГАСТ в точке $P(0,0,0)$ на плоскости $z = 0$ по следующей формуле

$$\frac{\partial \Delta g(0,0,0)}{\partial z} \approx \frac{\Delta g(0,0,\Delta z) - \Delta g(0,0,0)}{\Delta z} \quad (3)$$

где

$\Delta z > 0$ – малый параметр (шаг по высоте над плоскостью $z = 0$).

В этом случае земную поверхность в окрестности точки $P(0,0,0)$ можно принять за горизонтальную плоскость. Причем достаточно иметь эту поверхность плоской в окружности радиуса $6H$ (H – отметка высоты центра этой окружности). Тогда пренебрежение влиянием внешней области на окрестность точки $P(0,0,0)$ составить 12 км.

Для определения ВГАСТ, необходимого для решения задачи Молоденского с точностью первого приближения, характеристики глобального поля силы тяжести удобно представлять в системе сферических координат $P(\phi, \lambda, r)$. В этом случае формулу (3) для вычисления ВГАСТ методом численного дифференцирования запишем в следующем виде

$$\frac{\partial \Delta g(P)}{\partial r} = \frac{\Delta g_s(P') - \Delta g_s(P)}{\Delta r} \quad (4)$$

где

$\Delta g_s(P)$ – аномалия силы тяжести, вычисленная в точке $P(\phi, \lambda, r)$;

$\Delta g_s(P')$ – аномалия силы тяжести, вычисленная в точке $P'(\phi, \lambda, r + \Delta r)$;

r – радиус-вектор точки $P(\phi, \lambda, r)$;

ϕ и λ – геоцентрическая широта и долгота точки $P(\phi, \lambda, r)$.

При вычислении ВГАСТ по формуле (4) использованы значения аномалий силы тяжести, полученные из разложения в ряд по сферическим функциям потенциала силы тяжести

$$\Delta g_s(P) = \frac{fM}{r^2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (n-1) \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi), \quad (5)$$

где

fM – геоцентрическая гравитационная постоянная;

N – предельная степень разложения;

a_e – экваториальный радиус Земли;

$r = R + H$ – радиус-вектор точек на земной поверхности;

R – средний радиус Земли;

H – высота точки P ;

$\Delta\bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{n0}^0$ – разность нормированных коэффициентов сферических функций реального и нормального

$\Delta\bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm} - \bar{S}_{n0}^0$

поля силы тяжести;

\bar{C}_{n0}^0 и \bar{S}_{n0}^0 – нормированные гармонические коэффициенты нормального геопотенциала, отнесенного к эллипсоиду WGS- 84, где $\bar{S}_{n0}^0 = 0$.

На рисунке 1 приведена картосхема $\Delta g_S(P)$ – аномалий силы тяжести, вычисленных в точках $P(\phi, \lambda, r)$ по формуле (5) [14], в которой использован набор гармонических коэффициентов глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 до степени $N = 2190$ [15].

