РОБАСТНАЯ МИНИМАКСНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕЧЕТКОСТИ МАТРИЦЫ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Научная статья

Сидоров И.[1, *]
[1] ORCID : 0000-0003-4691-4855;
[1] Московский политехнический университет, Москва, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (igor8i2016[at]yandex.ru)

Аннотация

В статье рассматривается задача робастного прогнозирования и интерполяции процесса, когда ковариационные функции ошибок измерения и возмущений в процессе полностью неизвестны и принадлежат к некоторому множеству неотрицательно определенных функций. Рассматривается гарантирующая оценка, под которой понимается наилучшая оценка параметров полезного сигнала в смысле минимума среднеквадратической ошибки при наихудшем поведении ошибок измерений и возмущений с ковариационными функциями, принадлежащими множеству в условиях интервальной нечеткости в коэффициентах состояния и измерителя динамической слабо нестационарной системы с ограничениями на дисперсионную матрицу случайных процессов (ошибок измерения и возмущений) в предположении выполнимости аналогов слабой робастной теоремы В.Л. Харитонова для непрерывного случая. В зависимости от вида ограничений, т.е. характеристик множества, возникают разные подходы и методы решения задачи гарантирующего оценивания. В статье проведен обзор имеющейся литературы по вышеуказанной тематике.

Статья отличается от предшествующих публикаций тем, что в ней проведено аналитическое исследование задач прогнозирования и интерполяции при ограничении ковариационных функций ограничениями на их дисперсионные матрицы (дисперсии) в условиях интервальной нечеткости линейной динамической слабо нестационарной системы с параметрической неопределенностью задания матрицы состояния в рамках гурвицевой устойчивости (Н-устойчивости) и интервальным уравнением наблюдения. В непрерывном случае получено выражение для нечетко-интервальной весовой функции, даны уравнения, которые надо решать при ее нахождении. Оценена точность прогнозирования и интерполяции и приводится сравнение с фильтрами, полученными по методу наименьших квадратов.

Ключевые слова: робастный, минимаксный, фильтрация, линейный, нечеткость, интервальный, параметрический, слабо нестационарный, устойчивость, гурвицевость, седловая точка, субоптимальный.

ROBUST MINIMAX LINEAR EXTRAPOLATION AND INTERPOLATION OF NON-STATIONARY PROCESS UNDER CONDITIONS OF INTERVAL FUZZY STATE MATRIX OF THE SYSTEM WITH BOUNDED VARIANCE

Research article

Sidorov I.[1, *]
[1] ORCID : 0000-0003-4691-4855;
[1] Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

* Corresponding author (igor8i2016[at]yandex.ru)

Abstract

The article examines the problem of robust prediction and interpolation of a process when the covariance functions of measurement errors and disturbances in the process are completely unknown and belong to some set of non-negatively defined functions. The guaranteed estimation is studied, which means the best estimation of the parameters of the useful signal in the sense of minimum mean-square error at the worst behaviour of measurement errors and perturbations with covariance functions belonging to the set under conditions of interval fuzziness in the state and gauge coefficients of a dynamic weakly non-stationary system with restrictions on the dispersion matrix of random processes (measurement errors and perturbations) under the assumption of feasibility of analogues of the weak robust theorem of V.L. Khariton. Depending on the type of constraints, i.e., the characteristics of the set, different approaches and methods of solving the problem of guaranteed estimation arise. In this article, a review of the available literature on the above-mentioned subject is carried out.

The article differs from the previous publications in that it carries out an analytical study of prediction and interpolation problems when restricting covariance functions by constraints on their variance matrices (dispersion) under conditions of interval fuzzy linear dynamic weakly non-stationary system with parametric uncertainty of the state matrix assignment in the framework of Hurwitz stability (H-stability) and interval observation equation. In the continuous case, an expression for the fuzzy-interval weight function is derived and the equations to be solved in finding it are provided. The accuracy of prediction and interpolation is evaluated and a comparison with filters obtained by least squares method is given.

Keywords: robust, minimax, filtering, linear, fuzziness, interval, parametric, weakly nonstationary, stability, Hurwitz, saddle point, suboptimal.

Введение

Исследуемые ниже вопросы рассматриваются в рамках линейной ковариационной теории оценивания для случая, когда ковариационные функции ошибок измерения и возмущений в полезном сигнале полностью известны и принадлежат некоторому множеству (здесь и ниже – множество неотрицательно определенных функций). Под гарантирующей оценкой понимается наилучшая оценка параметров полезного сигнала в смысле минимума среднеквадратической ошибки при наихудшем поведении ошибок измерения и возмущений с ковариационными функциями, принадлежащими множеству. В зависимости от вида ограничений, т.е. характеристик множества, возникают разные подходы и методы решения задачи гарантирующего оценивания (фильтрации).

В [1] показано, что если множество ковариационных матриц ограничено, замкнуто и выпукло, то при линейной модели поведения сигналов и ошибок измерения для дискретного случая наихудшее распределение ошибок измерения является гауссовым, оптимальное решение в классе нелинейных фильтров приводит к линейной фильтрации и в этой минимаксной задаче существует седловая точка.

Аналогичный результат получен в [2]. В [3] задача отыскания фильтра при ограничении дисперсии ошибок измерения сводится к двойственной задаче, и получен алгоритм численного отыскания фильтра. В [4] ограничение задано по существу в виде ковариационной матрицы на весь процесс измерений и возмущений в целом. Близкие по постановке задачи рассмотрены также в [5], [7], [9], [11] и многих других работах. В [12] рассматривается минимаксная стационарная обработка информации для скалярного возмущения, в [13] рассматривается минимаксная стационарная обработка информации, в [16] стационарная в условиях интервальной нечеткости матрицы состояния системы с ограниченной дисперсией для скалярного возмущения, в [14] нестационарная минимаксная задача с ограничениями на дисперсионную матрицу случайных процессов (ошибок измерения и возмущений).

В данной статье рассматривается минимаксная задача в условиях робастной интервальной устойчивости в рамках H-устойчивости (гурвицевой устойчивости) в виде интервальной робастной нечеткости, присутствующей в коэффициентах состояния и измерителя динамической слабо нестационарной системы с ограничениями на дисперсионную матрицу случайных процессов (ошибок измерения и возмущений). Цель статьи – провести аналитическое исследование по совершенствованию математического моделирования нестационарных процессов с медленно меняющимися коэффициентами [15] для решения задач гарантирующего оценивания (фильтрации), имеющие прикладное значение, например, в физике в области прогнозирования движения тел (наиболее характерно для космических объектов (КО)), вычисления для которых сопряжены с флюктуационными ошибками измерений, широко известна одна из классических проблем небесной механики – задача «трех тел», в задачах обнаружения космических объектов и их сопровождению с целью поддержания необходимой точности параметров орбиты КО, в своевременном обнаружении непрогнозируемых изменений параметров движения КО в процессе статистической обработки поступающих траекторных измерений и решении задачи уточнения параметров движения КО, в цифровой обработке параметров изображений в условиях априорной неопределенности и других прикладных задачах. Полученные результаты иллюстрируются примерами. Рассмотрен непрерывный случай процессов поведения сигналов, ошибок измерения и фильтрации, где это исследование проще и нагляднее.

