

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.6>

ЛУЧЕВАЯ МОДЕЛЬ ТРАЕКТОРИИ УПРУГИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Научная статья

Долгушин Д.М.¹, Долгушина О.В.², Извеков Ю.А.^{3,*}¹ ORCID : 0000-0002-2907-2417;² ORCID : 0000-0002-6511-4207;³ ORCID : 0000-0002-1892-4055;^{1,2,3} Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, Магнитогорск, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (major076767[at]mail.ru)

Аннотация

В настоящее время в научной литературе имеется множество теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию закономерностей распространения упругих волн в различных неоднородных средах. Рассматриваются как слоисто неоднородные (или дискретно неоднородные) среды, так и непрерывно неоднородные. Слоисто неоднородные среды представляют собой многослойную структуру, в которой сами слои являются однородными, а их физические свойства резко меняются на границе между слоями. Непрерывно неоднородные среды – это среды, физические характеристики которых являются непрерывными функциями координат. Примерами непрерывно неоднородных сред являются: атмосфера Земли с непостоянной по высоте температурой; вода в океане с различной соленостью по глубине; твердотельные изделия с разной твердостью по толщине и др. Для всех подобных сред наблюдается одинаковая особенность, заключающаяся в зависимости скорости распространения упругих волн от координат. Наличие такой особенности приводит к искривлению их траектории распространения. Поэтому при исследовании закономерностей распространения упругих волн в непрерывно неоднородных средах, необходимо учитывать зависимость скорости этих волн от координат.

Ключевые слова: неоднородная среда, переходная область, траектория акустического луча, градиент скорости.

RAY MODEL OF ELASTIC WAVE TRAJECTORY IN INHOMOGENEOUS MEDIUM

Research article

Dolgushin D.M.¹, Dolgushina O.V.², Izvekov Y.A.^{3,*}¹ ORCID : 0000-0002-2907-2417;² ORCID : 0000-0002-6511-4207;³ ORCID : 0000-0002-1892-4055;^{1,2,3} Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosov, Magnitogorsk, Russian Federation

* Corresponding author (major076767[at]mail.ru)

Abstract

At present, there are many theoretical and experimental works in the scientific literature dedicated to the study of the regularities of elastic wave propagation in various inhomogeneous media. Both layerwise inhomogeneous (or discretely inhomogeneous) media and continuously inhomogeneous media are discussed. Layerwise inhomogeneous media represent a multilayer structure in which the layers themselves are homogeneous, and their physical properties change sharply at the boundary between the layers. Continuously inhomogeneous media are media whose physical characteristics are continuous functions of coordinates. Examples of continuously inhomogeneous media are: the Earth's atmosphere with temperature that is not constant in altitude; water in the ocean with different salinity in depth; solid products with different hardness in thickness, etc. The same physical properties are observed for all such media. For all such media, the same peculiarity is observed, consisting in the dependence of the velocity of elastic wave propagation on the coordinates. The presence of this feature leads to curvature of their propagation trajectory. Therefore, when studying the regularities of elastic wave propagation in continuously inhomogeneous media, it is necessary to take into account the dependence of the velocity of these waves on the coordinates.

Keywords: inhomogeneous medium, transition region, acoustic beam trajectory, velocity gradient.

Введение

В настоящее время одной из актуальных задач, связанных с распространением упругих волн в непрерывно неоднородных средах, является проблема неразрушающего ультразвукового контроля металлоизделий с упрочненным слоем, получаемым при их термической обработке [5], [6]. В таком изделии между упрочненным и неупрочненным слоями имеется переходная область, в которой и наблюдается непрерывное изменение твердости материала изделия, а значит и скорости ультразвука, в направлении от упрочненного слоя к неупрочненному (твердость уменьшается, а скорость ультразвука увеличивается) [5]. Наличие переходной области не позволяет определить толщину упрочненного слоя стандартными методами ультразвукового контроля, т.к. отсутствует контрастная граница, от которой наблюдалось бы отражение ультразвука. Один из выходов в этом случае заключается в использовании особенности распространения упругих волн в переходной области. Эта особенность заключается в искривлении траектории ультразвука при направлении его распространения отличным от направления градиента скорости. Поэтому

необходимо теоретически и экспериментально исследовать особенность распространения упругих (в частности, ультразвуковых) волн в среде, в которой их скорость зависит от координаты. А также необходимо исследовать влияние различных физических параметров данной среды на траекторию упругих волн.

