ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА / DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.177

СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Научная статья

Хакимова З.Н.[1, *]

[1] Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (zilya-khakimova[at]mail.ru)

Аннотация

В данной статье исследуются дискретные симметрии класса обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с мультипликативными правыми частями.

Найдены дискретные преобразования, замкнутые в рассматриваемом классе уравнений. Построена дискретная группа преобразований и её граф. Получены все элементы орбиты исходного мультипликативного уравнения, содержащего экспоненциальную функцию.

Приведен способ поиска точных решений уравнений указанной орбиты при некоторых значениях параметров, входящих в уравнения. Рассмотрены примеры нахождения решений уравнений этой орбиты.

В работе использован метод расширения класса уравнений, а также метод «размножения» разрешимых случаев в исследуемом классе уравнений, основанный на том факте, что решения уравнений связаны теми же преобразованиями, что и сами уравнения.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), дискретная группа преобразований, граф дискретной группы, группа диэдра, точное решение ОДУ.

SYMMETRIES AND EXACT SOLUTIONS OF A MULTIPLICATIVE CLASS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH EXPONENTIAL FUNCTIONS

Research article

Khakimova Z.N.[1, *]

[1] Mozhaisky Military Space Academy, Saint-Petersburg, Russian Federation

* Corresponding author (zilya-khakimova[at]mail.ru)

Abstract

This article studies discrete symmetries of a class of 2nd order ordinary differential equations with multiplicative right values.

Discrete transformations closed in the studied class of equations are found. The discrete group of transformations and its graph are constructed. All elements of the orbit of the original multiplicative equation containing the exponential function are obtained.

The method of finding exact solutions of the equations of the specified orbit at some values of the parameters included in the equations is presented. Examples of finding solutions to the equations of this orbit are discussed.

In this work, the method of extending the class of equations, as well as the method of "multiplication" of solvable cases in the studied class of equations, based on the fact that solutions of equations are related by the same transformations as the equations themselves, are used.

Keywords: ordinary differential equation (ODE), discrete transformation group, discrete group graph, dihedral group, exact solution of ODEs.

Введение

Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений (ДГА ОДУ) был разработан В. Ф. Зайцевым в конце 20-го века. Он открыл дискретные группы преобразований дифференциальных уравнений.

Основой ДГА ОДУ является поиск преобразований, замкнутых в исследуемом классе уравнений. (До В. Ф. Зайцева были известны лишь простейшие из таких преобразований, например $x \to -x$, $x \to \frac{1}{x}$ и т.д.) Важным приложением ДГА ОДУ является алгоритмизированный поиск их точных решений.

Первая наиболее полная работа, в которой изложены основы ДГА ОДУ и приведены точные решения сотен новых разрешимых уравнений, полученных В. Ф. Зайцевым, его коллегой А. Д. Поляниным и их научными школами – это справочник-монография [1] (в эту же книгу вошли, в частности, основные теоретические и практические результаты кандидатской диссертации автора данной статьи).

В последующих справочниках-монографиях этих же авторов содержатся точные решения уже тысяч новых интегрируемых уравнений, найденных методом «размножения» по дискретным группам (см. далее).

К сожалению, в настоящее время дискретным группам преобразований ОДУ математическим сообществом уделяется незаслуженно мало внимания: считанное число математиков занимается исследованием ОДУ с помощью дискретных групп преобразований. Большинство «групповиков» занимаются непрерывными группами преобразований, причём в основном, для уравнений с частными производными.

Данной статьёй, так же как и прошлыми работами [2], [3] и т.д., автор пытается ликвидировать этот пробел в теории дифференциальных уравнений.

В данной работе рассматриваются дискретные симметрии мультипликативного класса обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 2-го порядка:

$$y''_{xx} = K(x)L(y)M(y'_x)N(xy'_x - y). \tag{1}$$

Исследование симметрий этого класса уравнений было начато В. Ф. Зайцевым с подкласса (1) при $N \equiv 1$ [1]:

$$y''_{xx} = K(x)L(y)M(y'_x), \tag{2}$$

причём, со случая степенных функций *K*, *L*, *M:*

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m \tag{3}$$

(класс уравнений (3) называется классом обобщённых уравнений Эмдена-Фаулера).

В работах [2], [4], [5], [6], [8] класс степенных уравнений (3) был расширен:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m (xy'_x - y)^n \tag{4}$$

– для достижения замкнутости некоторых дискретных преобразований.

В статьях [9], [10], [11] было начато исследование дискретных симметрий класса уравнений (1) с произвольными функциями, а также были рассмотрены некоторые спецификации, в частности, уравнение свободных колебаний маятника. В данной статье исследуется ещё одна спецификация: уравнения классов (1) и (2) содержат экспоненциальные функции.

Наличие дискретной группы преобразований, замкнутых в рассматриваемом классе уравнений, позволяет находить новые разрешимые случаи в этом классе уравнений с помощью метода «размножения» по данной дискретной группе: если известно решение, частное или общее, хотя бы одного уравнения, соответствующего некоторой вершине графа группы, то с помощью преобразований данной дискретной группы можно получить решения всех остальных уравнений, соответствующих остальным вершинам графа.

В статье используются, в частности, следующие термины: дискретная группа преобразований, порождающий (образующий) элемент и определяющие соотношения дискретной группы, код дискретной группы, группа диэдра и т.д., с определениями которых можно ознакомиться в работах [1], [12].