Постановка задачи

Задана линейная непрерывная динамическая система объект-измеритель

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{t})\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\boldsymbol{b}}_i(t)\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{i}}(t), \qquad (1)$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \tilde{C}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\boldsymbol{M}} \tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{i}}(t)\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{i}}(t) + \xi_0(t);\ t \geq 0, \qquad (2)$$

с неопределенными непрерывными по t ∈ [t_0,t_1] матрицами $\tilde{A}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{b}}_i(t)$, $\tilde{C}(t)$ и $\tilde{\boldsymbol{d}}_i(t)$ из интервалов

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{\boldsymbol{A}}(t) - \boldsymbol{A}_0(t)\right| \leq \Delta\boldsymbol{A}(t),\\
&\left|\tilde{\boldsymbol{b}}_i(t) - \boldsymbol{b}_{i0}(t)\right| \leq \Delta\boldsymbol{b}_i(t),\\
&\left|\tilde{C}(t) - \boldsymbol{C}_0(t)\right| \leq \Delta\boldsymbol{C}(t),\\
&\left|\tilde{\boldsymbol{d}}_i(t) - \boldsymbol{d}_{i0}(t)\right| \leq \Delta\boldsymbol{d}_i(t)
\end{aligned} \qquad (3)$$

или в эквивалентной записи

$$\begin{aligned}
&\underline{\boldsymbol{A}}(t) \leq \widetilde{\boldsymbol{A}}(t) \leq \overline{\boldsymbol{A}}(t),\\
&\underline{\boldsymbol{b}}_i(t) \leq \tilde{\boldsymbol{b}}_i(t) \leq \overline{\boldsymbol{b}}_i(t),\\
&\underline{\boldsymbol{C}}(t) \leq \widetilde{\boldsymbol{C}}(t) \leq \overline{\boldsymbol{C}}(t),\\
&\underline{\boldsymbol{d}}_i(t) \leq \tilde{\boldsymbol{d}}_i(t) \leq \overline{\boldsymbol{d}}_i(t),
\end{aligned} \qquad (4)$$

где $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ – полезный сигнал, $\eta_i(t)$ – возмущения в поведении сигнала, $\tilde{\boldsymbol{y}}(t)$ – измеряемый сигнал, $\xi_i(t)$ - ошибки измерений.

При каждом фиксированном t $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \in R^n$, $\tilde{\boldsymbol{y}}(t) \in R^m$, $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{i}}(t) \in R^{n_i}$, $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{i}}(t) \in R^{m_i}$.

Матрицы $\tilde{A}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{b}}(t)$, $\tilde{C}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{i}}(t)$ имеют соответствующие размерности. Пусть теперь $\boldsymbol{b}_{i0}(t)(n \times n)$ - матрица, $\tilde{A}(t)$ принимает всевозможные значения из компакта $\mathfrak{C}$ при любом t из интервала наблюдения Ω=[t1,t2]. Модули матриц и матричные неравенства в (3) и далее понимаются поэлементно. Матрицы $\mathbf{A_0}$(t),$\mathbf{b}_{i0}$(t), $\mathbf{C}_0$(t),$\mathbf{d}_{i0}$(t) и $\mathbf{\Delta A}$(t),$\mathbf{\Delta b}_i$(t),$\mathbf{\Delta C}$(t), Δ$\mathbf{d}_i$(t) составлены из серединн и полудлин интервалов (4), границами $\underline{\boldsymbol{A}}(t)$, $\overline{A}(t)$, $\underline{\boldsymbol{b}}_i(t)$, $\overline{\boldsymbol{b}}_i(t)$, $\underline{\boldsymbol{C}}(t)$, $\overline{\boldsymbol{C}}(t)$, $\underline{\boldsymbol{d}}_i(t)$, $\overline{\boldsymbol{d}}_i(t)$ интервалов служат известные непрерывные матричные функции соответствующих размерностей. Систему (1), (2) при **A**(t)=$\mathbf{A_0}$(t), $\mathbf{b}_i$(t)=$\mathbf{b}_{i0}$(t), **C**(t)=$\mathbf{C_0}$(t) и $\mathbf{d}_i$(t)=$\mathbf{d}_{i0}$(t) назовем центральной.

Предполагается, что система (1), (2) в отсутствие ошибок измерения и возмущений наблюдаема. Для стационарной системы, когда $\tilde{A}(t) = const$, $\tilde{C}(t) = const$, необходимое и достаточное условие наблюдаемости [19], [20], [21] заключается в том, что

$$\text{rang}\left[\tilde{C}; \tilde{A}^T\tilde{C}; \dots; \left(\tilde{A}^T\right)^{n-1}\tilde{C}\right] = \text{n} \quad (4.1)$$

Опираясь далее на качественную сторону теоремы Харитонова для слабо стационарных систем, будем предполагать, что центральные матрицы $\mathbf{A_0}$(t), $\mathbf{b_0}$(t), $\mathbf{d_0}$(t) постоянны, а возмущения $\mathbf{\Delta A}$(t), $\mathbf{\Delta b}_i$(t), $\mathbf{\Delta C}$(t), $\mathbf{\Delta d}_i$(t) удовлетворяют условиям типа

$$\|\Delta \boldsymbol{A}(t)\| \le \gamma, \|\Delta \boldsymbol{b}_i(t)\| \le \gamma_{b_i}, \|\Delta \boldsymbol{C}(t)\| \le \gamma_C, \|\Delta \boldsymbol{d}_i(t)\| \le \gamma_{d_i} \quad (4.2)$$

с параметрами $0 < \gamma < 1$, $0 < \gamma_{b_i} < 1$, $0 < \gamma_C < 1$, $0 < \gamma_{d_i} < 1$, обеспечивающие робастную устойчивость слабо стационарной интервальной системы (1), (2) в рамках гурвицевой устойчивости [15] на всем интервале наблюдения Ω. Здесь ‖·‖ означает некоторую матричную норму, а γ, γ_{b_i}, γ_C, γ_{d_i} – диапазоны возможных возмущений в моделях матричных неопределенностей (3). Иногда такую модель также называют структурированной матричной неопределенностью [17]. В этом робастно устойчивом смысле далее проведено исследование задач прогнозирования и интерполяции за пределами класса стационарных задач при ограничении ковариационных функций ограничениями на их дисперсионные матрицы (дисперсии).

Известно, что возмущения η_i(t), $\mathbf{i}$ = 1,…,N и ошибки измерений ξ_i(t), j = 1,…,M представляют собой среднеквадратично интегрируемые, некоррелированные случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями M[η_i(t)] = 0, M[ξ_i(t)] = 0, i = 1, …, N, j = 1, …, M. Известна корреляционная функция $\boldsymbol{K}_{\xi_0}(t)$ (t) процесса $\boldsymbol{\xi_0}$(t), t, τ∈Ω.

Относительно всех остальных процессов известно, что дисперсионные матрицы их ограничены положительно определенными матрицами, т.е.

$$\begin{gathered} M\left[\boldsymbol{\eta_k}(t)\boldsymbol{\eta_k^T}(t)\right] \le \boldsymbol{K_{\eta_i}}(t,t) \le \boldsymbol{K_{\eta_i}}(t), i = 1, \dots, N \\ M\left[\boldsymbol{\xi_k}(t)\boldsymbol{\xi_k^T}(t)\right] \le \boldsymbol{K_{\xi_i}}(t,t) \le \boldsymbol{K_{\xi_i}}(t), i = 1, \dots, M \end{gathered} \quad (4.3)$$

(Здесь неравенство A > B (A > B) для любых симметричных матриц A и B понимается в том смысле, что разность A-B является неотрицательно (положительно) определенной матрицей). Каждое из ограничений в (4.2) определяет множества $\mathfrak{R}_{\xi_1} i = 1, ..., N$, $\mathfrak{R}_{\eta_i} i = 1, ..., M$, так что $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\xi_1} \times ... \mathfrak{R}_{\xi_N} \times \mathfrak{R}_{\eta_1} \times ... \times \mathfrak{R}_{\eta_M}$ есть прямое произведение первых множеств.