В известной научной литературе практически отсутствуют сведения о математической модели, описывающей траекторию упругих волн в непрерывно неоднородных средах. Поэтому целью настоящей работы является разработка этой модели и ее теоретическое исследование.

Разработка модели

Рассмотрим твердую среду, структурно состоящую из упрочненного и неупрочненного слоев, разделенных переходной областью (рис. 1). Введем систему координат так, чтобы ось Oz была перпендикулярна границам рассматриваемых слоев. В этом случае направление оси Oz будет совпадать с направлением роста скорости упругих волн, т.е. с направлением градиента скорости.

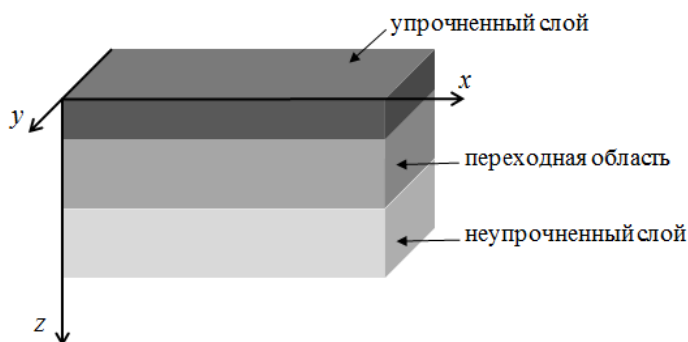


Рисунок 1 - Структурно-геометрическая схема рассматриваемой среды
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.6.1>

Пусть упрочненный слой и переходная область являются конечными в направлении оси z и бесконечными в двух других направлениях, а неупрочненный слой является полубесконечным. Рассмотрим распространение упругой волны в этой среде в виде акустического луча, распространяющегося в плоскости xOz и выходящего из начала координат под некоторым углом α_0 к оси Ox . Так как в упрочненном и неупрочненном слоях градиент скорости упругих волн равен нулю (скорость не зависит от координат), то траекторией их распространения здесь будет прямая. В переходной же области наблюдается градиент скорости, и траектория луча здесь будет искривляться. Тогда в общем случае траектория акустического луча в рассматриваемой слоистой структуре будет иметь вид, как на рис. 2.

Для поиска уравнения, описывающего подобную траекторию, отвлечемся пока от слоистой структуры и рассмотрим по подробнее распространение упругих волн в переходной области. При этом будем пока полагать, что она является полубесконечной в направлении оси Oz и начало системы координат совпадает с ее границей, лежащей в плоскости xOy .

Для простоты рассуждений будем считать, что градиент скорости является постоянной величиной. Пусть при этом скорость будет зависеть только от координаты z . Тогда зависимость скорости от координаты можно записать в виде

$$v = v_0(1 + Az) \quad (1)$$

где v_0 – скорость упругой волны в точке с координатой $z=0$; A – феноменологический параметр, который характеризует градиент скорости.

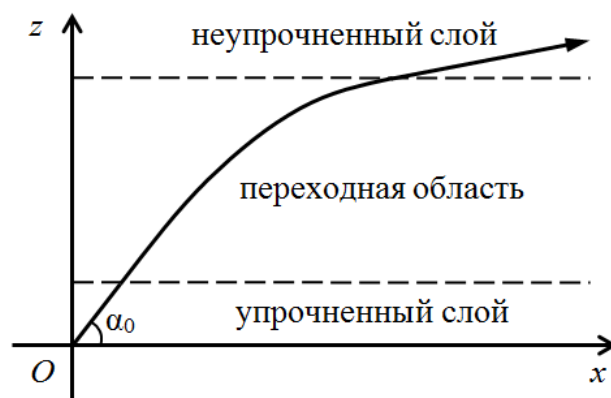


Рисунок 2 - Траектория акустического луча, прошедшего сквозь переходную область
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.6.2>

Очевидно, что в основе вывода уравнения траектории кроме формулы (1) должен быть закон Снеллиуса, который в нашем случае имеет вид

$$\frac{\cos \alpha}{v} = \text{const} \quad (2)$$

где α – угол между направлением скорости упругой волны и осью Ox в произвольной точке траектории, а v – модуль скорости упругой волны в этой же точке. Также при выводе уравнения траектории воспользуемся свойством производной от функции в некоторой произвольной точке, а именно

$$\frac{dz}{dx} = \text{tg } \alpha \quad (3)$$

Таким образом, из системы уравнений (1)-(3) после некоторых математических преобразований получаем выражение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1-(1+Az)^2 \cos^2 \alpha_0}}{(1+Az) \cos \alpha_0},$$

из которого после разделения переменных, интегрирования и математических преобразований получаем искомое уравнение траектории $z(x)$ упругой волны в переходной области

$$z = \frac{\sqrt{1+2xA \text{tg } \alpha_0 - x^2 A^2} - 1}{A}. \quad (4)$$

Графиком полученного уравнения является кривая, схематично представленная на рис. 3. Из анализа графика следует, что он является симметричным относительно прямой параллельной оси Oz и проходящей через вершину этого графика. Поэтому если упругая волна входит в переходную область под углом α_0 к оси Ox , то выходит из нее будет под углом $(\pi - \alpha_0)$.