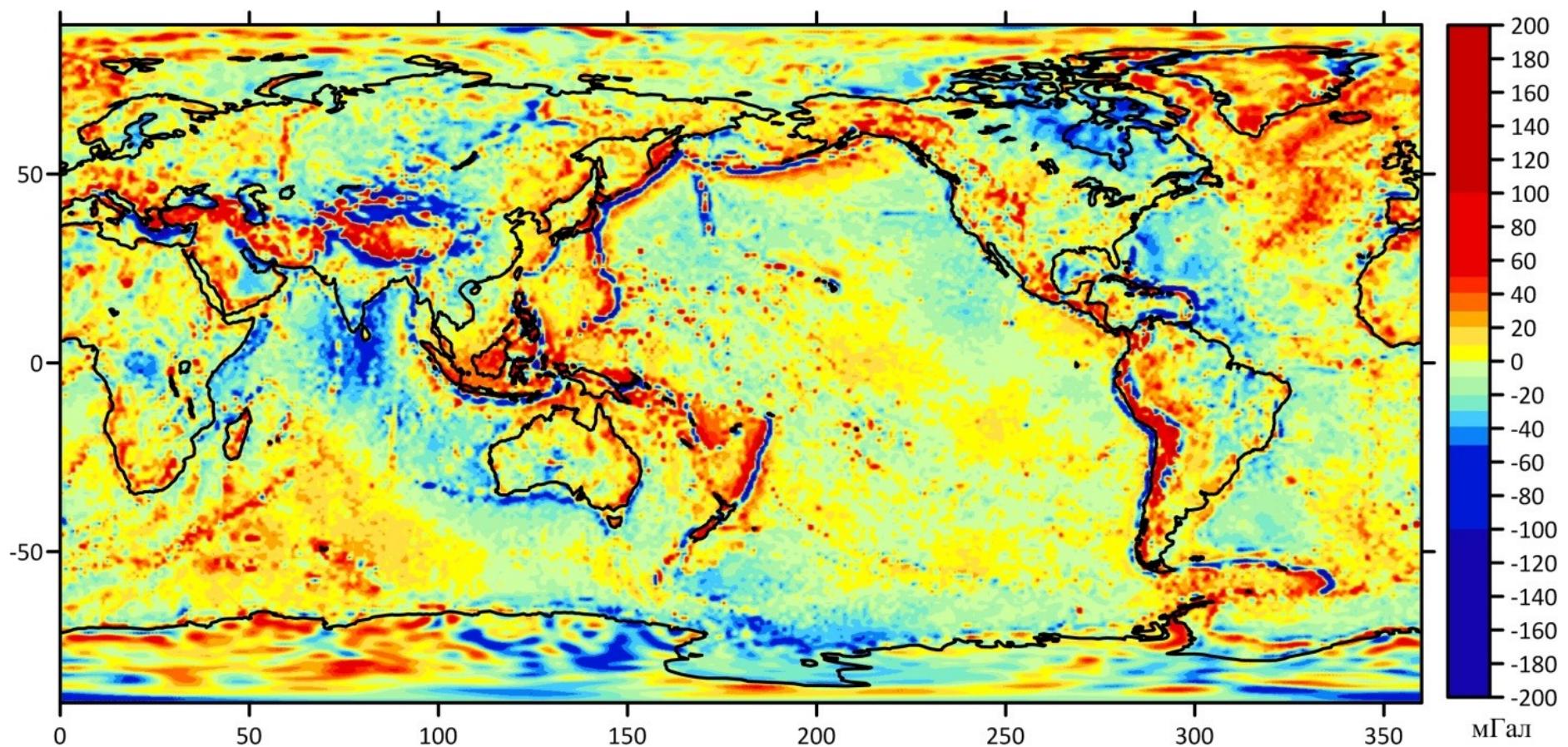


Рисунок 1 - Картосхема аномалий силы тяжести $\Delta g_s(P)$, вычисленных при $\Delta r=0$ по формуле (5) с учетом гармоник гнотенциала до степени $N=2190$
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.147.21.1>

Аналогично выполнены вычисления аномалий силы тяжести $\Delta g_s(P')$ в точках $P'(\phi, \lambda, r + \Delta r)$ при $\Delta r = 1$ метр.

На рисунке 2 представлена картосхема значений ВГАСТ, вычисленных по формуле численного дифференцирования аномалий силы тяжести (4), в которой использованы значения аномалий силы тяжести $\Delta g_s(P)$ и $\Delta g_s(P')$, вычисленные по формуле (5) при $\Delta r = 0$ и при $\Delta r = 1$ метр соответственно.