Применение группы к классу уравнений с экспонентой

Для класса уравнений (1) с произвольными функциями была построена [9], [10], [11] группа диэдра D_6 12-го порядка – группа преобразований, замкнутых в (1):

$$D_6 = \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}^2, \boldsymbol{h}^3, \boldsymbol{h}^4, \boldsymbol{h}^5, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{hr}, \boldsymbol{h}^2\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^3\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^4\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^5\boldsymbol{r}\}, \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{h}^6 = (\boldsymbol{hr})^2 = \boldsymbol{E}, \tag{5}$$

($\boldsymbol{E}$ – тождественное преобразование), где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{h}$ – образующие группы (5);

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{r}: \quad x \rightleftarrows y, \quad \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{E}, \quad y''_{xx} = K(x)L(y)M\left(y'_x\right)N\left(xy'_x - y\right) \xrightarrow{r} \\
\xrightarrow{r} y''_{xx} = -L(x)K(y)y'^3_x M\left(\frac{1}{y'_x}\right)N\left(-\frac{xy'_x - y}{y'_x}\right); \\
\boldsymbol{h}: \quad x \to \frac{1}{y'_x}, y \to -\frac{xy'_x - y}{y'_x}, y'_x \to y, xy'_x - y \to x, \boldsymbol{h}^6 = \boldsymbol{E},
\end{gathered} \tag{6}$$

$$y''_{xx} = K(x)L(y)M\left(y'_x\right)N\left(xy'_x - y\right) \xrightarrow{h} y''_{xx} = -\frac{1}{N(x)}\frac{1}{M(y)}\frac{y'^8_x}{K\left(\frac{1}{y'_x}\right)}\frac{1}{L\left(-\frac{xy'_x - y}{y'_x}\right)} \quad (7)$$

Граф группы D_6 изображён на рис. 1.

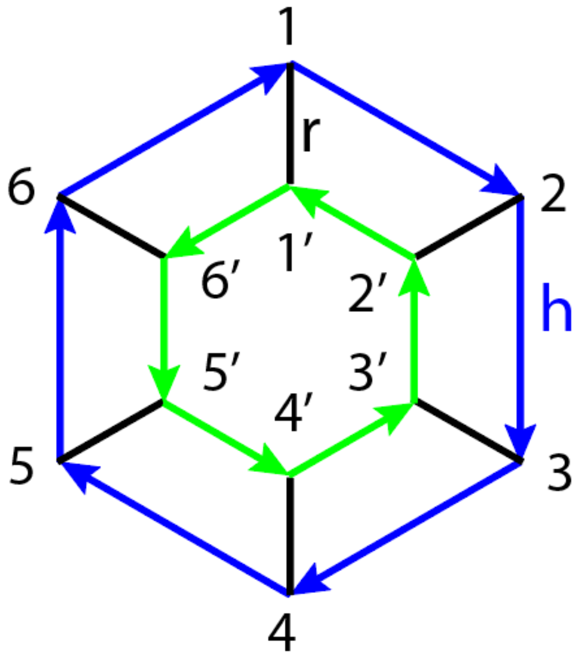

Рисунок 1 - Граф группы D_6
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.177.1

Рассмотрим мультипликативный класс уравнений с экспонентой и степенными функциями в правых частях:

$$y''_{xx} = Ae^x y^l (y'_x)^m (xy'_x - y)^n. \quad (8)$$

Поскольку (8) является спецификацией класса уравнений (1), то к нему можно применить группу преобразований D_6 (5). В результате получается ещё 11 уравнений. Пусть уравнению (8) соответствует вершина (1) на рис. 1, тогда уравнениям, полученным из (8), будут соответствовать 11 остальных вершин: 2-6, 1’-6’. Все 12 уравнений помещены в таблицу 1.

Таблица 1 - Уравнения-вершины графа на рис. 1

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.177.2

1.1	$y''_{xx} = Ae^x y^l (y'_x)^m (xy'_x - y)^n$
1.2	$y''_{xx} = (-1)^{1-l} \frac{1}{A} x^{-n} y^{-m} e^{-\frac{1}{y'_x}} (y'_x)^{l+3} (xy'_x - y)^{-l}$
1.3	$y''_{xx} = (-1)^{l+m} A x^l e^{\frac{1}{y}} y^{-l-3} (y'_x)^{-m-n+3} (xy'_x - y)^m$
1.4	$y''_{xx} = (-1)^{-m} \frac{1}{A} x^{-m} y^{m+n-3} e^{\frac{y'_x}{xy'_x - y}} (xy'_x - y)^{l+3}$
1.5	$y''_{xx} = (-1)^n A x^{-l-3} e^{-\frac{y}{x}} (y'_x)^n (xy'_x - y)^{-m-n+3}$
1.6	$y''_{xx} = (-1)^{1-n} \frac{1}{A} x^{m+n-3} y^{-n} (y'_x)^{-l} e^{-(xy'_x - y)}$
1.1’	$y''_{xx} = (-1)^{n-1} A x^l e^y (y'_x)^{-m-n+3} (xy'_x - y)^n$
1.2’	$y''_{xx} = \frac{1}{A} x^{-m} y^{-n} e^{-y'_x} (xy'_x - y)^{-l}$
1.3’	$y''_{xx} = (-1)^{l-1} A e^{\frac{1}{x}} x^{-l-3} y^l (y'_x)^n (xy'_x - y)^m$
1.4’	$y''_{xx} = (-1)^{-l-m} \frac{1}{A} x^{m+n-3} y^{-m} (y'_x)^{-l} e^{-\frac{1}{xy'_x - y}} (xy'_x - y)^{l+3}$
1.5’	$y''_{xx} = (-1)^m A e^{-\frac{x}{y}} y^{-l-3} (y'_x)^m (xy'_x - y)^{-m-n+3}$
1.6’	$y''_{xx} = (-1)^{-n} \frac{1}{A} x^{-n} y^{m+n-3} (y'_x)^{l+3} e^{\frac{xy'_x - y}{y'_x}}$

