

ГЕОМЕХАНИКА, РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД, РУДНИЧНАЯ АЭРОГАЗДИНАМИКА И ГОРНАЯ ТЕПЛОФИЗИКА / GEOMECHANICS, ROCK DESTRUCTION, MINE AEROGASDYNAMICS AND MINING THERMAL PHYSICS

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.145.41>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ ВНЕДРЕНИЮ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ ГЛУБИНЫ ПОГРУЖЕНИЯ, ВРЕМЕНИ, СКОРОСТИ

Научная статья

Фролова И.В.^{1,*}, Чанышев А.И.², Белоусова О.Е.³, Ефименко Л.Л.⁴

^{1,2,4} Новосибирский Государственный Университет Экономики и Управления, Новосибирск, Российская Федерация

^{2,3} Институт горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (sten9[at]rambler.ru)

Аннотация

Предлагается методика определения сопротивления среды по данным экспериментальных наблюдений за процессом внедрения жесткого инструмента. Для этого вначале определяется вид сопротивления с неизвестными априори параметрами. По заданному характеру реакции материала путем интегрирования закона движения устанавливается зависимость скорости погружения от глубины. Для получения связи глубины погружения от времени зависимость скорости от глубины интегрируется с применением разложения подынтегральной функции в сходящейся ряд. Константы, входящие в формулу для сопротивления среды, находятся путем решения неоднородной системы линейных уравнений с правой частью в виде известных данных из эксперимента. Приводится пример расчета сопротивления среды для конкретной ситуации.

Ключевые слова: сопротивление среды, зависимость, глубина, скорость, время, интегралы, ряды.

DETERMINATION OF THE RESISTANCE OF THE MEDIUM TO THE INTRODUCTION OF A SOLID BODY FROM MEASUREMENTS OF IMMERSION DEPTH, TIME, VELOCITY

Research article

Фролова I.V.^{1,*}, Chanyshv A.I.², Belousova O.Y.³, Efimenko L.L.⁴

^{1,2,4} Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russian Federation

^{2,3} Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

* Corresponding author (sten9[at]rambler.ru)

Abstract

A methodology for determining the resistance of the medium from experimental observations of the process of rigid tool insertion is proposed. For this reason, the type of resistance with unknown a priori parameters is first determined. According to the given character of the material reaction by integrating the law of motion, the dependence of the plunging velocity on the depth is established. In order to obtain the relationship between the plunging depth and time, the dependence of the velocity on depth is integrated using a convergent series expansion of the integrand. The constants included in the formula for the medium resistance are found by solving an inhomogeneous system of linear equations, with the right part in the form of known data from the experiment. An example of calculation of medium resistance for a specific situation is presented.

Keywords: medium resistance, dependence, depth, velocity, time, integrals, series.

Введение

В горном деле большое внимание уделяется вопросам внедрения породоразрушающего элемента в массив горных пород [1], [2], [3]. В строительстве зданий аналогичные вопросы возникают при забивке свай в грунт [4], [5], [6]. Проблема заключается в определении сопротивления среды внедрению, которое влияет на глубину проникновения, на скорость, время. Сопротивление зависит как от механических свойств самой среды, так и формы оголовника сваи, инструмента [7], [8], [9]. Помимо геометрических характеристик, на процесс проникновения влияют еще такие параметры, как передача ударного импульса от ударного устройства внедряемому телу [1], [10], [11]. Эта передача может быть абсолютно жесткой, может контролироваться с помощью специальных устройств в виде амортизаторов. Информация о сопротивлении среды важна для выбора, подходящего к данным условиям инструмента, сваи, ее размеров и характеристик.

Современное состояние проблемы внедрения твердых тел в деформируемые преграды характеризуется многочисленными работами отечественных и зарубежных авторов [12], [13], [14]. В них деформируемые среды рассматриваются в рамках теории пластичности Прандтля-Рейса [15], теории Друкера – Прагера [16], в рамках теории Хоека – Брауна [17]. Проникание исследуется в рамках теории пластичности первоначально анизотропных материалов [18], [19]. Исследуются внедрения тел различной формы от конической до шарообразной [20], [21]. Проблема связана как с прониканием разрушающих инструментов в твердые преграды, так и с установкой свай в мягких грунтах [22], [23].