По измерениям $\tilde{y}(t)$, $t \in \Omega$ оценивается скаляр $\tilde{z}(s) = q^T\tilde{x}(s)$, где q – заданный вектор-столбец q ∈ R^n. Оценка ищется в классе линейных функционалов

$$\hat{\tilde{z}}(\text{s}) = \int_\Omega \tilde{\text{h}}^T(\text{s},\text{t})\tilde{\text{y}}(\text{t})\text{dt} = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\text{h}}^\text{T}(\text{s},\text{t})\tilde{\text{y}}(\text{t})\text{dt} \quad (5)$$

При s∈Ω решается задача интерполяции при $t_1 \le s \le t_2$, при s∉Ω задача экстраполяции или прогнозирования ($s > t_2$). Точности этих последних задач одинаковы.

Поэтому ограничимся только прогнозом. Пусть $\tilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau)$ – фундаментальная матрица системы

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \tilde{\boldsymbol{A}}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}(t).$$

Предположим, что априорное значение фазового вектора $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ в любой момент времени t неизвестно. Поэтому оценка $\hat{z}(s)$ должна быть несмещенной [2], т.е.

$$\int_\Omega \tilde{h}^T(s,t)\tilde{c}^T(t)\widetilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau)dt = q^T\widetilde{\boldsymbol{W}}(s,\tau) \quad (6)$$

В силу наблюдаемости $\tilde{x}(t)$ множество функций $\tilde{h}^T(s,t)$, удовлетворяющих (6), не пусто. Множество весовых функций $\tilde{h}^T(s,t)$, удовлетворяющих условию (6), обозначим как λ(s),

А фундаментальную матрицу центральной системы

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_0(t)\boldsymbol{x}(t)$$

через $\mathbf{W}_0$(t, τ).

Очевидно матричное неравенство

$$|A(t)| = |A_0(t) + (A(t) - A_0(t))| \le |A_0(t)| + \Delta A(t). \quad (7)$$

Оценим максимальные отклонения от фундаментальной матрицы центральной системы $\left|\widetilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau) - \boldsymbol{W}_0(t,\tau)\right|$ по всем допустимым $\widetilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau)$ не превосходящие $\Delta\widetilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau)$ с учетом равномерного уменьшения норм матриц Δ$\mathbf{A}$(t),$\mathbf{\Delta b}_i$(t),$\mathbf{\Delta C}$(t), Δ$\mathbf{d}_i$(t) на отрезке Ω.

Используя (7) совместно с матричными экспонентами для описания пучка траекторий слабо стационарных интервальных однородных систем, можно получить оценки искомых отклонений со стационарными границами интервалов ($\mathbf{A}_0$(t) = $\mathbf{A}_0$, Δ$\mathbf{A}$(t) = Δ$\mathbf{A}$) в виде

$$\left|\widetilde{\boldsymbol{W}}(t-\tau) - \boldsymbol{W}_0(t-\tau)\right| = \left|e^{(T-\tau)A} - e^{(T-\tau)A_0}\right| \le e^{(T-\tau)(|A_0|+\Delta A)} - e^{(T-\tau)|A_0|} \quad (8)$$

Последнее означает, что оценка (8) уменьшается, когда норма матрицы $e^{(T-\tau)(|A_0|+\Delta A)} - e^{(T-\tau)|A_0|}$ $\left\|e^{(T-\tau)(|A_0|+\Delta A)} - e^{(T-\tau)|A_0|}\right\| = \text{O}(\|\Delta A\|) = \text{O}(\gamma)$ равномерно на t∈Ω убывает, т.е. $\|\Delta\tilde{h}(s,t)\| = O(\gamma)$.

Аналогичное поведение в оценках отклонений наблюдается и в нестационарном случае, когда $\|\Delta\mathbf{A}(t)\|\to 0$. Итак, для стационарного случая имеем оценку

$$\|\Delta\widetilde{\boldsymbol{W}}(t-\tau)\| = \left\|e^{(t-\tau)(|A_0|+\Delta A)} - e^{(t-\tau)|A_0|}\right\| = \mathrm{O}(\|\Delta\boldsymbol{A}\|) = \mathrm{O}(\gamma) \quad (9)$$

Можно показать [16], что для неоднородных слабо стационарных систем характер изменения искомых оценок в отклонениях фундаментальной матрицы системы (1), (2) не меняется, когда матричные нормы в отклонениях удовлетворяют условиям типа (4b). С учетом полученного вывода можно доказать, что характер изменения в отклонениях весовой функции минимаксного фильтра от номинального или центрального фильтра имеет аналогичное поведение с учетом условия несмещенности (6).

Если ввести относительную матричную невязку по максимальным отклонениям в фундаментальной матрице системы (1),(2) в виде $\frac{\Delta\widetilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau)}{\widetilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau)}$ и взять ее верхнюю оценку по матричной норме $\left\|\frac{\Delta\widetilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau)}{\widetilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau)}\right\| \le \gamma_W$, где $0<\gamma_W<1$, то получим изменение по матричной норме для искомой весовой функции минимаксного экстраполятора от номинального фильтра в прежнем виде $\|\Delta\tilde{h}(s,t)\| = O(\gamma_W)$. С учетом сделанной оценки справедливо соотношение

$$\tilde{h}(s,t) + \Delta\tilde{h}(s,t) = \tilde{h}(s,t)(1+\alpha),\ 0<\alpha<1. \quad (10)$$

С учетом (6), меняя порядок интегрирования при вычислении влияния возмущения, получим то, что дисперсия ошибки оценивания $\tilde{z}(s)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} D_{\tilde{z}}(s) = \int_\Omega\int_\Omega \tilde{h}^T(s,t)K_{\xi_0}(t,\tau)\tilde{h}(s,t)dtd\tau + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\int_\Omega \tilde{p}_i^T(s,t)K_{\eta_i}(t,\tau)\tilde{p}_i(s,t)dtd\tau + \\ + \sum_{i=1}^{M}\int_\Omega\int_\Omega \tilde{q}_i^T(s,t)K_{\xi_i}(t,\tau)\tilde{q}_i(s,t)dtd\tau \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i^T(s,t) = \left[\int_t^{t_2} \tilde{h}(s,t)\tilde{c}(\tau)\tilde{W}(\tau,t)d\tau - q^T\tilde{W}(\tau,t)1(t-\tau)\right]\tilde{b}_i(t), \\ \tilde{q}_i^T(s,t) = \tilde{h}(s,t)\tilde{d}_i(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $1(\tau) = \begin{cases} 1 \text{ при} & \tau > 0, \\ 0 \text{ при} & \tau \le 0. \end{cases}$

Таким образом, дисперсия ошибки оценивания $\tilde{z}(s)$ есть функционал от весовой функции $\tilde{h}(s,t) \in \tilde{\lambda}(s)$ и корреляционных функций

$$\boldsymbol{K}(t,t) = [\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\eta}_i}(t,t),\ \boldsymbol{K}_{\xi_j}(t,t),\ i=1,\dots,N\ j=1,\dots,M] \in \mathfrak{R}$$

т. е.

$$D_{\tilde{z}}(s) = D_{\tilde{z}}(\tilde{h}(s,t), K(t,t))$$

Оптимальная гарантирующая оценка $\tilde{z}_0(s)$ находится минимизацией наибольшего значения дисперсии $D_{\tilde{z}}(s)$ для наихудшего поведения возмущений и неопределенных ошибок измерения в рамках ограничений, т.е.

$$D_{\tilde{z}_0}(s) = \inf_{\tilde{h}(s,\tau)\in\lambda(s)} \sup_{K(t,\tau)\in\mathfrak{R}} \mathrm{D}_{\tilde{z}}(\tilde{\mathrm{h}}(\mathrm{s},\mathrm{t}), \mathrm{K}(\mathrm{t},\tau), \mathrm{t},\tau\in\Omega). \quad (13)$$

В дальнейшем предположим, что составляющая ошибок с известной корреляционной функцией представляет собой “белый шум”, т.е.

$$K_{\xi_0}(t,\tau) = G_{\hat{0}}(t)\sigma(t-\tau) \quad (14)$$

где $G_{\hat{0}}(t)$ – известная неособенная (положительно определенная) матрица интенсивности “белого шума”.