Примечание: вершина 1 соответствует (8)

Представляет интерес тот факт, что в таблице 1 уравнения 1.1, 1.1’, 1.2’, 1.6’ содержат соответственно e^x, e^y, $e^{y'_x}$ и $e^{xy'_x - y}$.

Применение группы D3 к (8)

Для класса уравнений (2) была построена [1], [11] группа диэдра D_3 преобразований, замкнутых в (2):

$$D_3 = \left\{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{gr}, \boldsymbol{g}^2\boldsymbol{r}\right\}, \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{g}^3 = (\boldsymbol{gr})^2 = \boldsymbol{E}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{g}$ – образующие дискретной группы D_3;

$$\begin{gathered} \boldsymbol{r}: \quad x \rightleftarrows y, \quad \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{E}, y''_{xx} = K(x)L(y)M\left(y'_x\right) \xrightarrow{r} y''_{xx} = -L(x)K(y)y'^3_x M\left(\frac{1}{y'_x}\right); \\ \boldsymbol{g}: \quad x \to \alpha(y), y \to \beta\left(y'_x\right), y'_x \to \gamma(x), \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \alpha(y) = (\int K(y)dy)^{-1}, \beta(y'_x) = [\frac{1}{L(y'_x)}]^{-1}, \gamma(x) = [\int \frac{dx}{M(x)}]^{-1}, \boldsymbol{g}^3 = \boldsymbol{E}, \\ y''_{xx} = K(x)L(y)M(y'_x) \xrightarrow{g} y''_{xx} = \gamma(x)\frac{1}{K(\alpha(y))}\frac{y'_x}{\beta'(y'_x)} \end{gathered} \tag{11}$$

(показатель «-1» в (11) означает обратную функцию).

Граф группы D_3 (9) 6-го порядка изображён на рис. 2. Вершина 1.1 соответствует (2).

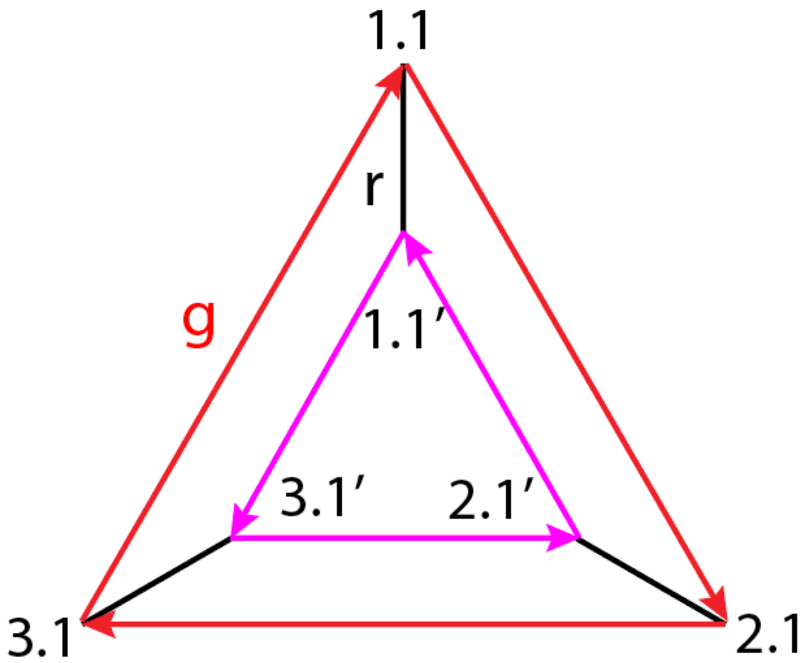

Рисунок 2 - Граф группы D_3
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.177.3

Рассмотрим подкласс класса уравнений (8) при *n=0*:

$$y''_{xx} = Ae^x y^l (y'_x)^m. \tag{12}$$

Так как (12) является представителем класса уравнений (2), то к нему можно применить группу преобразований D_3 (9). В результате получим уравнения, соответствующие вершинам графа на рис. 2, которые помещены в таблицу 2.

Таблица 2 - Уравнения-вершины графа на рис. 2
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.177.4

1.1	$y''_{xx} = Ae^x y^l (y'_x)^m$	1.1’	$y''_{xx} = (-1)Ax^l e^y (y'_x)^{-m+3}$
2.1	$y''_{xx} = Bx^{\frac{1}{1-m}} y^{-1} (y'_x)^{\frac{2l+1}{l}}$	2.1’	$y''_{xx} = -Bx^{-1} y^{\frac{1}{1-m}} (y'_x)^{\frac{l-1}{l}}$
3.1	$y''_{xx} = Cx^{-\frac{l}{l+1}} y^{\frac{1}{m-2}} y'_x$	3.1’	$y''_{xx} = -Cx^{\frac{1}{m-2}} y^{-\frac{l}{l+1}} (y'_x)^2$

Примечание: вершина 1.1 обозначает (12)

В таблице 2 $B = -l[(1-m)A]^{\frac{1}{1-m}}$, $C = (l+1)^{-\frac{l}{l+1}} (2-m)^{\frac{1}{m-2}} \left[(1-m)^{\frac{l+m-1}{2-m}} A^l\right]^{\frac{1}{(l+1)(m-1)}}$.