Основные результаты

Основным уравнением для анализа сопротивления среды является закон движения Ньютона. Представим этот закон в виде

$$m\ddot{x} = F - R, \quad (1)$$

где F – активная сила, R – сопротивление (среды) движению. Традиционно зависимость $F = F(t)$ задается. Неизвестной в этом уравнении является величина R . Исходя из того, что (1) – это дифференциальное уравнение второго порядка можно допустить, что сопротивление R в общем случае должно зависеть от трех параметров – смещения x , скорости \dot{x} и времени t , то есть R – это функция вида

$$R = R(x, \dot{x}, t). \quad (2)$$

Простейшие варианты этой функции: $R = R(x)$, $R = R(\dot{x})$, $R = R(t)$. В последнем случае сопротивление зависит от времени, можно считать, что изменение сопротивления с ростом времени t связано со старением материала. Другой случай, когда сопротивление зависит от скорости движения пробойника, рассматривался в [1,2,24], где сопротивление R изменялось как квадратичная функция \dot{x}

$$R = B_0 + B_1\dot{x} + B_2\dot{x}^2, \quad (3)$$

константы сопротивления B_0 , B_1 , B_2 определялись на основе экспериментов.

Третий случай изменения сопротивления R с ростом смещения x определим ниже, укажем при этом уравнения для определения входных параметров. Рассмотрим несколько вариантов вычисления R .

Пусть в момент соударения инструмента массой m были выполнены следующие условия:

$$x|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (4)$$

Пусть еще сопротивление R зависит от смещения x как

$$R = a,$$

то есть является константой a . Требуется из опытов определить a . Для решения задачи имеем уравнение

$$m\ddot{x} = -a. \quad (5)$$

Умножив (5) на скорость \dot{x} , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{x})^2}{dt} = -\frac{a}{m} \frac{dx}{dt}. \quad (6)$$

Из (6) следует при начальных условиях (4)

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - \frac{2a}{m}x.$$

Отсюда

$$\dot{x} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2a}{m}x}. \quad (7)$$

В момент остановки тела $\dot{x} = 0$ и максимальная глубина погружения оказывается равной

$$x_{\max} = \frac{mv_0^2}{2a} \quad (8)$$

Откуда при известной величине x_{\max} находится величина a :

$$a = \frac{mv_0^2}{2x_{\max}}.$$

Уравнение (7) возможно проинтегрировать дальше, записав его как

$$-\frac{m}{2a} \cdot \frac{d\left[-\frac{2a}{m}x + v_0^2\right]}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2a}{m}x}} = dt.$$

С учетом этого выражения находится зависимость x от времени t в виде:

$$x = v_0t - \frac{a}{m} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Если сюда подставить выражение (8), то определится время до остановки.

Рассмотрим следующий вариант задачи.

Пусть сопротивление R зависит от x как

$$R = a + bx,$$

где a , b – неизвестные априори константы. В этом случае вместо (8) получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{x})^2}{dt} = -\frac{(a+bx)}{m} \frac{dx}{dt}$$

Интегралом этого уравнения при граничных условиях (4) служит выражение

$$\dot{x} = v_0 \sqrt{1 - \frac{2a}{mv_0^2}x - \frac{b}{m} \cdot \frac{x^2}{v_0^2}}. \quad (9)$$

Подкоренное выражение здесь должно быть неотрицательным, максимальная глубина погружения определяется из уравнения

$$1 - \frac{2a}{mv_0^2}x - \frac{b}{m} \cdot \frac{x^2}{v_0^2} = 0 \quad (10)$$

Для определения зависимости $x = x(t)$ требуется проинтегрировать (9). Имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{2a}{mv_0^2}x - \frac{b}{m} \cdot \frac{x^2}{v_0^2}}} = v_0 dt. \quad (11)$$

Его интегралом служит выражение

$$\arcsin \left[v_0 \sqrt{\frac{bm}{a^2 + bmv_0^2}} \left(x + \frac{a}{b} \right) \right] = t + C \quad (12)$$

где константа C выражается формулой

$$C = \arcsin v_0 a \sqrt{\frac{m}{b}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + bmv_0^2}}. \quad (13)$$

Если известна глубина проникновения x , то на основе (12), (13) вычисляется время проникновения. При известных значениях x и t формулы (10) и (12), (13) служат для восстановления неизвестных параметров сопротивления a и b .