Приведенная постановка задачи характерна, в частности, для задач определения движения космического объекта, самолета по радиолокационным либо оптическим измерениям. Здесь флюктуационные (шумовые) ошибки измерений носят характер “белого шума”. Остальные составляющие ошибок и возмущений носят неопределенный характер – известна их дисперсия или в более общем случае дисперсионная матрица, т.е. эллипсоид, содержащий эти ошибки при фиксированном уровне доверительной информации α=0,1.

Общее решение задачи

Начнем решение задачи с внутренней максимизации выражения (5) для дисперсии ошибок фильтрации. Для этого нам понадобится следующая теорема [14].

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{\xi}(t)$ – случайный (в общем случае векторный) процесс. На множестве случайных функций $\boldsymbol{\xi}(t), t\in\Omega$ определен линейный функционал

$$z = \int_\Omega \boldsymbol{g}^T(t)\boldsymbol{\xi}(t)dt$$

Относительно процесса $\boldsymbol{\xi}(t)$ известно, что его дисперсионная матрица ограничена, т.е. множество $\mathfrak{R}$ его ковариационных функций определяется неравенством

$$M[\boldsymbol{\xi}(t)\boldsymbol{\xi}^T(t)] = \boldsymbol{K}(t,t) \le K(t),$$

K(t) – положительно определенная матрица для любого $t\in\mathfrak{R}$.

Имеет место оценка дисперсии оценивания

$$\sup_{K(t,\tau)\in\Re} \mathrm{D}_{\dot z} = \left[\int_\Omega \sqrt{\mathrm{g}^T(\mathrm{t})\mathrm{K}(t)\mathrm{g}(\mathrm{t})}\right]^2 \quad (15)$$

При этом точная верхняя грань достигается на процессе вида $\boldsymbol{\xi}(t)=\mu\boldsymbol{\varphi}(t)$, где μ – случайная величина: $M[\mu]=0, M[\mu^2]=1$, $\boldsymbol{\varphi}(t)$ – детерминированная векторная функция

такая, что

$$\boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\varphi}(t) \le 1, \quad (16)$$

т.е. $\mathbf{K}(t,t)=\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}^T(t)$.

Там, где g(t) = 0 в (16) имеет место знак равенства и

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \frac{\boldsymbol{K}(t,t)\boldsymbol{g}(t)}{\sqrt{\boldsymbol{g}^T(t,t)\boldsymbol{K}(t,t)\boldsymbol{g}(t,t)}} \quad (17)$$

Доказательство теоремы приведено в [14].

Множество функций $\boldsymbol{\varphi}(t)$, на которых достигается экстремум, очевидно является выпуклым, ограниченным и замкнутым в нормированном пространстве с нормой

$$||\varphi(t)|| = sup_{t\in\Omega}\sqrt{\boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{\varphi}(t)}.$$

Согласно теореме 1 максимальное значение дисперсии оценивания в (5) при фиксированной весовой функции $\tilde h(s,t)$ принимает вид:

$$\sup_{K(t,\tau)\in\Re} \mathrm{D}_{\tilde z} = \int_\Omega \tilde h(s,t)\tilde G_{\hat 0}^{-1}(t)\tilde h(s,t)dt + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left[\sqrt{\tilde{\boldsymbol{p}}_i^T(s,\tau)\boldsymbol{K}_{\eta_i}(t,\tau)\tilde{\boldsymbol{p}}_i(s,\tau)}d\tau\right]^2 + $$
$$+\sum_{i=1}^{M}\int_\Omega\left[\sqrt{\tilde q_i^T(s,\tau)\boldsymbol{K}_{\xi_i}(t,\tau)\tilde q_i(s,\tau)}d\tau\right]^2. \quad (18)$$

При этом максимизирующие возмущения можно записать в виде квазидетерминированных случайных процессов

$$\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\varphi}_i(\tau)\mu_i, \quad \mathrm{i} = 1,\ldots,N$$
$$\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{\Psi}_i(\tau)v_i, \quad \mathrm{i} = 1,\ldots,M$$

где случайные величины μ_i,ν_i не коррелированы между собой и

$$M[\eta_i] = M[\nu_j] = 0, M[\eta_i^2] = M[\nu_j^2] = 1,\ i = 1,...,N,\ j = 1,...,M.$$

Неслучайные функции $\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ и $\boldsymbol{\psi}_i(t)$ ограничены:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T(t)\mathrm{K}_{\eta_i}^{-1}\boldsymbol{\varphi}_i(t) \le 1,$$
$$\boldsymbol{\psi}_j^T(t)\mathrm{K}_{\xi_j}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_j(t) \le 1. \quad (19)$$

При этом имеет место знак равенства там, где $\tilde{\boldsymbol{p}}_i(s,\tau) \ne 0,\ \tilde{\boldsymbol{q}}_i(s,\tau) \ne 0$:

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \int_\Omega \left(\frac{1}{(1+\gamma)t}\right)\varphi(t)dt \quad (20)$$

Из (1) и представления случайных функций следует, что полезный сигнал можно записать в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{W}}(t,t_1)\,\boldsymbol{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t}\widetilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau)\sum_{i=1}^{N}\widetilde{\boldsymbol{b}}_i(\tau)\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)\mu_i d\tau$$

Введем матрицы

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}^T(t) = \int_{t_1}^{t}\widetilde{\boldsymbol{W}}(t,\tau)\left(\widetilde{\boldsymbol{b}}_1(\tau)\boldsymbol{\varphi}_1(\tau),\ldots,\widetilde{\boldsymbol{b}}_N(\tau)\boldsymbol{\varphi}_N(\tau)\right)d\tau,\ \boldsymbol{\mu}^T = (\mu_1,\ldots,\mu_N) \quad (21)$$

Тогда измеряемый сигнал принимает вид

$$\tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) = \tilde{\boldsymbol{c}}^T\tilde{\boldsymbol{W}}(\mathrm{t},\mathrm{t}_1)\,\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{t}_1) + \tilde{\boldsymbol{c}}^T\tilde{\boldsymbol{B}}(\mathrm{t})\boldsymbol{\mu} + \tilde{\boldsymbol{D}}^T(\mathrm{t})\boldsymbol{\nu} + \xi_0(\mathrm{t}), \quad (22)$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{D}}^T(\mathrm{t}) = \left(\tilde{\boldsymbol{d}}_1(\tau)\Psi_1(\tau),\ldots,\tilde{\boldsymbol{d}}_M\Psi_M(\tau)\right)$$
$$\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}} = (\nu_1,\ldots,\nu_M) \quad (23)$$

Таким образом, задача минимизации сводится к совместной оценке параметров $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_1)$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$.