Преобразование ***g*** зависит от функций *K*, *L*, *M* преобразуемого уравнения, поэтому при каждом следующем применении уравнение ***g*** имеет другой вид.

С помощью (11) можно вычислить преобразование ***g*** на каждом шаге:

$$1.1 \xrightarrow{\boldsymbol{g}} 2.1, \boldsymbol{g}: x \to \ln y, y \to y_x^{\prime -\frac{1}{l}}, y'_x \to [(1-m)x]^{\frac{1}{1-m}}$$
$$2.1 \xrightarrow{\boldsymbol{g}} 3.1, \boldsymbol{g}: x \to \left(\frac{2-m}{1-m} y\right)^{\frac{1-m}{2-m}}, y \to y'_x, y'_x \to \left(-\frac{l+1}{l} x\right)^{\frac{-l}{l+1}}.$$

Так как преобразования ***g*** и ***r*** замкнуты в классе уравнений (2), то все уравнения таблицы 2 имеют вид (2).

Удивительным фактом является то обстоятельство, что только уравнения 1.1 и 1.1’ содержат экспоненты. Остальные 4 уравнения являются степенными. Уравнения 1.1 и 1.1’ являются сингулярными элементами степенного класса уравнений (3), соответствующими в (3) случаям *k*=∞ и *l*=∞ для 1.1’.

Применение дискретной группы 36-го порядка к (12)

Все уравнения таблицы 2 принадлежат классу уравнений (1), поэтому к ним можно применить группу преобразований D_6 (5). В результате получается дискретная группа преобразований 36-го порядка, изображённая на рис. 3.

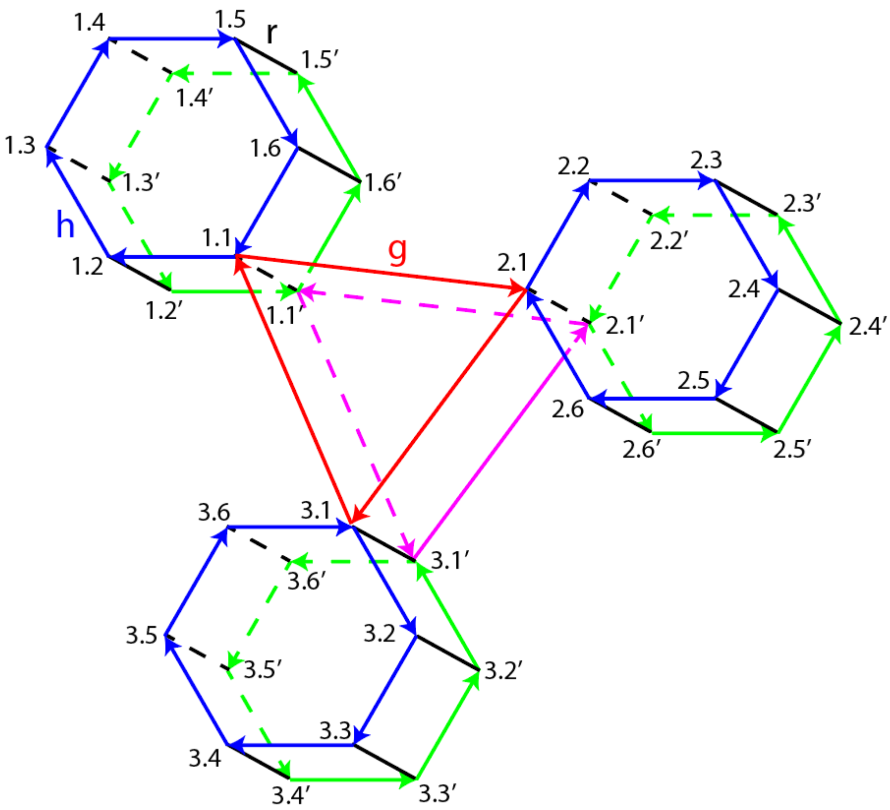

Рисунок 3 - Граф группы 36-го порядка
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.177.5

Вершины графа на рис. 3 обозначают уравнения, помещенные в таблицу 3.