Рассмотрим теперь более усложненный вариант сопротивления среды в виде

$$R = a + bx + cx^2 \quad (14)$$

В этом случае по-прежнему имеем уравнение движения (1) как

$$m\ddot{x} = - (a + bx + cx^2).$$

Умножив здесь на \dot{x} и интегрируя, получим

$$\dot{x}^2 = v_0^2 - \frac{2a}{m}x - \frac{b}{m}x^2 - \frac{2cx^3}{m \cdot 3},$$

из которого находим

$$\dot{x} = v_0 \sqrt{1 - \frac{2a}{mv_0^2}x - \frac{b}{mv_0^2}x^2 - \frac{2cx^3}{3mv_0^2}}. \quad (15)$$

При нулевой скорости \dot{x} отсюда получаем максимальную глубину погружения x_{\max} , решая уравнение

$$1 - \frac{2a}{mv_0^2}x - \frac{b}{mv_0^2}x^2 - \frac{2cx^3}{3mv_0^2} = 0 \quad (16)$$

Из (15) следует, что вещественная скорость существует, если величина

$$\Delta = \frac{2a}{mv_0^2}x + \frac{b}{mv_0^2}x^2 + \frac{2cx^3}{3mv_0^2}$$

будет меньше 1, то есть $\Delta < 1$.

Минимальное значение Δ в силу (15) должно быть равно нулю.

Поэтому имеем

$$0 \leq \Delta < 1. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь уравнение для определения зависимости $x = x(t)$:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-\Delta}} = v_0 dt \quad (18)$$

Раскладывая величину $\frac{1}{\sqrt{1-\Delta}}$ в ряд по степеням Δ , получаем [25]:

$$(1 - \Delta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\Delta + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\Delta^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\Delta^3 + \dots$$

или

$$(1 - \Delta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\Delta + \frac{3}{8}\Delta^2 + \frac{5}{16}\Delta^3 + \dots$$

При этом величина Δ должна для абсолютной сходимости ряда удовлетворять условию $|\Delta| < 1$. В силу (17) оно заведомо выполнено. Отсюда находим подынтегральную функцию (18) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-\Delta}} &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{mv_0^2}x + \frac{b}{mv_0^2}x^2 + \frac{2c}{3mv_0^2}x^3 \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2a}{mv_0^2}x + \frac{b}{mv_0^2}x^2 - \frac{2c}{3mv_0^2}x^3 \right)^2 + \dots = \\ &= 1 + \frac{a}{mv_0^2}x + \left(\frac{3a^2 + bmv_0^2}{2m^2v_0^4} \right) x^2 + \left(\frac{15a^2 + 9bamv_0^2 + 2cm^2v_0^4}{6m^3v_0^6} \right) x^3 + \\ &\quad + \left(\frac{35a^4 + 30a^2bmv_0^2 + 8cam^2v_0^4 + 3b^2m^2v_0^4}{8m^4v_0^8} \right) x^4 + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{mv_0^2} \left(ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} \right) + \frac{1}{(mv_0^2)^2} \left(\frac{3a^2x^2}{2} + \frac{3abx^3}{2} + \frac{3b^2x^4}{8} + \frac{acx^4}{1} + \frac{bcx^5}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{(mv_0^2)^3} \left(\frac{5a^3x^3}{2} + \frac{15a^2bx^4}{4} + \frac{15ab^2x^5}{8} + \frac{5a^2cx^5}{2} \right) + \frac{1}{(mv_0^2)^4} \left(\frac{35a^4x^4}{8} + \frac{35a^3bx^5}{4} \right) + \dots = v_0 t \end{aligned} \quad (19)$$

Формула (19) определяет время проникания жесткого инструмента на глубину x .

Возникает вопрос: как воспользоваться полученными результатами (16), (19), (15)? В эти выражения входят неизвестные параметры a , b , c . Как их найти? Экспериментально устанавливается глубина полного погружения инструмента за один удар, т.е. вместо (16) получаем одно из уравнений для определения констант a , b , c :

$$\frac{2a}{mv_0^2}x + \frac{b}{mv_0^2}x^2 + \frac{2c}{3mv_0^2}x^3 = 1. \quad (20)$$

Выражение (19) (в предположении, что слагаемыми со степенями $\frac{1}{mv_0^2}$ выше 1-ой можно пренебречь) дает второе уравнение для определения a , b , c при известных x , t :

$$\frac{a}{mv_0^2}x + \frac{b}{2mv_0^2}x^2 + \frac{c}{3mv_0^2}x^3 = v_0t - 1 \quad (21)$$

Чтобы получить третье уравнение, достаточно зафиксировать скорость инструмента в промежуточном положении при $x = x_*$, обозначив при этом скорость движения хвостовика инструмента как v_* . В этом случае имеем дополнительное уравнение:

$$\left(\frac{v_*}{v_0}\right)^2 = 1 - \frac{2a}{mv_0^2}x_* - \frac{b}{mv_0^2}x_*^2 - \frac{2c}{3mv_0^2}x_*^3. \quad (22)$$

В итоге получаем три уравнения для нахождения 3-х параметров a , b , c .