Введем еще более краткую запись:

$$\tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{t}) = \tilde{\boldsymbol{c}}^T\tilde{\boldsymbol{W}}(\mathrm{t},\mathrm{t}_1)\,\tilde{\boldsymbol{x}}(\mathrm{t}_1) + \boldsymbol{F}^T(\mathrm{t})\lambda + \xi_0(\mathrm{t}), \quad (24)$$

где

$$\lambda^T = \left(\boldsymbol{\mu}^T,\boldsymbol{\nu}^T\right), \tilde{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t}) = \left(\tilde{\boldsymbol{c}}^T(\mathrm{t})\tilde{\boldsymbol{B}}^T(\mathrm{t}), \tilde{\boldsymbol{D}}^T(\mathrm{t})\right).$$

Обозначим также $\tilde{\boldsymbol{F}}_0^T(t) = (\tilde{\boldsymbol{B}}^T(t), 0)$.

Имеет место:

Теорема 2. Минимизирующая весовая функция имеет вид:

$$\tilde{h}(s,\tau) = \boldsymbol{q}^T\tilde{\boldsymbol{W}}\,(s,t_1)\,\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{W}}^T\,(s,t_1)\,\tilde{\boldsymbol{c}}(\tau)\tilde{G}_{\hat{0}}^{-1}(\tau) +$$
$$+\boldsymbol{q}^T\left[\tilde{\boldsymbol{W}}\,(s,t_1)\,\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\boldsymbol{F}}_0^T(s)\right]\tilde{\Delta}^{-1}\left[\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{W}}^T\,(\tau,t_1)\,\tilde{\boldsymbol{c}}(\tau) - \tilde{\boldsymbol{F}}(\tau)\right]\tilde{G}_{\hat{0}}^{-1}(\tau) \qquad (25)$$

Дисперсия ошибки оценивания $\tilde{z}(s) = q^T\tilde{x}(s)$ имеет вид:

$$\mathrm{D}_{\tilde{z}_0}(s) = \boldsymbol{q}^T\tilde{\boldsymbol{W}}\,(s,t_1)\,\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{W}}^T\,(s,t_1)\,\boldsymbol{q} +$$
$$+\boldsymbol{q}^T\left[\tilde{\boldsymbol{W}}\,(s,t_1)\,\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}} - \tilde{\boldsymbol{F}}_0^T(s)\right]\tilde{\Delta}^{-1}\left[\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{W}}^T\,(s,t_1) - \tilde{\boldsymbol{F}}_0(s)\right]\boldsymbol{q}. \qquad (26)$$

Здесь введены обозначения:

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{W}}^T\,(\tau,t_1)\,\tilde{\boldsymbol{c}}(\tau)\tilde{G}_{\hat{0}}^{-1}(\tau)\tilde{\boldsymbol{c}}^T(\tau)\tilde{\boldsymbol{W}}\,(\tau,t_1)\,d\tau$$
$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{W}}^T\,(\tau,t_1)\,\tilde{\boldsymbol{c}}(\tau)\tilde{G}_{\hat{0}}^{-1}(\tau)\tilde{\boldsymbol{F}}(\mathrm{t})dt \qquad (27)$$
$$\boldsymbol{\theta} = \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{F}}(\mathrm{t})\tilde{G}_{\hat{0}}^{-1}(\tau)\tilde{\boldsymbol{F}}^T(\mathrm{t})dt + \boldsymbol{E}$$

$\tilde{\boldsymbol{\Delta}} = \theta - \tilde{\boldsymbol{u}}^T\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{E}$, **E**– единичная матрица размера N +M.

Доказательство этой теоремы приведено в Приложении.

Выражения (26), (27) вместе с выражениями (20), (21), (23), (24) и (27) полностью описывают искомый робастный фильтр и гарантированное качество фильтрации. При этом надо иметь в виду следующее. На множествах $\Omega_{\mu_{i0}} \subset \Omega$, $\Omega_{\xi_{i0}} \subset \Omega$ там, где соответственно $\tilde{\boldsymbol{p}}_i(s,\tau) = 0$ и $\tilde{\boldsymbol{q}}_i(s,\tau) = 0$ определяется вид функций **φ**ᵢ(τ) и **ψ**ᵢ(τ) таких, что в неравенствах (19) имеет место знак строгого неравенства. Эти множества характеризуют те интервалы измеряемой информации, которая не используется (отбраковывается) в фильтре. Это цена за недостаточно полное априорное описание неопределенных ошибок и возмущений. Если существует решение указанных уравнений для $\tilde{h}(s,\tau)$ и функций $\boldsymbol{\varphi}_i(\tau)$, $\boldsymbol{\psi}_i(\tau)$, то существует и робастная в указанном выше нечетко - интервальном смысле седловая точка. Отметим, что критерий качества является квадратичным по робастной весовой функции и линейным по корреляционной функции возмущений.

Пример

Рассмотрим простейший случай, часто встречающийся на практике, когда на интервале наблюдения $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ измеряемый процесс изменяется по линейному закону $\tilde{x}(t) = x_0 + x(1+\gamma)t$, 0<γ<1, т.е. $\ddot{\tilde{x}}(t) = u$. Интервальная нечеткость модели задается параметром нечеткости $\ddot{\tilde{x}}(t) = u$. Ошибка измерений содержит флюктуационную ошибку (“белый шум” с матрицей интенсивности $\tilde{G}_{\hat{0}}$) и неопределенную ошибку с дисперсией, ограниченной $\tau^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}$.

Здесь $\tilde{\boldsymbol{W}} = \begin{pmatrix} 1 & (1+\gamma)(\mathrm{t}-\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{c} = \mathrm{q} = \binom{1}{0}$, $\tilde{\mathrm{V}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T^3} \end{pmatrix}$,

Из (25) следует выражение для оптимальной весовой функции:

$$\tilde{\boldsymbol{h}}(s,\tau) = \tilde{\boldsymbol{H}}(s)\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{H}}(\tau) + \frac{1}{\tilde{\Delta}}\tilde{\boldsymbol{H}}^T(s)\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}}\left[\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{H}}(s) - \varphi(\tau)\right], \qquad (23)$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \int_\Omega \binom{1}{(1+\gamma)t}\varphi(t)dt\ ,\ \ \tilde{\boldsymbol{H}}(\mathrm{t}) = \binom{1}{(1+\gamma)t}\ ,\ \ \tilde{\Delta} = \frac{G_{\hat{0}}}{D_\eta} + \int_\Omega \varphi^2(t)dt - \tilde{\boldsymbol{u}}^T\tilde{\boldsymbol{V}}\tilde{\boldsymbol{u}}$$
$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } \mathrm{t} > \frac{T}{2} - \tau_{\hat{e}}, \\ 1 + \beta\left(\mathrm{t} - \frac{T}{2} + \tau_{\hat{e}}\right) \text{ при } \mathrm{t} < \frac{T}{2} - \tau_{\hat{e}} \end{cases}$$

$\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{H}}(s) = 1$ где $\tau_{\hat{e}}$ – интервал используемой информации. Так как $|\varphi(t)| \le 1$, $\beta \le \frac{2}{T-\tau_{\text{к}}}$.

где $\alpha = \frac{\tau_{\text{к}}-\tau_{\text{н}}}{T-\tau_{\text{к}}-\tau_{\text{н}}}$, $\beta = \frac{2}{T-\tau_{\text{к}}-\tau_{\text{н}}}$, $\tau_{\text{к}}$ и $\tau_{\text{н}}$ – интервалы используемой информации соответственно в конце и начале интервала обработки. В середине интервала информация не используется.