Таблица 3 - Уравнения-вершины графа на рис. 3

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.177.6

1.1	$y''_{xx} = Ae^{x}y^{l}(y'_x)^{m}$
1.2	$y''_{xx} = (-1)^{1-l}\frac{1}{A}y^{-m}e^{-\frac{1}{y'_x}}(y'_x)^{l+3}(xy'_x - y)^{-l}$
1.3	$y''_{xx} = (-1)^{l+m}Ax^{l}e^{\frac{1}{y}}y^{-l-3}(y'_x)^{3-m}(xy'_x - y)^{m}$
1.4	$y''_{xx} = (-1)^{-m}\frac{1}{A}x^{-m}y^{m-3}e^{\frac{y'_x}{xy'_x - y}}(xy'_x - y)^{l+3}$
1.5	$y''_{xx} = Ax^{-l-3}e^{-\frac{y}{x}}(xy'_x - y)^{3-m}$
1.6	$y''_{xx} = -\frac{1}{A}x^{m-3}(y'_x)^{-l}e^{-(xy'_x - y)}$
2.1	$y''_{xx} = Bx^{\frac{1}{1-m}}y^{-1}(y'_x)^{\frac{2l+1}{l}}$
2.2	$y''_{xx} = \frac{1}{B}y^{-\frac{2l+1}{l}}(y'_x)^{\frac{3-2m}{1-m}}(xy'_x - y)$
2.3	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{1-l}{l}}Bx^{-1}y^{-\frac{3-2m}{1-m}}(y'_x)^{\frac{l-1}{l}}(xy'_x - y)^{\frac{2l+1}{l}}$
2.4	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{l-m+1}{l(m-1)}}\frac{1}{B}x^{-\frac{2l+1}{l}}y^{-\frac{l-1}{l}}(y'_x)^{-\frac{1}{1-m}}(xy'_x - y)^{\frac{3-2m}{1-m}}$
2.5	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{1}{1-m}}Bx^{-\frac{3-2m}{1-m}}y^{\frac{1}{1-m}}(xy'_x - y)^{\frac{l-1}{l}}$
2.6	$y''_{xx} = -\frac{1}{B}x^{-\frac{l-1}{l}}y'_x(xy'_x - y)^{-\frac{1}{1-m}}$
3.1	$y''_{xx} = Cx^{-\frac{l}{l+1}}y^{\frac{1}{m-2}}y'_x$
3.2	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{1-m}{m-2}}\frac{1}{C}y^{-1}(y'_x)^{-\frac{l}{l+1}+\frac{1}{m-2}+3}(xy'_x - y)^{-\frac{1}{m-2}}$
3.3	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{m-1}{m-2}}Cx^{\frac{1}{m-2}}y^{\frac{l}{l+1}-\frac{1}{m-2}-3}(y'_x)^{2}(xy'_x - y)$
3.4	$y''_{xx} = (-1)^{-\frac{1}{l+1}}\frac{1}{C}x^{-1}y^{-2}(y'_x)^{\frac{l}{l+1}}(xy'_x - y)^{-\frac{l}{l+1}+\frac{1}{m-2}+3}$
3.5	$y''_{xx} = (-1)^{-\frac{l}{l+1}}Cx^{\frac{l}{l+1}-\frac{1}{m-2}-3}y^{-\frac{l}{l+1}}(xy'_x - y)^{2}$
3.6	$y''_{xx} = -\frac{1}{C}x^{-2}(y'_x)^{-\frac{1}{m-2}}(xy'_x - y)^{\frac{l}{l+1}}$
1.1’	$y''_{xx} = -Ax^{l}e^{y}(y'_x)^{3-m}$
1.2’	$y''_{xx} = \frac{1}{A}x^{-m}e^{-y'_x}(xy'_x - y)^{-l}$
1.3’	$y''_{xx} = (-1)^{l-1}Ae^{\frac{1}{x}}x^{-l-3}y^{l}(xy'_x - y)^{m}$
1.4’	$y''_{xx} = (-1)^{-l-m}\frac{1}{A}x^{m-3}y^{-m}(y'_x)^{-l}e^{-\frac{1}{xy'_x - y}}(xy'_x - y)^{l+3}$
1.5’	$y''_{xx} = (-1)^{m}Ae^{-\frac{x}{y}}y^{-l-3}(y'_x)^{m}(xy'_x - y)^{3-m}$
1.6’	$y''_{xx} = \frac{1}{A}y^{m-3}(y'_x)^{l+3}e^{\frac{xy'_x - y}{y'_x}}$
2.1’	$y''_{xx} = -Bx^{-1}y^{\frac{1}{1-m}}(y'_x)^{\frac{l-1}{l}}$
2.2’	$y''_{xx} = \frac{1}{B}x^{-\frac{2l+1}{l}}(y'_x)^{-\frac{1}{1-m}}(xy'_x - y)$
2.3’	$y''_{xx} = Bx^{-\frac{3-2m}{1-m}}y^{-1}(xy'_x - y)^{\frac{2l+1}{l}}$
2.4’	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{l-1}{l}}\frac{1}{B}x^{-\frac{l-1}{l}}y^{-\frac{2l+1}{l}}y'_x(xy'_x - y)^{\frac{3-2m}{1-m}}$
2.5’	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{l-m+1}{l(1-m)}}Bx^{\frac{1}{1-m}}y^{-\frac{3-2m}{1-m}}(y'_x)^{\frac{2l+1}{l}}(xy'_x - y)^{\frac{l-1}{l}}$
2.6’	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{1}{m-1}}\frac{1}{B}y^{-\frac{l-1}{l}}(y'_x)^{\frac{3-2m}{1-m}}(xy'_x - y)^{-\frac{1}{1-m}}$
3.1’	$y''_{xx} = -Cx^{\frac{1}{m-2}}y^{-\frac{l}{l+1}}(y'_x)^{2}$
3.2’	$y''_{xx} = \frac{1}{C}x^{-1}(y'_x)^{\frac{l}{l+1}}(xy'_x - y)^{-\frac{1}{m-2}}$
3.3’	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{m-1}{m-2}}Cx^{\frac{l}{l+1}-\frac{1}{m-2}-3}y^{\frac{1}{m-2}}(xy'_x - y)$
3.4’	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{1-m}{m-2}}\frac{1}{C}x^{-2}y^{-1}(y'_x)^{-\frac{1}{m-2}}(xy'_x - y)^{-\frac{l}{l+1}+\frac{1}{m-2}+3}$
3.5’	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{1}{l+1}}Cx^{-\frac{l}{l+1}}y^{\frac{l}{l+1}-\frac{1}{m-2}-3}y'_x(xy'_x - y)^{2}$
3.6’	$y''_{xx} = (-1)^{\frac{l}{l+1}}\frac{1}{C}y^{-2}(y'_x)^{-\frac{l}{l+1}+\frac{1}{m-2}+3}(xy'_x - y)^{\frac{l}{l+1}}$