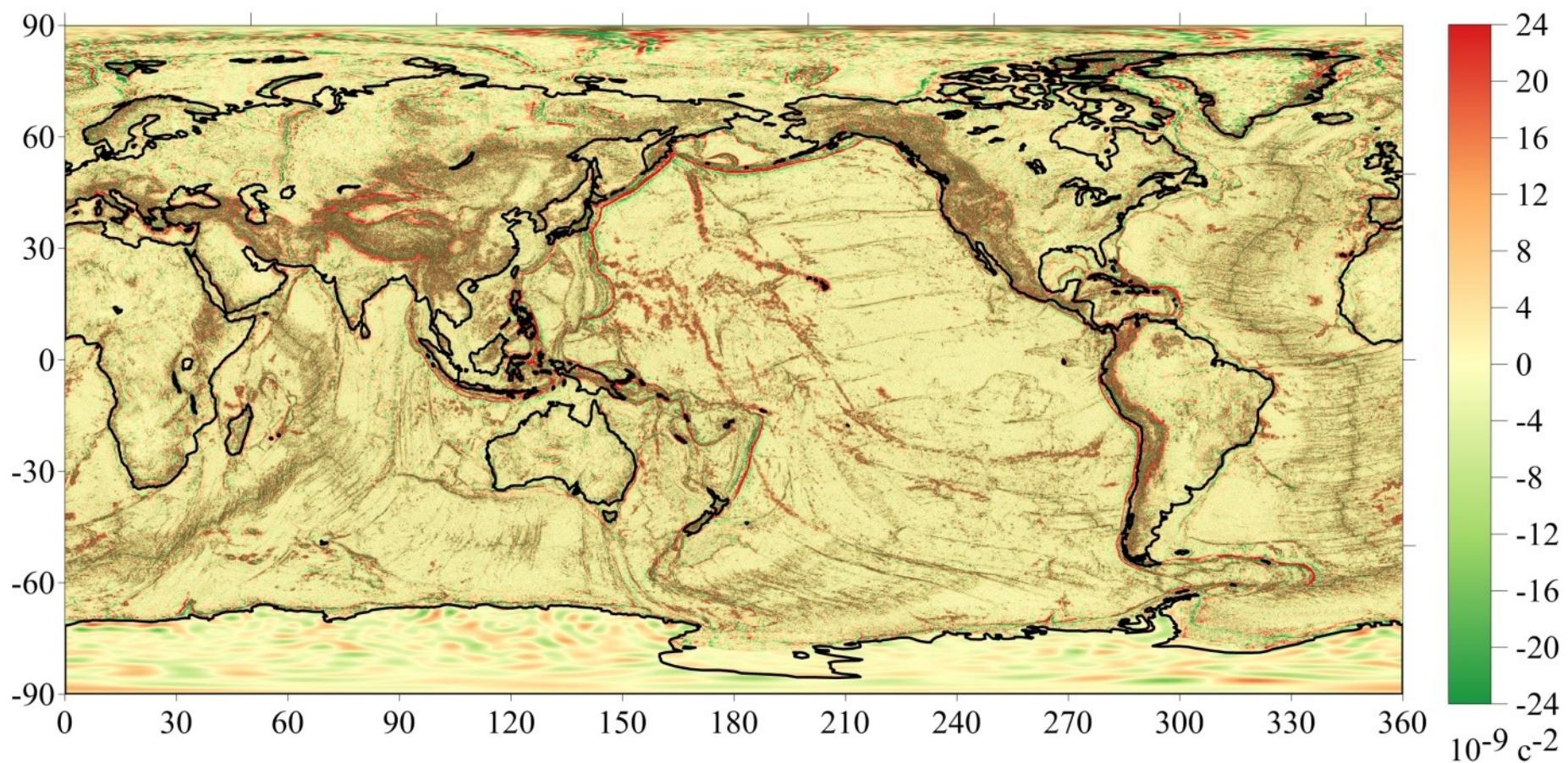


Рисунок 2 - Картосхема значений ВГАСТ, полученных по формуле (4)
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.147.21.2>

Примечание: фрагмент диапазона шкалы изменения ограничен интервалом от $-24 \cdot 10^{-9} \text{ c}^{-2}$ до $+24 \cdot 10^{-9} \text{ c}^{-2}$

Из рисунка 2 видно, что на земной поверхности преобладают положительные значения ВГАСТ, с различной коррелируемостью.

Причем в горных областях значения ВГАСТ весьма значительны. Кроме того, в настоящей работе выполнено определение ВГАСТ аналитически с помощью разложения в ограниченный ряд по сферическим функциям, в котором использованы гармонические коэффициенты глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 до степени $N=2190$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta g(P)}{\partial r} &= \frac{\partial^2 T(P)}{\partial r^2} = \\ &= \frac{fM}{r^3} \left\{ \sum_{n=0}^N \left[(n+1)(n+2) \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \bar{C}_{n0}^0$;

\bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} – нормированные гармонические коэффициенты геопотенциала;

\bar{C}_{n0}^0 – нормированные гармонические коэффициенты нормального геопотенциала, отнесенного к эллипсоиду WGS- 84;

$\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ – нормированные присоединенные функции Лежандра степени n и порядка m ;

fM – геоцентрическая гравитационная постоянная;

a_e – большая полуось эллипсоида;

r – геоцентрический радиус-вектор;

φ – геоцентрическая широта;

λ – географическая долгота;

T – аномальный потенциал силы тяжести.

На рисунке 3 приведена картосхема ВГАСТ, вычисленного по формуле (6) [17].