Повторив аналогичные действия для другого инструмента, можно сравнить сопротивление среды в обоих случаях.

Заключение

В работе дана методика определения сопротивления среды внедрению в нее жесткого инструмента путем многократного применения энергетического тождества. Показано, что в результате применения этой методики в процесс вычислений включаются все начальные условия задачи так, что итоговый интеграл вычисляется лишь путем разложения подынтегральной функции в сходящиеся ряды. Коэффициенты разложения функции сопротивления среды вычисляются с помощью данных о начальном состоянии положения инструмента в момент остановки и дополнительно в промежуточных точках.

При известной функции сопротивления среды внедрению положение пробойника для любого изменения активной силы, действующей на него, определяется на основе интегрирования уравнения движения.

Показано, что эффективность действия разрушающего инструмента оценивается энергией, направленной на преодоление сопротивления среды внедрению. Чем меньше затрачиваемая энергия, тем эффективнее действие инструмента. Данный принцип может служить критерием выбора разрушающего инструмента при одних и тех же начальных условиях.

Выводы

1. Для оценки сопротивления среды при внедрении в нее жесткого инструмента предлагается путь, основанный на применении энергетического тождества.

2. В случае сложной зависимости сопротивления среды от глубины проникновения возможно применение разложения абсолютно сходящихся рядов и последующего их интегрирования.

Финансирование

Работа выполнена в рамках проекта НИР (номер государственной регистрации 124020700085-5).

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Канарейкин А.И., Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе, Москва, Российская Федерация
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.145.41.1>

Funding

The work was carried out within the framework of the research project (state registration number 124020700085-5).

Conflict of Interest

None declared.

Review

Kanareikin A.I., Russian State Geological Prospecting University named after Sergo Ordzhonikidze, Moscow, Russian Federation
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.145.41.1>

Список литературы / References

1. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит. — Москва. — 1965. — 448 с.
2. Баландин В.В. Экспериментально-теоретическое изучение процессов проникания сфероконических тел в песчаную преграду / В.В. Баландин, А.М. Брагов, С.В. Крылов [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. — 2010. — Т. 3. — № 2. — С. 15—23.
3. Бивин Ю.К. Проникание твердых тел в сыпучие и слоистые среды / Ю.К. Бивин // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2008. — Т. 1. — с. 154—160.
4. Мухин А.А. К вопросу о применении метода испытания свай динамической нагрузкой с использованием принципов волновой теории удара. Геотехника / А.А. Мухин, А.А. Чуркин, К.А. Филиппов [и др.] — 2020. — Т. XII. — № 2. — с. 70—87.
5. Чернюк В.П. Определение оптимальной формы и угла заострения наконечника сваи при погружении в грунт / В.П. Чернюк, С.М. Семенюк // Строительство и архитектура. — Вестник Брестского государственного технического университета. — 2013. — №1. — с. 65-68.