Примечание: вершина 1.1 обозначает (12)

Нахождение точных решений уравнений орбиты (12)

Если одно из уравнений таблиц 1, 2, 3 при некоторых значениях параметров является интегрируемым, то это же можно сказать обо всех остальных уравнениях в этих таблицах. Метод «размножения» разрешимых случаев в рассматриваемых классах уравнений основан на том, что преобразования дискретных групп (здесь 6-го, 12-го и 36-го порядков), связывающие уравнения, связывают и их решения. Кроме того, если решение исходного уравнения выражается через некоторые элементарные или специальные функции, то и решения уравнений его орбиты (здесь остальных уравнений таблиц 1, 2, 3) выражаются через эти же функции. Указанные выше преобразования легко установить по графам на рис. 1, 2, 3 – они являются композициями образующих ***g, h, r***.

С помощью метода «размножения» известный справочник Камке по ОДУ [13] был значительно расширен: единичные разрешимые случаи различных классов уравнений были «размножены» до десятков и сотен [14], [15], [16], [17].

Пример 1. Рассмотрим уравнение (12) при $l=-\frac{1}{2}$, $m=\frac{3}{2}$:

$$y''_{xx}=Ae^{x}y^{-\frac{1}{2}}\left(y'_{x}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{13}$$

оно имеет номер 1.1 на рис. 1 и в таблице 1.

Его общее решение в параметрическом виде [14]:

$$x=\tau^{2}-\ln(AF), y=C_{1}\left(2\tau f-e^{\tau^{2}}\right)^{2}, f=\int e^{\tau^{2}}d\tau+C_{2}. \tag{14}$$

Найдём, к примеру, решение уравнения 1.3’:

$$y''_{xx}=-iAx^{\frac{7}{2}}e^{\frac{1}{x}}y^{-\frac{1}{2}}\left(xy'_{x}-y\right)^{\frac{3}{2}} \tag{15}$$

Согласно рис. 3, уравнение 1.3’ (15) приводится к уравнению 1.1 (13) преобразованием $\boldsymbol{h^2 r}$; с помощью (6) и (7) его легко вычислить:

$$\boldsymbol{h}^{2}\boldsymbol{r}: x\longrightarrow\frac{1}{x^{2}}, y\longrightarrow-\frac{y}{x}. \tag{16}$$

Композиция (16) и (14) является общим решением уравнения 1.3’ (15):

$$x=\frac{1}{\tau^{2}-\ln(AF)}, y=-\frac{c_{1}\left(2\tau f-e^{\tau^{2}}\right)^{2}}{\tau^{2}-\ln(AF)}, .$$

$$f=\int e^{\tau^{2}}d\tau+C_{2}.$$

Пример 2. Аналогично вычислим решение, например, уравнения 1.2’:

$$y''_{xx}=\frac{1}{A}x^{-\frac{3}{2}}e^{-y'_{x}}\left(xy'_{x}-y\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

Это немного сложнее, так как уравнение 1.2’ (17) приводится к уравнению 1.1 (13) не с помощью точечного преобразования, а с помощью касательного преобразования:

$$\boldsymbol{hr}: x\rightleftarrows y'_{x}, y\rightleftarrows xy'_{x}-y. \tag{18}$$

Заметим, что преобразование ***hr*** оказалось известным касательным преобразованием Лежандра, в котором x и y зависят от производной. Дополнительно необходимо в решении (14) уравнения 1.1 (13) вычислить y'_x и xy'_x-y :

$$y'_{x}=4C_{1}f^{2}, xy'_{x}-y=-C_{1}\left(4f^{2}\ln(AF)-4\tau fe^{\tau^{2}}+e^{2\tau^{2}}\right), f=\int e^{\tau^{2}}d\tau+C_{2}. \tag{19}$$

Таким образом, композиция преобразования ***hr*** (18) и общего решения (14, 19) уравнения 1.1 (13) является общим решением уравнения 1.2’ (17):

$$x=4C_{1}f^{2}, y=-C_{1}\left(4f^{2}\ln(AF)-4\tau fe^{\tau^{2}}+e^{2\tau^{2}}\right), f=\int e^{\tau^{2}}d\tau+C_{2}. \tag{20}$$

Замечание. С помощью операции масштабирования можно вычислить решения всех уравнений орбиты исходного уравнения (13) с произвольными коэффициентами в правых частях.

Заключение

Обыкновенные дифференциальные уравнения нередко возникают в различных разделах естествознания, особенно при решении уравнений математической физики и механики [15], [18].