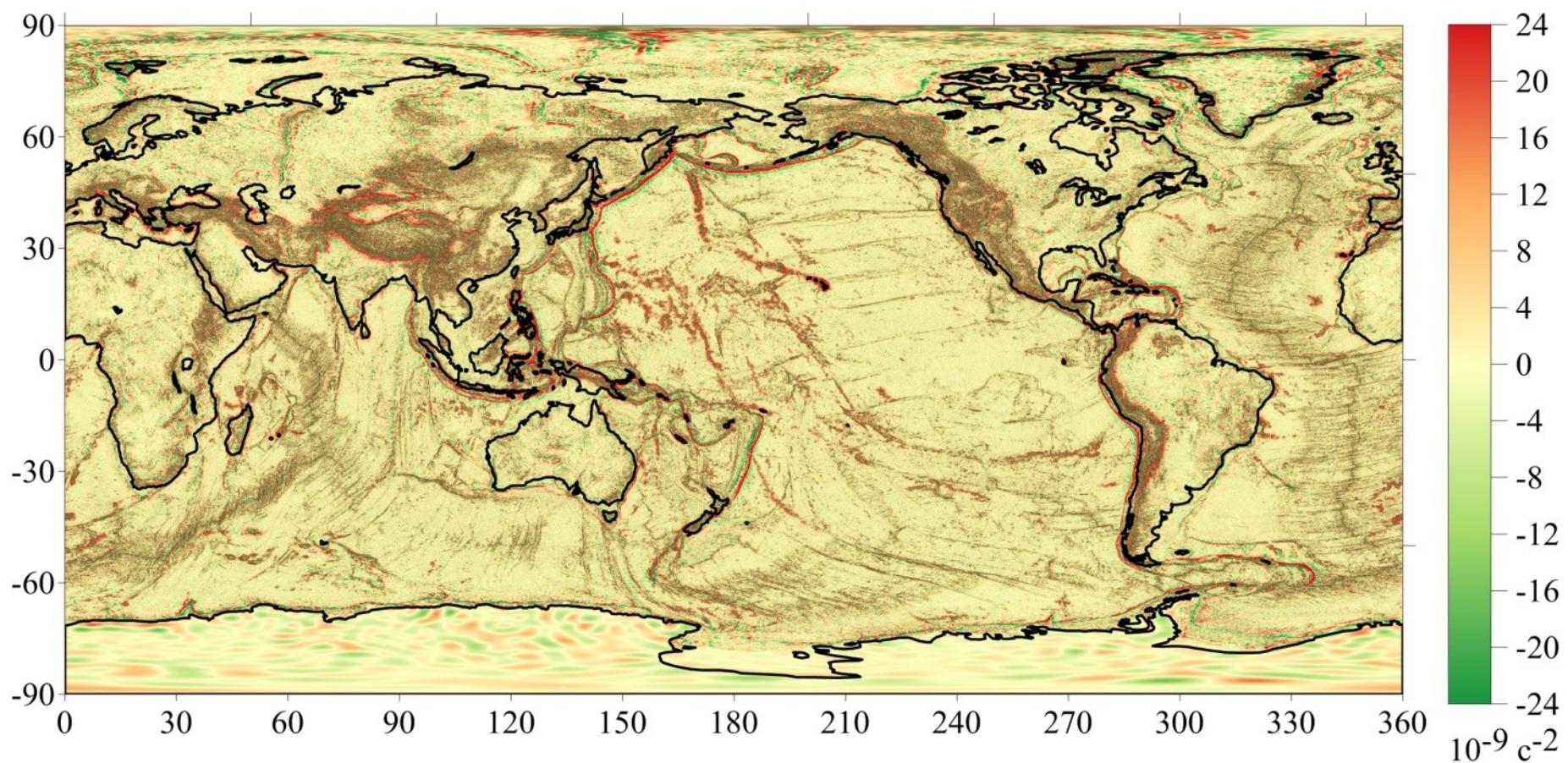


Рисунок 3 - Картосхема ВГАСТ, вычисленного по формуле (6)
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.147.21.3>

Примечание: Фрагмент диапазона шкалы изменения ограничен интервалом от $-24 \cdot 10^{-9} \text{ c}^{-2}$ до $+24 \cdot 10^{-9} \text{ c}^{-2}$

При сравнении рисунков 2 и 3 обращает внимание на их сходство.

Разности $\Delta G(P)$ между значениями ВГАСТ, вычисленными по формулам (4) и (6), получены по формуле

$$\Delta G(P) = \frac{\partial \Delta g(P)}{\partial r} - \frac{\partial^2 T(P)}{\partial r^2} \quad (7)$$

На рисунке 4 показана картосхема распределения разности $\Delta G(P)$ между значениями ВГАСТ для территории земного шара.