Рассмотрим I случай.

Здесь $\tilde{\boldsymbol{u}} = \binom{(1+\gamma)T}{0}$, $\tilde{\boldsymbol{u}}\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{H}}(s) = 1$ и весовая функция такая же, как и при отсутствии неопределенных ошибок (независимо от их величин)

$$\tilde{\mathrm{h}}(s,\tau) = \frac{1}{T}\left[1 + \frac{12s\tau}{T^2}(1+\gamma)^2\right]$$

Поскольку φ(t)=1, то должно быть $\tilde{\boldsymbol{h}}(s,\tau) > 0$ для всех $\tau \in \left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$.

А это возможно, если $1 - 6\frac{|s|}{T} \le 0$ и, следовательно, время экстраполяции относительно середины интервала обработки $|s| \le \frac{T}{6}$. Это решение задачи интерполяции для третьей части всего интервала обработки.

Рассмотрев второй и третий случаи можно сделать вывод [14], что решение задачи интерполяции и прогнозирования в зависимости от соотношения ошибок в измерениях реализует все возможные ситуации. Возможно отбрасывание информации, как в конце наблюдения, так и в середине интервала. Интересно провести сравнение по гарантированной точности оценивания с робастным фильтром, настроенным только на флюктуационные ошибки, каковым является фильтр, полученный по методу наименьших квадратов в традиционном толковании. Поведение функций и $\boldsymbol{h}(s,\tau)$ при заданном параметре интервале нечеткости $\tilde{\gamma} = 1,2$ показано на рисунке 1 при $s > T$.

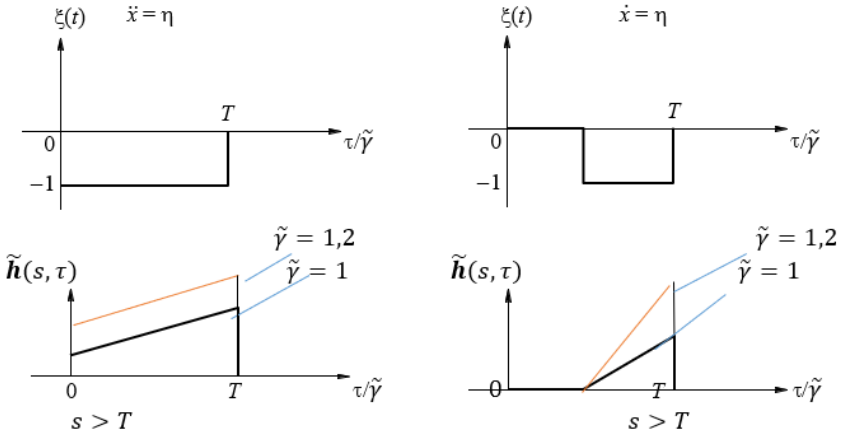

Рисунок 1 - Возможные случаи поведения весовой функции h˜(s,τ) при заданном параметре интервальной нечеткости γ ≅1,2 и γ ≅1

Оптимальный робастный минимаксный фильтр дает дисперсию

$$\tilde{D}_0 = \frac{G_{\hat{0}}}{T}\left(1 + 12(\alpha\tilde{\gamma})^2 + \frac{\left(\tilde{\boldsymbol{H}}^T\tilde{\boldsymbol{V}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{u}}\right)^2}{\tilde{\Delta}}\right), \alpha = \frac{s}{T}, \tilde{\gamma} = 1 + \gamma.$$

Фильтр, настроенный только на флюктуационные ошибки, имеет вид

$$\tilde{\boldsymbol{h}}(s,\tau) = \frac{1}{T}\left[1 + \frac{12s\tau}{T^2}\tilde{\gamma}^2\right]$$

и дает дисперсию суммарных ошибок

$$\tilde{D}_0 = \frac{G_{\hat{0}}}{T}\left(1 + 12(\alpha\tilde{\gamma})^2 + \frac{1}{\chi T}\left(3\alpha\tilde{\gamma} + \frac{1}{12\alpha\tilde{\gamma}}\right)^2\right).$$

При $\alpha\tilde{\gamma} \le \frac{1}{6}$ минимаксная интерполяция не дает выигрыша. Предельный выигрыш получается χ=0 (отсутствии флюктуационных ошибок) [8] и имеет вид

$$\frac{\sigma_\Sigma}{\sigma_0} = \begin{cases} 3\alpha\tilde{\gamma} + \frac{1}{12\alpha\tilde{\gamma}}, & \text{если} \quad \frac{1}{2} \ge \alpha\tilde{\gamma} \ge \frac{1}{6}, \\ 1,5 + \frac{1}{24(\alpha\tilde{\gamma})^2}, & \text{если} \quad \alpha\tilde{\gamma} \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Наибольший выигрыш получается при оценке полезного сигнала в конце наблюдения $\alpha\tilde{\gamma} = \frac{s}{T} = \frac{1}{2}$ равен $\frac{5}{3} = 1,67$. Все случаи поведения $\tilde{\boldsymbol{h}}(s,\tau)$, $\boldsymbol{h}(s,\tau)$ и $\xi(t)$ изображены на рисунке 1 в масштабе времени $\tau/\tilde{\gamma}$.

Пример

В качестве сравнения приведем также пример, позволяющий сравнить фильтры для устойчивой и неустойчивой слабостационарной системы первого порядка с заданной степенью устойчивости η. Рассмотрим случай неустойчивой системы первого порядка со степенью устойчивости η, измеряемый сигнал которой содержит неопределенную ошибку с дисперсией, ограниченной $D_\xi \le \sigma^2$ и спектральной плотностью $\tau^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}$. О корреляционной функции возмущения u(t) известно лишь ограничение на его дисперсию $Mu^2 \le a_u$ т. е.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (\tilde{a} + \eta)\tilde{x} + u(t), \tilde{a} > \tilde{0}, \eta > 0,$$

$$\tilde{y}(\tau) = \tilde{x}(t) + \xi(t).$$

и быть может ограничение на область сосредоточения его спектральной плотности h(λ)=0 при λ∈Λ, Λ – заданное подмножество оси частот. Допущения (46) обеспечивают переход системы фильтрации (уравнения (25), (26)) в стационарный режим. Обозначим $(\tilde{a} + \eta) = \tilde{a}_\eta$. Введем обозначение

$$\tilde{X}_u(\lambda) = 1 + \left|\boldsymbol{C}_0^T\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{A}}}_{\boldsymbol{\eta}}^{-1}\boldsymbol{b}_0\right|\frac{h(\lambda)}{\tau^2},$$

где $\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{A}}}_{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta I} + \tilde{\boldsymbol{A}}$ матричная функция, порожденная нечетко-интервальной скалярной функцией $\tilde{a} + \eta$, где $\tilde{a}$ – заданное нечеткое число, $\mathbf{C_0}$, $\mathbf{b_0}$ - постоянные матрицы центральной системы (1), (2). Можно показать [13, С.176], что в этом случае уравнение для нахождения $\tilde{X}_u(\lambda)$ независимо от знака $\tilde{a}$ принимает вид

$$\tilde{\gamma}\tilde{X}_u = \frac{1}{(\lambda-\eta)^2 + \tilde{a}_\eta^2},$$

где $\tilde{\gamma} = \frac{1}{(\tilde{\lambda}_{\Gamma} - \eta)^2 + \tilde{a}_\eta^2}$, $\tilde{\lambda}_2 = \sqrt[3]{\frac{3a_u}{\tau^2}} + \eta$.