6. Баранов В.Л. Динамика проникания жестких вращающихся инденторов в грунты / В.Л. Баранов, В.Н. Иванов, В.Н. Щитов. — Тула. — Климовск: ТулГУ. — ЦНИИТМ — 2005. — 107 с.
7. Линник Е.Ю. Особенности расчета максимальной глубины проникания оптимальных тел в песчаный грунт / Е.Ю. Линник // Проблемы прочности и пластичности. — 2016. — т. 78. — №2. — с. 208-217.
8. Баландин В.В. Установка для исследования процессов высокоскоростного соударения / В.В. Баландин // Проблемы прочности и пластичности. — 2013. — Т. 75. — с. 232-237.
9. Коронатов В.А. Глубина погружения ударника в грунт при жесткой остановке и сравнение элементарной теории проникания с другими методами / В.А. Коронатов // Системы. Методы. Технологии. — 2023. — №2(58). — с. 38-45.
10. Бахолдин Б.В. Об эмпирическом коэффициенте n в динамической формуле профессора Н.М. Герсеванова и методике его определения / Б.В. Бахолдин // Научные труды НИИОСП. — 1971. — Вып. 61. — с. 135—138.
11. Гинзбург Л.Я. Определение несущей способности свай в суглинках по результатам динамических испытаний. Основания, фундаменты и подземные сооружений / Л.Я. Гинзбург. — 1972. — Вып. 63. — с. 133—136.
12. Anderson C.E. Analytical models for penetration mechanics: a review / C.E. Anderson // International Journal of Impact Engineering. — 2017. — №108. — p. 3-26.
13. Розенберг З. Комментарий к статье «Влияние инерции цели на проникновение в алюминиевые цели жестких стержней с движущимся наконечником» Т. Л. Уоррена / З. Розенберг, Э. Декель // Int. J. Impact Eng. — 2016. — с. 231—233.
14. Liu T.L. Oblique penetration of tungsten spheres against steel targets based on compressible and incompressible cavity expansion theory / T.L. Liu, X.F. Wang, B. Jia [et al.] // International Journal of Impact Engineering. — Volume 188. — 2024. — 104914.
15. Orlov M.Yu. Research of the Destruction of Ice Under Shock and Explosive Loads / M.Yu. Orlov, Yu.N. Orlova // Multiscale Solid Mechanics. — 2020. — p. 363-376.
16. Weiji Liu. Investigation of the tool-rock interaction using Drucker-Prager failure criterion / Weiji Liu, Xudong Qian, Tao Li [et al.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. — Volume 173. — 2019. — p. 269-278.
17. Хе М. Новый взгляд на константу m i критерия разрушения Хука—Брауна и новая модель определения остаточной прочности горных пород / М. Хе, З. Чжан, Дж. Чжэн [и др.] // Rock Mech Rock Eng. — 2020. — №53. — p. 3953—3967.
18. Кривошеина М. Н. Особенности разрушения анизотропных материалов при различных скоростях удара / М.Н. Кривошеина, С.В. Кобенко, Е.В. Тух [и др.] // European Journal of Computational Mechanics. — 2017. — №26(5—6). — p. 609—621.
19. Хаохуа Чэнь. Упругопластическое решение проблемы дренированного расширения цилиндрической полости в анизотропных грунтах критического состояния / Хаохуа Чэнь, Линь Ли, Цзинпэй Ли и др. // Журнал инженерной механики. — 2020. — т. 146. — В.5. — p.134-156.
20. Cheng Wang. Penetration of shaped charge into layered and spaced concrete targets / Cheng Wang, Wenlong Xu, Steeve Chung Kim Yuen // International Journal of Impact Engineering. — 2018. — Volume 112. — p. 193-206.
21. Heng Dong. Study on penetration characteristics of high-speed elliptical cross-sectional projectiles into concrete / Heng Dong, Zihao Liu, Haijun Wu [et al.] // International Journal of Impact Engineering. — 2019. — Volume 132. — 103311.
22. Hang Zhou. Analytical model for evaluating XCC pile shaft capacity in soft soil by incorporating penetration effects / Hang Zhou, Jingrong Yuan, Hanlong Liu [et al.] // Soils and Foundations. — 2018. — Volume 58. — Issue 5. — p. 1093-1112.
23. Мейсян Гу. Численный анализ пассивных свай под дополнительной нагрузкой в очень глубоких мягких грунтах / Мейсян Гу, Сюоцун Цай, Цян Фу [и др.] // Инновации материалов и технологий в гражданском строительстве. — 2022. — №12. — DOI: 10.3390/buildings12111988
24. Баландин В.В. Экспериментально-теоретическое изучение процессов проникания сфероконических тел в песчаную преграду / В.В. Баландин, А.М. Брагов, С.В. Крылов [и др.] // Вычислительная механика сплошных сред. — 2010. — Т. 3. — № 2. — С. 15—23.
25. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — Изд-во ФИЗМАТГИЗ. — 1963. — 1100 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Gol'dsmit V. Udar. Teoriya i fizicheskie svoystva soudaryaemyh tel [Hit. Theory and physical properties of colliding bodies] / V. Gol'dsmit. — Moscow. — 1965. — 448 p. [in Russian]
2. Balandin V.V. Eksperimental'no-teoreticheskoe izuchenie processov pronikaniya sferokonicheskikh tel v peschanuyu pregradu [Experimental and theoretical study of the processes of penetration of spherokonic bodies into a sand barrier] / V.V. Balandin, A.M. Bragov, S.V. Krylov [et al.] // Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred [Computational continuum mechanics]. — 2010. — V. 3. — № 2. — P. 15—23 [in Russian].
3. Bivin YU.K. Pronikanie tverdyh tel v syuchie i sloistye sredy [Penetration of solids into loose and layered media] / YU.K. Bivin // Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela [Proceedings of RAS. Solid State Mechanics]. — 2008. — V. 1. — p. 154—160 [in Russian].
4. Muhin A.A. K voprosu o primeneniі metoda ispytaniya svaj dinamicheskoy nagruzkoj s ispol'zovaniem principov volnovoј teorii udara. Geotekhnika [To the question of the application of the method of examining all dynamic quantities using the principles of voln's theory of impact. Geotechnics] / A.A. Muhin, A.A. CHurkin, K.A. Filippov [et al.] — 2020. — V. XII. — № 2. — p. 70—87 [in Russian].
5. CHernyuk V.P. Opredelenie optimal'noј formy i ugla zaostreniya nakonechnika svai pri pogruzhении v grunt [Determination of the optimal shape and angle of sharpening of the tip of the pile when immersed in the ground] / V.P. CHernyuk, S.M. Semenyuk // Stroitel'stvo i arhitektura. — Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta

[The Construction and architecture. — Bulletin of the Brest State Technical University]. — 2013. — №1. — p. 65-68 [in Russian].

6. Baranov V.L. Dinamika pronikaniya zhestkih vrashchayushchihsvya indentorov v grunty [Dynamics of penetration of rigid rotating indentors into soils] / V.L. Baranov, V.N. Ivanov, V.N. SHCHitov. — Tula. — Klimovsk: TulSU. — CNIITM — 2005. — 107 p. [in Russian]

7. Linnik E.YU. Osobennosti rascheta maksimal'noj glubiny pronikaniya optimal'nyh tel v peschanyj grunt [Features of calculating the maximum depth of penetration of optimal bodies into sandy soil] / E.YU. Linnik // Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of strength and plasticity]. — 2016. — v. 78. — №2. — p. 208-217 [in Russian].

8. Balandin V.V. Ustanovka dlya issledovaniya processov vysokoskorostnogo soudareniya [Installation for the study of high-speed collision processes] / V.V. Balandin // Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of strength and plasticity]. — 2013. — V. 75. — p. 232-237 [in Russian].

9. Koronotov V.A. Glubina pogruzheniya udarnika v grunt pri zhestkoj ostanovke i sravnenie elementarnoj teorii pronikaniya s drugimi metodami [The depth of immersion of the drummer in the ground at a hard stop and a comparison of the elementary theory of penetration with other methods] / V.A. Koronotov // Sistemy. Metody. Tekhnologii [The system. Methods. Technologies]. — 2023. — №2(58). — p. 38-45 [in Russian].

10. Baholdin B.V. Ob empiricheskom koeficiente n v dinamicheskoy formule professora N.M. Gersevanova i metodike ego opredeleniya [On the empirical coefficient n in the dynamic formula of Professor N.M. Gersevanov and the method of its determination] / B.V. Baholdin // Nauchnye trudy NIIOSP [Scientific works of the NIIOSP]. — 1971. — No. 61. — p. 135—138 [in Russian].

11. Ginzburg L.YA. Opredelenie nesushchej sposobnosti svaj v suglinkah po rezul'tatam dinamicheskikh ispytaniy. Osnovaniya, fundamenty i podzemnye sooruzhenij [Determination of the bearing capacity of piles in loams based on the results of dynamic tests. Foundations, foundations and underground structures] / L.YA. Ginzburg. — 1972. — No. 63. — p. 133—136 [in Russian].

12. Anderson C.E. Analytical models for penetration mechanics: a review / C.E. Anderson // International Journal of Impact Engineering. — 2017. — №108. — p. 3-26.