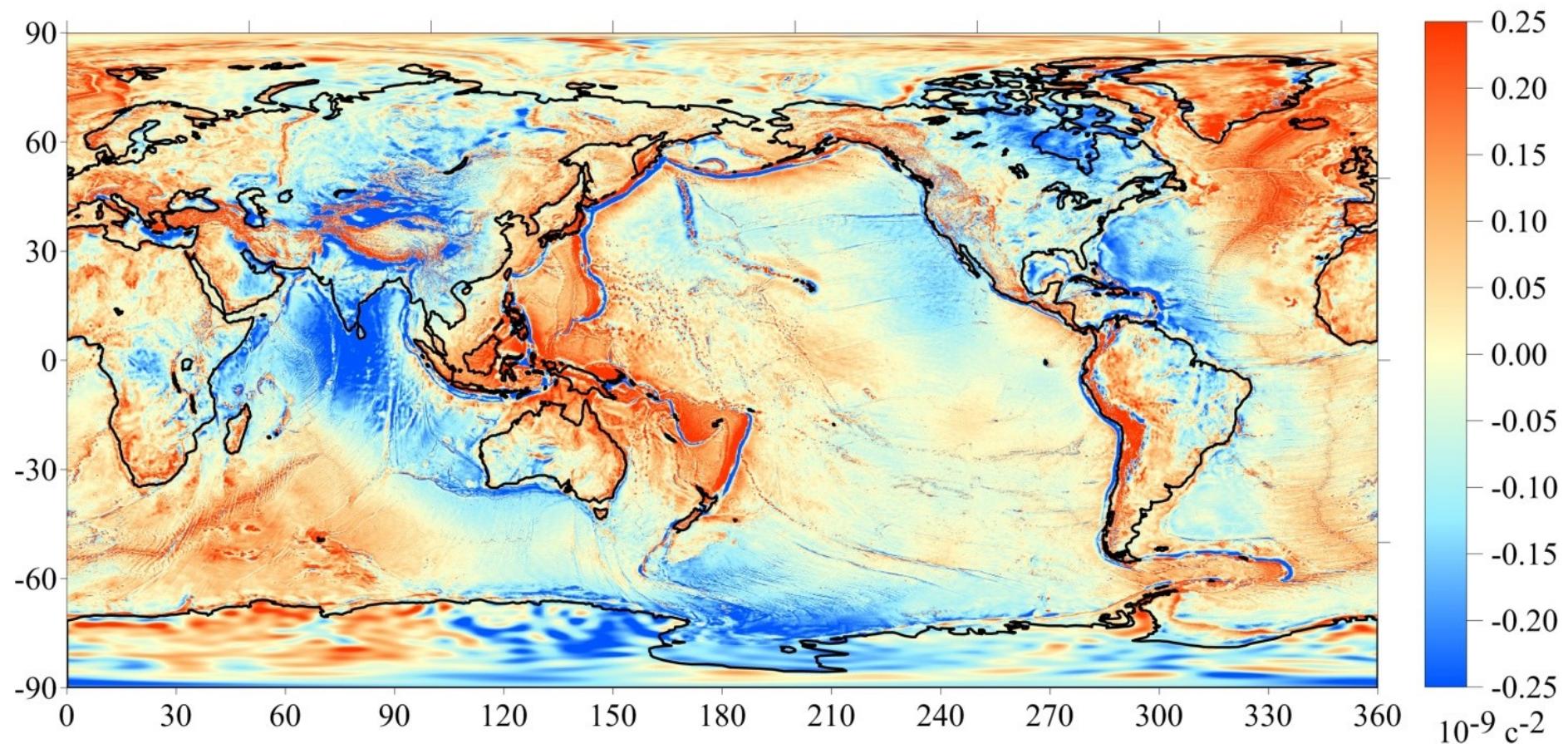
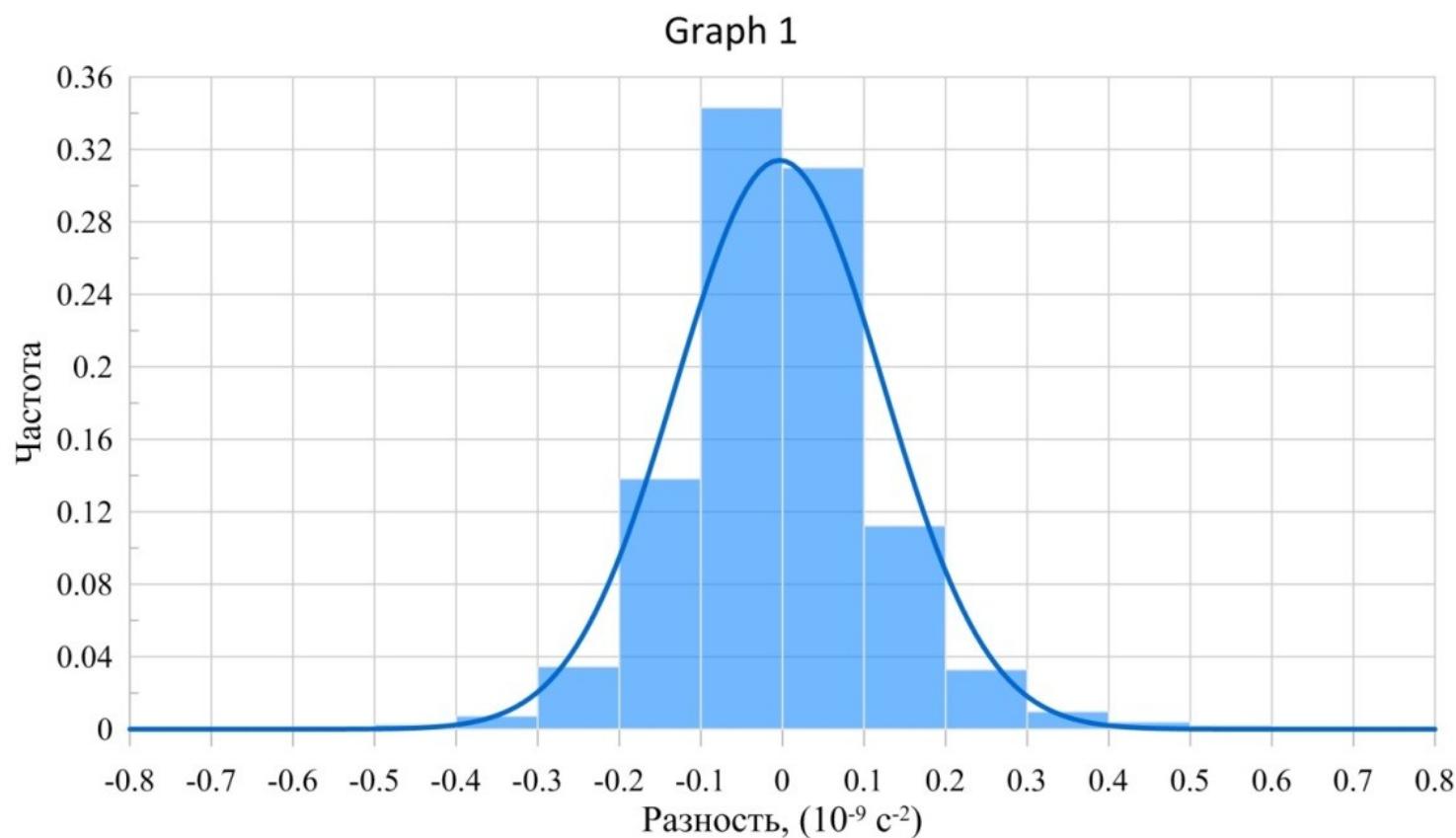