В данной статье дискретные группы преобразований 6-го, 12-го и 36-го порядков применены к мультипликативному классу ОДУ 2-го порядка, содержащему в правой части степенные и экспоненциальный сомножители.

Найдена орбита исходного дифференциального уравнения, состоящая из 36-ти мультипликативных уравнений, содержащих в правых частях экспоненциальные функции. Приведён метод «размножения» разрешимых случаев исходного дифференциального уравнения: если при некоторых параметрах исходное уравнение интегрируется, то интегрируются также все уравнения его орбиты, причём их решения выражаются через те же функции, что и решение исходного уравнения.

Рассмотрены примеры, иллюстрирующие получение точных решений уравнений, содержащих экспоненциальные функции, через решение исходного дифференциального уравнения.

В дальнейшем можно в (12) рассмотреть e^{kx} вместо e^{x}, а также расширить дискретную группу 36-го порядка для интегрируемых подклассов класса уравнений (12).

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Сообщество рецензентов Международного научно-исследовательского журнала

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.177.7

Conflict of Interest

None declared.

Review

International Research Journal Reviewers Community

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.177.7

Список литературы / References

1. Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. — М.: Наука, 1993. — 464 с.
2. Хакимова З.Н. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений / З.Н. Хакимова, О.В. Зайцев // Актуальные вопросы современной науки. — СПб., 2014. — №3. — С. 3-11.
3. Хакимова З.Н. Интегрирование дискретных инвариантов в классе полиномиальных дифференциальных уравнений 2-го класса / З.Н. Хакимова // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. — СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2014. — С. 8-16.
4. Зайцев О.В. О дискретных симметриях и новых разрешимых случаях в классе полиномиальных дифференциальных уравнений / О.В. Зайцев // Наука XXI века: новый подход: материалы IX молодежной международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — СПб.: Открытие, 2014. — С. 8-16.
5. Зайцев В.Ф. Об одном применении метода вложения / В.Ф. Зайцев, О.В. Зайцев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2015». — СПб.: РГПУ, 2014. — С. 30-33.
6. Хакимова З.Н. Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев / З.Н. Хакимова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2017». — СПб.: РГПУ, 2017. — С. 112-117.
7. Линчук Л.В. Параметрические полиномиальные решения одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка / Л.В. Линчук // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2018». — СПб.: РГПУ, 2018. — С. 85-90.
8. Зайцев В.Ф. Дифференциальные уравнения (структурная теория): учебное пособие для вузов / В.Ф. Зайцев, Л.В. Линчук, А.В. Флегонтов. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 500 с.
9. Хакимова З.Н. О дискретных симметриях уравнения свободных незатухающих колебаний маятника / З.Н. Хакимова, К.В. Грешневиков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2023». — СПб.: РГПУ, 2023. — С. 254-258.
10. Хакимова З.Н. О группах диэдра для уравнения колебаний маятника / З.Н. Хакимова, Д.С. Вавилов, К.В. Грешневиков // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Секция: Дифференциальные уравнения и их приложения. — Воронеж, 2023. — С. 130-134.
11. Хакимова З.Н. О дискретной группе 36-го порядка для мультипликативного класса дифференциальных уравнений 2-го порядка / З.Н. Хакимова, Л.Н. Тимофеева, А.А. Атоян // Международный научно-исследовательский журнал. — 2024. — № 2 (140).
12. Coxeter H.S.M. Generators and Relations for Discrete Groups / H.S.M. Coxeter, W.O. J. Moser. — New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1972. — 164 p.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
14. Polyanin A.D. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. — London, 2018. — 1496 p.
15. Полянин А.Д. Точные решения дифференциальных, интегральных, функциональных и других математических уравнений / А.Д. Полянин. — М.: ИПМех РАН, 2023. — 600 с.
16. Зайцев В.Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: справочник для вузов / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. — Москва: Юрайт, 2024. — 385 с.
17. Зайцев В.Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: справочник для вузов / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. — Москва: Юрайт, 2024. — 196 с.
18. Полянин А.Д. Лекции по нелинейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. — М.: ИПМех РАН, 2023. — 256 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Zajcev V.F. Spravochnik po nelinejnym differencial'nym uravnenijam. Prilozhenija v mehanike, tochnye reshenija [Handbook of nonlinear differential equations. Applications in mechanics, exact solutions] / V.F. Zajcev, A.D. Poljanin. — M.: Nauka, 1993. — 464 p. [in Russian]

2. Hakimova Z.N. Klassifikacija novyh razreshimyh sluchaev v klasse polinomial'nyh differencial'nyh uravnenij [Classification of new solvable cases in the class of polynomial differential equations] / Z.N. Hakimova, O.V. Zajcev // Aktual'nye voprosy sovremennoj nauki [Topical issues of modern science]. — SPb., 2014. — №3. — P. 3-11. [in Russian]

3. Hakimova Z.N. Integrirovanie diskretnyh invariantov v klasse polinomial'nyh differencial'nyh uravnenij 2-go klassa [Integration of discrete invariants in the class of polynomial differential equations of the 2nd class] / Z.N. Hakimova // Trudy Voenno-kosmicheskoj akademii im. A.F. Mozhajskogo [Proceedings of the A.F. Mozhaisky Military Space Academy]. — SPb.: A.F. Mozhaisky Military Space Academy, 2014. — P. 8-16. [in Russian]