Корреляционный момент $\tilde{K}_{xx}$ (отнесенный к τ^2) удовлетворяет уравнению

$$\tilde{K}_{xx} = 2\left|\tilde{a}_\eta\right| + \frac{2}{\pi}\left(\tilde{\lambda}_\Gamma - \tilde{a}_\eta \operatorname{arctg}\frac{\tilde{\lambda}_\Gamma}{\tilde{a}_\eta}\right)$$

Частотная характеристика минимаксного робастно устойчивого интервального фильтра для $\tilde{a} < 0$ имеет вид

$$\tilde{G}(\lambda) = 1 - \frac{1}{\tilde{X}_u^+(\lambda)},$$

а для $\tilde{a} > 0$ -

$$\tilde{G}(\lambda) = 1 - \frac{1}{\tilde{X}_u^+(\lambda)} \cdot \frac{i(\lambda - \eta) - \tilde{a}_\eta}{i(\lambda - \eta) + \tilde{a}_\eta} ,$$

где

$$\tilde{X}_u^+(\lambda) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\tilde{\lambda}_\Gamma}^{\tilde{\lambda}_\Gamma} \ln\left(\frac{\tilde{\lambda}_\Gamma^2}{\lambda_\Gamma^2}\right)\frac{d\lambda_1}{\lambda - \lambda_1}\right].$$

Субоптимальный робастный минимаксный фильтр, получающийся при $\lambda \to \infty$ в обоих случаях имеет частотную характеристику

$$\tilde{G}(\lambda) = 1 - \frac{\tilde{K}_{xx}}{\left(i\lambda - \tilde{a}_\eta + \tilde{K}_{xx}\right)}.$$

При этом проигрыш по отношению к среднеквадратическим не превышает 10%.

При малых $\lambda \to 0$ для устойчивой системы интервал неопределенности в оценке корреляционноцй функции $\tilde{K}_{xx}$ увеличивается приблизительно на η.

Это обстоятельство важно для практической реализации фильтра, решающего многокритериальную задачу.

Заключение

Представленная работа посвящена вопросу робастного прогнозирования и интерполяции процесса, когда ковариационные функции ошибок измерения и возмущений в процессе полностью неизвестны и принадлежат к некоторому множеству $\mathfrak{R}$ неотрицательно определенных функций в условиях робастной интервальной устойчивости в рамках Н-устойчивости (гурвицевой устойчивости) в виде интервальной нечеткости присутствующей в коэффициентах состояния и измерителя динамической слабо нестационарной системы с ограничениями на дисперсионную матрицу случайных процессов (ошибок измерения и возмущений). В предположении выполнимости аналогов слабой робастной теоремы В.Л. Харитонова для непрерывного случая [15] получены робастно устойчивые слабо стационарные оценки весовых функций минимаксного робастного устойчивого фильтра для задач прогнозирования и интерполяции в смысле минимума среднеквадратической ошибки при наихудшем поведении ошибок измерений и возмущений с ковариационными функциями, принадлежащими множеству $\mathfrak{R}$ неотрицательно определенных функций в условиях интервальной нечеткости в коэффициентах состояния и измерителя динамической слабо нестационарной системы с ограничениями на дисперсионную матрицу случайных процессов (ошибок измерения и возмущений) для несмещенной оценки искомых параметров полезного сигнала. При этом в работе получены оценки наибольшего значения дисперсии линейного функционала для оценок параметров полезного сигнала при наихудшем поведении возмущений и неопределенных ошибок измерения в рамках предполагаемых ограничений в виде теоремы для оптимальной робастно-устойчивой весовой функции для искомого фильтра.

Результаты данного исследования апробированы на примере линейно слабо стационарно изменяющегося процесса в виде полинома первой степени с интервальным коэффициентом нечеткости. Проведено сравнение искомого фильтра по гарантированной точности оценивания с фильтром, настроенным только на флюктуационные ошибки, каковым является фильтр, полученный по методу наименьших квадратов в традиционном толковании. Построены графики всех возможных случаев в поведении весовой функции минимаксного робастно-устойчивого фильтра первого и второго порядка при заданном параметре интервальной нечеткости, присутствующего в модели объекта, а также приведено сравнение фильтров для устойчивой и неустойчивой слабостационарной системы первого порядка с заданной степенью устойчивости η. Описанные в статье алгоритмы математического прогнозирования могут найти отражение не только в различных областях физики и других естественных наук (например, для наилучшей оценки параметров полезного сигнала), но и в гуманитарной сфере - при описании поведения систем с динамическим хаосом (эволюционизм в природе, теория фракталов сложных структур в результате самоорганизации, теория катастроф, лингвистическая прогностика и пр.). Автором рассмотрены алгоритмы вычислений в теории управления и самоорганизации, построенные на базе математических моделей и вычислительного эксперимента. Входные данные для оценки поведения нестационарного процесса в линейной ковариационной теории описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Дополнительные материалы

Дополнительные материалы доступны на онлайн-странице статьи.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Сообщество рецензентов Международного научно-исследовательского журнала

Supplementary materials

Supplementary materials are available online on the article’s webpage.

Conflict of Interest

None declared.