Рисунок 4 - Картосхема разности $\Delta G(P)$ между значениями ВГАСТ, вычисленными по формулам (4) и (6)
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.147.21.4>

Как видно из рисунка 4, основная масса разностей $\Delta G(P)$, вычисленных по формуле (7), находятся в диапазоне от $-0,25 \cdot 10^{-9} \text{с}^{-2}$ до $+0,25 \cdot 10^{-9} \text{с}^{-2}$.

Статистическую картину распределения значений $\Delta G(P)$ на земной поверхности дает гистограмма, приведенная на рисунке 5.



Приведенная на рисунке 5 гистограмма распределения $\Delta G(P)$ по характеру почти соответствует распределению Гаусса (т. е. нормальному распределению). Из рисунка 5 видно, что 64% значений $\Delta G(P)$ находятся в интервале от $-0,1 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$ до $+0,1 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$ и 89% значений $\Delta G(P)$ находятся в интервале от $-0,2 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$ до $+0,2 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$.

В табл. 1 приведены статистические характеристики распределения разности $\Delta G(P)$ на территории земного шара.

Таблица 1 - Статистические характеристики распределения разности $\Delta G(P)$

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.147.21.6>

Характеристики	Значения
Number of values	9331200
Minimum ($1 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$)	-1,472
Maximum ($1 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$)	2,273
Range ($1 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$)	3,746
Mean ($1 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$)	-0,003
Standard deviation ($1 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$)	0,129
Skew	0,445
Kurtosis	5,377
Critical K-S stat, $a = .10$	<0,001
Critical K-S stat, $a = .05$	<0,001
Critical K-S stat, $a = .01$	0,001

Из таблицы 1 видно, что максимальное абсолютное значение разности $\Delta G(P)$ равно $2,27 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$, среднее арифметическое значение этой разности равно $0,003 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$, а стандартное отклонение составляет $\sigma = 0,1295 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$.

Заключение

В работе проведен анализ результатов сравнения значений ВГАСТ, полученных методом численного дифференцирования аномалий силы тяжести со значениями вертикального градиента аномалий силы тяжести, вычисленных методом разложения в ряд по сферическим функциям, в котором использован набор гармонических коэффициентов глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 до степени $N=2190$. Выполненные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Вычисленные с помощью разложения в ряд по сферическим функциям значения ВГАСТ практически не отличаются от значений ВГАСТ, вычисленных по формуле численного дифференцирования. Максимальные расхождения между значениями ВГАСТ, вычисленными по данным глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4, при учете гармоник до 2190 степени, и вычисленным с помощью формулы численного дифференцирования, используя метод пересчета исходного поля на высоту 1 метр равно $2,27 \cdot 10^{-9} \text{c}^{-2}$. Показано, что стандартное отклонение, полученное в результате сравнения этих методов, составило 0,13 Э.

2. Анализируя распределение результатов сравнения глобальных ВГАСТ, вычисленных по формулам (4) и (6), можно сделать вывод о возможности их использования для построения глобальной модели квазигеоида с точностью первого приближения теории Молоденского в ньютоновском приближении, где вертикальный градиент необходимо знать с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия.

Таким образом, метод вычисления ВГАСТ, основанный на использовании формул численного дифференцирования аномалий силы не уступает по точности аналитическому методу с помощью разложения в ряд по сферическим функциям, в котором использован набор гармонических коэффициентов глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4, до степени $N=2190$.

Финансирование

Исследование выполнено в рамках СЧ НИР «Геотех-Квант-2».

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Сообщество рецензентов Международного научно-исследовательского журнала

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.147.21.7>

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Funding

The study was carried out within the SC R&D "Geotech-Kvant-2".

Conflict of Interest

None declared.