4. Zajcev O.V. O diskretnyh simmetrijah i novyh razreshimyh sluchajah v klasse polinomial'nyh differencial'nyh uravnenij [On discrete symmetries and new solvable cases in the class of polynomial differential equations] / O.V. Zajcev // Nauka XXI veka: novyj podhod: materialy IX molodezhnoj mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii studentov, aspirantov i molodyh uchenyh [Science of the XXI century: a new approach: Proceedings of the IX Youth International Scientific and Practical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists]. — SPb.: Otkrytie, 2014. — P. 8-16. [in Russian]

5. Zajcev V.F. Ob odnom primenenii metoda vlozhenija [On one application of the embedding method] / V.F. Zajcev, O.V. Zajcev // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija: materialy nauchnoj konferencii «Gercenovskie chtenija — 2015» [Some topical problems of modern mathematics and mathematical education: proceedings of the scientific conference "Herzen Readings – 2015"]. — SPb.: RSGPU, 2014. — P. 30-33. [in Russian]

6. Hakimova Z.N. Vybor klassa differencial'nyh uravnenij dlja nahozhdenija novyh razreshimyh sluchaev [Choice of a class of differential equations for finding new solvable cases] / Z.N. Hakimova // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija: materialy nauchnoj konferencii «Gercenovskie chtenija — 2017» [Some topical problems of modern mathematics and mathematical education: proceedings of the scientific conference "Herzen Readings – 2017]. — SPb.: RSPU, 2017. — P. 112-117. [in Russian]

7. Linchuk L.V. Parametricheskie polinomial'nye reshenija odnogo klassa obyknovennyh differencial'nyh uravnenij 2-go porjadka [Parametric polynomial solutions of one class of ordinary differential equations of the 2nd order] / L.V. Linchuk // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija: materialy nauchnoj konferencii «Gercenovskie chtenija — 2018» [Some topical problems of modern mathematics and mathematical education: proceedings of the scientific conference "Herzen Readings – 2018"]. — SPb.: RSPU, 2018. — P. 85-90. [in Russian]

8. Zajcev V.F. Differencial'nye uravnenija (strukturnaja teorija): uchebnoe posobie dlja vuzov [Differential equations (structural theory): textbook for universities] / V.F. Zajcev, L.V. Linchuk, A.V. Flegontov. — St. Petersburg: Lan', 2021. — 500 p. [in Russian]

9. Hakimova Z.N. O diskretnyh simmetrijah uravnenija svobodnyh nezatuhajushhih kolebanij majatnika [On discrete symmetries of the equation of free undamped oscillations of a pendulum] / Z.N. Hakimova, K.V. Greshnevikov // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovanija: materialy nauchnoj konferencii «Gercenovskie chtenija — 2023» [Some topical problems of modern mathematics and mathematical education: proceedings of the scientific conference "Herzen Readings – 2023"]. — SPb.: RSPU, 2023. — P. 254-258. [in Russian]

10. Hakimova Z.N. O gruppah dijedra dlja uravnenija kolebanij majatnika [On dihedron groups for the equation of pendulum oscillations] / Z.N. Hakimova, D.S. Vavilov, K.V. Greshnevikov // Sbornik trudov Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki, informatiki i mehaniki». Sekcija: Differencial'nye uravnenija i ih prilozhenija [Proceedings of the International Scientific Conference "Topical Problems of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics". Section: Differential equations and their applications]. — Voronezh, 2023. — P. 130-134. [in Russian]

11. Hakimova Z.N. O diskretnoj gruppe 36-go porjadka dlja mul'tiplikativnogo klassa differencial'nyh uravnenij 2-go porjadka [On the discrete group of order 36 for the multiplicative class of differential equations of the 2nd order] / Z.N. Hakimova, L.N. Timofeeva, A.A. Atojan // Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal [International Research Journal]. — 2024. — № 2 (140). [in Russian]

12. Coxeter H.S.M. Generators and Relations for Discrete Groups / H.S.M. Coxeter, W.O. J. Moser. — New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1972. — 164 p.

13. Kamke Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam [Handbook on ordinary differential equations] / Je. Kamke. — M.: Nauka, 1976. — 576 p. [in Russian]

14. Polyanin A.D. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems / A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. — London, 2018. — 1496 p.

15. Poljanin A.D. Tochnye reshenija differencial'nyh, integral'nyh, funkcional'nyh i drugih matematicheskih uravnenij [Exact solutions of differential, integral, functional and other mathematical equations] / A.D. Poljanin. — M.: IPMeh RAS, 2023. — 600 p. [in Russian]

16. Zajcev V.F. Obyknovennye differencial'nye uravnenija v 2 ch. Chast' 1: spravochnik dlja vuzov [Ordinary differential equations in 2 parts. Part 1: Reference book for universities] / V.F. Zajcev, A.D. Poljanin. — Moscow: Jurajt, 2024. — 385 p. [in Russian]

17. Zajcev V.F. Obyknovennye differencial'nye uravnenija v 2 ch. Chast' 2: spravochnik dlja vuzov [Ordinary differential equations in 2 parts. Part 2: Reference book for universities] / V.F. Zajcev, A.D. Poljanin. — Moscow: Jurajt, 2024. — 196 p. [in Russian]

18. Poljanin A.D. Lekcii po nelinejnym uravnenijam matematicheskoj fiziki [Lectures on nonlinear equations of mathematical physics] / A.D. Poljanin. — M.: IPMeh RAS, 2023. — 256 p. [in Russian]