13. Rozenberg Z. Kommentarij k stat'e «Vliyanie inercii celi na proniknovenie v alyuminievyje celi zhestkih sterzhnej s dvizhushchimsya nakonechnikom» T. L. Uorrena [Comment on the article "The effect of human energy on the penetration of rigid rods with a moving tip into aluminum fabrics" by T. L. Warren] / Z. Rozenberg, E. Dekel' // Int. J. Impact Eng. — 2016. — p. 231—233 [in Russian].

14. Liu T.L. Oblique penetration of tungsten spheres against steel targets based on compressible and incompressible cavity expansion theory / T.L. Liu, X.F. Wang, B. Jia [et al.] // International Journal of Impact Engineering. — Volume 188. — 2024. — 104914.

15. Orlov M.Yu. Research of the Destruction of Ice Under Shock and Explosive Loads / M.Yu. Orlov, Yu.N. Orlova // Multiscale Solid Mechanics. — 2020. — p. 363-376.

16. Weiji Liu. Investigation of the tool-rock interaction using Drucker-Prager failure criterion / Weiji Liu, Xudong Qian, Tao Li [et al.] // Journal of Petroleum Science and Engineering. — Volume 173. — 2019. — p. 269-278.

17. He M. Novyj vzglyad na konstantu m i kriteriya razrusheniya Huka—Brauna i novaya model' opredeleniya ostatechnoj prochnosti gornyh porod [A new look at the m constant and the Huka—Braun fracture criterion and a new model for determining the residual strength of rocks] / M. He, Z. CHzhan, Dzh. CHzhen [et al.] // Rock Mech Rock Eng. — 2020. — №53. — p. 3953—3967 [in Russian].

18. Krivosheina M. N. Osobennosti razrusheniya anizotropnyh materialov pri razlichnyh skorostyah udara [Features of the destruction of anisotropic materials at different impact velocities] / M.N. Krivosheina, S.V. Kobenko, E.V. Tuh [et al.] // European Journal of Computational Mechanics. — 2017. — №26(5—6). — p. 609—621 [in Russian].

19. Haohua Chen. Uprugoplasticheskoe reshenie problemy drenirovannogo rasshireniya cilindricheskoy polosti v anizotropnyh gruntah kriticheskogo sostoyaniya [Elastoplastic solution of the problem of drained expansion of a cylindrical cavity in anisotropic soils of critical condition] / Haohua Chen, Lin Li, Jingpei Li [et al.] // Zhurnal inzhenernoj mekhaniki [Journal of Engineering Mechanics]. — 2020. — v. 146. — V.5. — p. 134-156 [in Russian].

20. Cheng Wang. Penetration of shaped charge into layered and spaced concrete targets / Cheng Wang, Wenlong Xu, Steeve Chung Kim Yuen // International Journal of Impact Engineering. — 2018. — Volume 112. — p. 193-206.

21. Heng Dong. Study on penetration characteristics of high-speed elliptical cross-sectional projectiles into concrete / Heng Dong, Zihao Liu, Haijun Wu [et al.] // International Journal of Impact Engineering. — 2019. — Volume 132. — 103311.

22. Hang Zhou. Analytical model for evaluating XCC pile shaft capacity in soft soil by incorporating penetration effects / Hang Zhou, Jingrong Yuan, Hanlong Liu [et al.] // Soils and Foundations. — 2018. — Volume 58. — Issue 5. — p. 1093-1112.

23. Mejsyan Gu. CHislennyj analiz passivnyh svaj pod dopolnitel'noj nagruzkoj v ochen' glubokih myagkih gruntah [numerical analysis of passive piles under additional load in very deep soft soils] / Mejsyan Gu, Syaocun Caj, Cyan Fu [et al.] // Innovacii materialov i tekhnologij v grazhdanskom stroitel'stve [Innovations in materials and technologies in civil engineering]. — 2022. — №12. — DOI: 10.3390/buildings12111988 [in Russian]

24. Balandin V.V. Eksperimental'no-teoreticheskoe izuchenie processov pronikaniya sferokonicheskikh tel v peschanuyu pregradu [Experimental and theoretical study of the processes of penetration of spheroconic bodies into a sand barrier] / V.V. Balandin, A.M. Bragov, S.V. Krylov [et al.] // Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred [Computational continuum mechanics]. — 2010. — V. 3. — № 2. — P. 15—23 [in Russian].

25. Gradshtejn I.S. Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedenij [Tables of integrals, sums, series and products] / I.S. Gradshtejn, I.M. Ryzhik. — FIZMATGIZ Publishing house. — 1963. — 1100 p. [in Russian]