Review

International Research Journal Reviewers Community
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.147.21.7>

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Пеллинен Л.П. Применение формул первого приближения для вычисления характеристик гравитационного поля Земли / Л.П. Пеллинен // Труды ЦНИИГАиК. — Москва : Геодезиздат, 1965. — № 157. — С. 85–101.
2. Гофман – Велленгоф Б. Физическая геодезия / Б. Гофман – Велленгоф, Г. Мориц. — М. : МИИГАиК, 2007. — 410 с.
3. Нумеров Б.В. Зависимость между местными аномалиями силы тяжести и производными от потенциала / Б.В. Нумеров // Доклады Академии наук СССР. — 1929. — С. 101–105.
4. Маловичко А.К. Исследование по аналитическому продолжению гравитационных аномалий / А.К. Маловичко // Труды НИИГАиК. — 1951. — Т. 4. — 28 с.
5. Веселов К.Е. Применение второй вертикальной производной потенциала силы тяжести при геологическом истолковании гравиметровой съемки / К.Е. Веселов // Прикладная геофизика. — Москва : Гостоптехиздад. — 1954. — Вып. 11. — 176 с.
6. Игнатова М.П. Оценка точности формулы Нумерова для вертикального градиента силы тяжести на моделях Земли / М.П. Игнатова // Труды ЦНИИГАиК. — Москва : Геодезиздат, 1965. — № 157. — С. 125–134.
7. Молоденский М.С. Исследование решения задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли / М.С. Молоденский // Труды ЦНИИГАиК. — Москва : Геодезиздат, 1956. — № 112. — С. 3–8.
8. Юркина М.И. Вычисление первой и второй вертикальных производных силы тяжести по картам ее аномалий / М.И. Юркина // Труды ЦНИИГАиК. — Москва : Геодезиздат, 1965. — № 157. — С. 116–124.
9. Картвелишвили К.М. К вопросу пересчета аномалии силы тяжести в аномалию вертикального градиента силы тяжести / К.М. Картвелишвили // Изв. АН СССР. Серия физическая. — Москва : Наука, 1964. — № 8. — С. 1171–1177.
10. Остач О.М. Об определении вертикального градиента аномалий силы тяжести на физической поверхности Земли / О.М. Остач // Труды ЦНИИГАиК. — Москва : Геодезиздат, 1969. — Вып. 176. — С. 16–23.
11. Андреев Б.А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике / Б.А. Андреев // Изв. АН СССР. Серия физическая. — Москва : Наука, 1954. — № 1. — С. 1374–1382.
12. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. — Москва : Наука, 1969. — 736 с.
13. Маловичко А.К. Проблемы и задачи геодезической гравиметрии / А.К. Маловичко. — Пермь : Пермск. ун-т. — 1958. — 80 с.
14. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2015661196 Российская Федерация. Geoanom ver 1.0 / Д.Н. Голдобин, В.Ф. Канушин, И.Г. Ганагина; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий». — № 2015617768; заявл. 28.08.2015; опубл. 20.11.2015. — 1 с.
15. ICGEM-International Center for Global Gravity Field Models. — URL: <http://icgem> (accessed: 17.06.2024).
16. Канушин В.Ф. Определение вертикального градиента силы тяжести на территории Западной Сибири / В.Ф. Канушин, И.Г. Ганагина, Д.Н. Голдобин // Регулирование земельно-имущественных отношений в России: правовое и геопространственное обеспечение, оценка недвижимости, экология, технологические решения : сборник материалов Национальной научно-практической конференции. — Новосибирск. — Т. 2. — С. 101–107.
17. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ 2017614543 Российская Федерация. Geo_vagrd ver. 1.0 / Д.Н. Голдобин, В.Ф. Канушин; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский государственный университет геосистем и технологий». — № 2017610069; заявл. 10.01.2017; опубл. 19.04.2017. — 1 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Pellinen L.P. Primenenie formul pervogo priblizhenija dlja vychislenija harakteristik gavitacionnogo polja Zemli [Application of first approximation formulas for calculating the characteristics of the gravitational field of the Earth] / L.P. Pellinen // Trudy CNIIGAiK [Proceedings of the Central Research Institute]. — Moscow : Geodesizdat, 1965. — № 157. — P. 85–101. [in Russian]
2. Hoffmann – Wellengoff B. Fizicheskaja geodezija [Physical geodesy] / B. Hoffmann – Wellengoff, G. Moritz. — M. : MIIGAiK, 2007. — 410 p. [in Russian]
3. Numerov B.V. Zavisimost' mezhdu mestnymi anomalijami sily tjazhesti i proizvodnymi ot potenciala [Dependence between local gravity anomalies and derivatives of potential] / B.V. Numerov // Doklady Akademii nauk SSSR [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]. — 1929. — P. 101–105. [in Russian]
4. Malovichko A.K. Issledovanie po analiticheskemu prodolzheniju gravitacionnyh anomalij [Research on the analytical continuation of gravitational anomalies] / A.K. Malovichko // Trudy NIIGAiK [Proceedings of the NIIGAiK]. — 1951. — Vol. 4. — 28 p. [in Russian]
5. Veselov K.E. Primenenie vtoroj vertikal'noj proizvodnoj potenciala sily tjazhesti pri geologicheskem istolkovanii gravimetrovoj s'emyki [Application of the second vertical derivative of the gravity potential in the geological interpretation of gravimetric survey] / K.E. Veselov // Prikladnaja geofizika [Applied Geophysics]. — Moscow : Gostoptehizdad. — 1954. — Iss. 11. — 176 p. [in Russian]
6. Ignatova M.P. Ocenna tochnosti formuly Numerova dlja vertikal'nogo gradiента sily tjazhesti na modeljakh Zemli [Estimation of the accuracy of Numerov's formula for the vertical gradient of gravity on Earth models] / M.P. Ignatova // Trudy CNIIGAiK [The works of TsNIIGAiK]. — Moscow : Geodesizdat, 1965. — № 157. — P. 125–134. [in Russian]
7. Molodenskiy M.S. Issledovanie reshenija zadachi Stoksa s otnositel'noj pogreshnost'ju porjadka kvadrata szhatija Zemli [Investigation of the solution of the Stokes problem with a relative error of the order of the square of the compression of the