Review

International Research Journal Reviewers Community

Список литературы / References

1. Соловьев В.Н. Об оптимальности линейных алгоритмов гарантирующего оценивания при наличии случайных ошибок измерений / В.Н. Соловьев // Космич. исслед. — 1994. — Т. 32. — Вып. 1.
2. Репин В.Г. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем / В.Г. Репин, Г.П. Тартаковский. — М.: Сов. радио, 1977.
3. Соловьев В.Н. Двойственные алгоритмы оптимального гарантирующего оценивания и усеченный МНК / В.Н. Соловьев // Космич. исслед. — 1995. — Т. 33.
4. Борисов А.В. Проблема минимаксного оценивания случайных элементов со значениями в гильбертовых пространствах / А.В. Борисов, А.Р. Панков // АиТ. — 1996. — № 6.
5. Бахшиян Б.Ц. Определение и коррекция движения (гарантирующий подход) / Б.Ц. Бахшиян, Р.Р. Назиров, П.Е. Эльясберг. — М.: Наука, 1980.
6. Богуславский И.А. Об оценке фазовых координат линейной системы в статистически неопределенных ситуациях / И.А. Богуславский // АиТ. — 1971. — № 1.
7. Голубев Г.А. Минимаксная линейная фильтрация динамических процессов с дискретным временем / Г.А. Голубев // АиТ. — 1984. — № 2.
8. Гончаренко В.И. Идентификация параметров движения летательных аппаратов на активном участке траектории с использованием дискретного вейвлет-преобразования / В.И. Гончаренко, А.А. Кобзарь, Д.С. Кучерявенко // Труды МАИ. — 2011. — № 46.
9. Ринго Н.И. Некоторые задачи прогнозирования исследования операций (модели, сис-темы, решения) / Н.И. Ринго // ВЦ АН СССР. — М.: Наука, 1974. — Вып. 4.
10. Poor H.V. Minimax state estimation for linear stochastic systems with noise uncertainty / H.V. Poor, D.P. Loose // IEEI. Trans. Automat. Control. — 1981. — Vol. AC-26.
11. Verdu S. On minimax robustness: a general approach and applications / S. Verdu, H.V. Poor // IEEE. Transaction on information. — 1984. — Vol. IT-30. — №2.
12. Сидоров И.Г. Фильтрация сигнала при неполном знании вероятностных характеристик шума / И.Г. Сидоров // Радиотехника и электроника. — 1980. — Т. 25. — №10.
13. Куркин О.М. Минимаксная обработка информации / О.М. Куркин, Ю.Б. Коробочкин, С.А. Шаталов. — М.: Энергоатомиздат, 1990.
14. Куркин О.М. Исследование алгоритмов гарантирующего оценивания в задачах прогнозирования и интерполяции случайных процессов / О.М. Куркин // АиТ. — 2001. — №4.
15. Левин А.Ю. Теорема Харитонова для слабо нестационарных систем / А.Ю. Левин // УМН. — 1995. — Т. 50. — Вып. 6.
16. Сидоров И.Г. Минимаксная линейная фильтрация стационарного случайного процесса в условиях интервальной нечеткости матрицы состояния системы с ограниченной дисперсией / И.Г. Сидоров // Радиотехника и электроника. — 2018. — Т. 63. — №8.
17. Ащепков Л.Т. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления / Л.Т. Ащепков. — М.: Наука, 2006.
18. Оморов Р.О. Робастность интервальных динамических систем. I. Робастность непрерывных линейных интервальных динамических систем / Р.О. Оморов // Теория и системы управления. — 1995. — №1.
19. Пугачев В.С. Лекции по функциональному анализу / В.С. Пугачев. — М.: Изд-во МАИ, 1996.
20. Калман Р.Э. Очерки по математической теории систем / Р.Э. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М.: Наука, 1971.
21. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. — М.: Физматлит, 1977.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Solov'ev V.N. Ob optimal'nosti linejnyh algoritmov garantirujushhego ocenivanija pri nalichii sluchajnyh oshibok izmerenij [About optimality of linear algorithms of guaranteeing estimation in the presence of random measurement errors] / V.N. Solov'ev // Kosmich. issled [Cosmic Research] — 1994. — Vol. 32. — Iss. 1. [in Russian]
2. Repin V.G. Statisticheskij sintez pri apriornoj neopredelennosti i adaptacija informacionnyh sistem [Statistical synthesis under a priori uncertainty and adaptation of information systems] / V.G. Repin, G.P. Tartakovskij. — M.: Sov. radio, 1977. [in Russian]
3. Solov'ev V.N. Dvojstvennye algoritmy optimal'nogo garantirujushhego ocenivanija i usechennyj MNK [Dual algorithms of the optimal guaranteeing estimation and the truncated OLS] / V.N. Solov'ev // Kosmich. issled [Cosmic Research] — 1995. — Vol. 33. [in Russian]
4. Borisov A.V. Problema minimaksnogo ocenivanija sluchajnyh jelementov so znachenijami v gil'bertovyh prostranstvah [The problem of minimax estimation of random elements with values in Hilbert spaces] / A.V. Borisov, A.R. Pankov // AiT. — 1996. — № 6. [in Russian]
5. Bahshijan B.C. Opredelenie i korrekcija dvizhenija (garantirujushhij podhod) [Motion detection and correction (guaranteeing approach)] / B.C. Bahshijan, R.R. Nazirov, P.E. Jel'jasberg. — M.: Nauka, 1980. [in Russian]
6. Boguslavskij I.A. Ob ocenke fazovyh koordinat linejnoj sistemy v statisticheski neopredelennyh situacijah [On the estimation of phase coordinates of a linear system in statistically uncertain situations] / I.A. Boguslavskij // AiT. — 1971. — № 1. [in Russian]
7. Golubev G.A. Minimaksnaja linejnaja fil'tracija dinamicheskih processov s diskretnym vremenem [Minimax linear filtering of dynamic processes with discrete time] / G.A. Golubev // AiT. — 1984. — № 2. [in Russian]
8. Goncharenko V.I. Identifikacija parametrov dvizhenija letatel'nyh apparatov na aktivnom uchastke traektorii s ispol'zovaniem diskretnogo vejvlet-preobrazovanija [Identification of aircraft motion parameters on the active section of the

trajectory using discrete wavelet transform] / V.I. Goncharenko, A.A. Kobzar', D.S. Kucherjavenko // Trudy MAI [Proceedings of MAI]. — 2011. — № 46. [in Russian]

9. Ringo N.I. Nekotorye zadachi prognozirovanija issledovanija operacij (modeli, sis-temy, reshenija) [Some problems of operations research forecasting (models, sys-tems, solutions)] / N.I. Ringo // VC AN SSSR [RC AS USSR]. — M.: Nauka, 1974. — Iss. 4. [in Russian]

10. Poor H.V. Minimax state estimation for linear stochastic systems with noise uncertainty / H.V. Poor, D.P. Loose // IEEI. Trans. Automat. Control. — 1981. — Vol. AC-26.

11. Verdu S. On minimax robustness: a general approach and applications / S. Verdu, H.V. Poor // IEEE. Transaction on information. — 1984. — Vol. IT-30. — №2.

12. Sidorov I.G. Fil'tracija signala pri nepolnom znanii verojatnostnyh harakteristik shuma [Signal filtering at incomplete knowledge of probabilistic characteristics of noise] / I.G. Sidorov // Radiotehnika i jelektronika [Radio engineering and electronics]. — 1980. — Vol. 25. — №10. [in Russian]

13. Kurkin O.M. Minimaksnaja obrabotka informacii [Minimax information processing] / O.M. Kurkin, Ju.B. Korobochkin, S.A. Shatalov. — M.: Jenergoatomizdat, 1990. [in Russian]

14. Kurkin O.M. Issledovanie algoritmov garantirujushhego ocenivanija v zadachah prognozirovanija i interpoljacii sluchajnyh processov [Study of algorithms of guaranteed estimation in problems of forecasting and interpolation of random processes] / O.M. Kurkin // AiT. — 2001. — №4. [in Russian]

15. Levin A.Ju. Teorema Haritonova dlja slabo nestacionarnyh sistem [Kharitonov's theorem for weakly nonstationary systems] / A.Ju. Levin // UMN. — 1995. — Vol. 50. — Iss. 6. [in Russian]

16. Sidorov I.G. Minimaksnaja linejnaja fil'tracija stacionarnogo sluchajnogo processa v uslovijah interval'noj nechetkosti matricy sostojanija sistemy s ogranichennoj dispersiej [Minimax linear filtration of a stationary random process under conditions of interval fuzzy state matrix of the system with limited dispersion] / I.G. Sidorov // Radiotehnika i jelektronika [Radio Engineering and Electronics]. — 2018. — Vol. 63. — №8. [in Russian]

17. Ashhepkov L.T. Universal'nye reshenija interval'nyh zadach optimizacii i upravlenija [Universal solutions of interval optimization and control problems] / L.T. Ashhepkov. — M. : Nauka, 2006. [in Russian]

18. Omorov R.O. Robastnost' interval'nyh dinamicheskih sistem. I. Robastnost' nepreryvnyh linejnyh interval'nyh dinamicheskih sistem [Robustness of interval dynamic systems. I. Robustness of continuous linear interval dynamic systems] / R.O. Omorov // Teorija i sistemy upravlenija [Theory and control systems]. — 1995. — №1. [in Russian]

19. Pugachev V.S. Lekcii po funkcional'nomu analizu [Lectures on functional analysis] / V.S. Pugachev. — M.: Publishing House of MAI, 1996. [in Russian]

20. Kalman R.Je. Ocherki po matematicheskoj teorii sistem [Essays on the mathematical theory of systems] / R.Je. Kalman, P. Falb, M. Arbib. — M.: Nauka, 1971. [in Russian]

21. Kurzhanskij A.B. Upravlenie i nabljudenie v uslovijah neopredelennosti [Management and surveillance under uncertainty] / A.B. Kurzhanskij. — M.: Fizmatlit, 1977. [in Russian]