Earth] / M.S. Molodenskiy // Trudy CNIIGAiK [Proceedings of TsNIIGAiK]. — Moscow : Geodesizdat, 1956. — № 112. — P. 3–8. [in Russian]

8. Yurkina M.I. Vychislenie pervoj i vtoroj vertikal'nyh proizvodnyh sily tjazhesti po kartam ee anomalij [Calculation of the first and second vertical derivatives of gravity from maps of its anomalies] / M.I. Yurkina // Trudy CNIIGAiK [Proceedings of the Central Research Institute of Physics and Technology]. — Moscow : Geodesizdat, 1965. — № 157. — P. 116–124. [in Russian]

9. Kartvelishvili K.M. K voprosu perescheta anomalii sily tjazhesti v anomaliju vertikal'nogo gradiента sily tjazhesti [On the issue of recalculation of the gravity anomaly into the anomaly of the vertical gradient of gravity] / K.M. Kartvelishvili // Izv. AN SSSR. Serija fizicheskaja [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Physical Series]. — Moscow : Nauka, 1964. — № 8. — P. 1171–1177. [in Russian]

10. Ostach O.M. Ob opredelenii vertikal'nogo gradiента anomalij sily tjazhesti na fizicheskoi poverhnosti Zemli [On the determination of the vertical gradient of gravity anomalies on the physical surface of the Earth] / O.M. Ostach // Trudy CNIIGAiK [Proceedings of TsNIIGAiK]. — Moscow : Geodesizdat, 1969. — Iss. 176. — P. 16–23. [in Russian]

11. Andreev B.A. Raschety prostranstvennogo raspredelenija potencial'nyh polej i ih ispol'zovanie v razvedochnoj geofizike [Calculations of the spatial distribution of potential fields and their use in exploration geophysics] / B.A. Andreev // Izv. AN SSSR. Serija fizicheskaja [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Physical Series]. — Moscow : Nauka, 1954. — № 1. — P. 1374–1382. [in Russian]

12. Bermant A.F. Kratkij kurs matematicheskogo analiza dlja vtuzov [A short course of mathematical analysis for higher education institutions] / A.F. Bermant, I.G. Aramanovich. — Moscow : Nauka, 1969. — 736 p. [in Russian]

13. Malovichko A.K. Problemy i zadachi geodezicheskoi gravimetrii [Problems and tasks of geodetic gravimetry] / A.K. Malovichko. — Perm : Permsk. Univ. — 1958. — 80 p. [in Russian]

14. Svidetel'stva o gosudarstvennoj registracii programm dlja JeVM 2015661196 Rossijskaja Federacija. Geoanom ver 1.0 [Certificates of state registration of computer programs 2015661196 Russian Federation. Geoanom ver 1.0] / D.N. Goldobin, V.F. Kanushin, I.G. Ganagina; applicant and copyright holder Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Siberian State University of Geosystems and Technologies". — № 2015617768; application. 28.08.2015; publ. 20.11.2015. — 1 p. [in Russian]

15. ICGEM-International Center for Glodal Gravity Field Models. — URL: <http://icgem> (accessed: 17.06.2024).

16. Kanushin V.F. Opredelenie vertikal'nogo gradiента sily tjazhesti na territoriju Zapadnoj Sibiri [Determination of the vertical gravity gradient on the territory of Western Siberia] / V.F. Kanushin, I.G. Ganagina, D.N. Goldobin // Regulirovaniye zemel'no-imushhestvennyh otnoshenij v Rossii: pravovoe i geoprostranstvennoe obespechenie, ocenka nedvizhimosti, jekologija, tehnologicheskie reshenija [Regulation of land and property relations in Russia: legal and geospatial support, real estate valuation, ecology, technological solutions] : collection of materials of the National Scientific and Practical Conference. — Novosibirsk. — Vol. 2. — P. 101–107. [in Russian]

17. Svidetel'stva o gosudarstvennoj registracii programm dlja JeVM 2017614543 Rossijskaja Federacija. Geo_vagrd ver. 1.0 [Certificates of state registration of computer programs 2017614543 Russian Federation. Geo_var dver. 1.0] / D.N. Goldobin, V.F. Kanushin; applicant and copyright holder Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Siberian State University of Geosystems and Technologies". — № 2017610069; application 10.01.2017; publ. 19.04.2017. — 1 p. [in Russian]