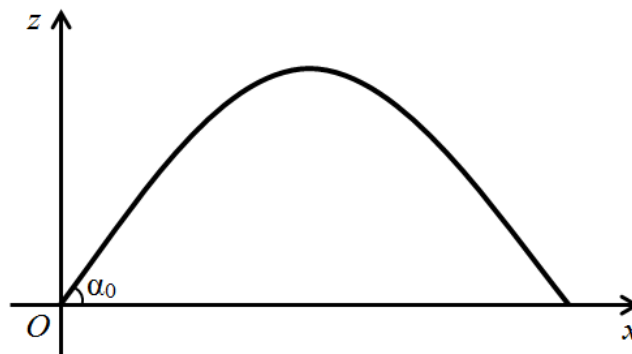


Рисунок 3 - Схематичный график уравнения (4): траектория упругой волны в переходной области
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.6.3>

Вернемся снова к слоистой структуре (см. рис. 1-2). Далее также будем полагать, что акустический луч входит в упрочненный слой под углом α_0 к оси Ox в точке, совпадающей с началом координат. Так как сначала этот луч пройдет некоторый путь в упрочненном слое, то координаты точки его входа в переходную область будут смещены относительно нуля. Обозначим координаты этой точки как $x=x_1$ и $z=d$. Тогда формулу зависимости скорости (1) упругой волны и уравнение траектории (4) в переходной области необходимо привести к виду

$$v = v_0(1 + A(z - d)), \quad (5)$$

$$z = \frac{\sqrt{1+2(x-x_1)A \text{tg } \alpha_0 - (x-x_1)^2 A^2} - 1}{A} + d. \quad (6)$$

Следует заметить, что формулы (5) и (6) справедливы только для переходного слоя. В упрочненном и неупрочненном слое зависимости $z(x)$ являются линейными, и их можно представить в виде

$$z_1 = k_1 x \text{ и } z_2 = D + k_2 (x - x_D),$$

где $k_1 = \text{tg } \alpha_0$; $k_2 = \frac{\text{tg } \alpha_0 - A(x_D - x_1)}{\sqrt{1 - A^2(x_D - x_1)^2 + 2A(x_D - x_1) \text{tg } \alpha_0}}$; D – координата по оси Oz границы между переходной областью и неупрочненным слоем; x_D – координата по оси Ox точки пересечения акустическим лучом границы между переходной областью и неупрочненным слоем, которую можно определить, приняв в уравнении (6) $z=D$.

В результате из выше изложенного следует, что траектория акустического луча, изображенная на рис. 2, будет описываться кусочной функцией в виде

$$z = \begin{cases} k_1 x, & 0 \leq x < x_1 \\ \frac{\sqrt{1+2(x-x_1)A \text{tg } \alpha_0 - (x-x_1)^2 A^2} - 1}{A} + d, & x_1 \leq x \leq x_D. \\ D + k_2 (x - x_D), & x > x_D \end{cases} \quad (7)$$

Однако при определенных условиях акустический луч может не пересечь границу $z=D$, а повернуть обратно в сторону упрочненного слоя и выйти из него (рис. 4). Для получения уравнения, описывающего эту траекторию,

необходимо в формуле (7) изменить третью строку и скорректировать области определения координаты x во второй и третьей строках.



Рисунок 4 - Траектория акустического луча, развернувшегося в переходной области
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.6.4>

После преобразований получим

$$z = \begin{cases} k_1 x, 0 \leq x < x_1 \\ \frac{\sqrt{1+2(x-x_1)A \operatorname{tg} \alpha_0 - (x-x_1)^2 A^2} - 1}{A} + d, x_1 \leq x \leq x_2 \\ -k_1(x-b), x_2 < x \leq b \end{cases} \quad (8)$$

Здесь x_2 – координата выхода акустического луча из переходной области обратно в упрочненный слой; b – координата по оси Ox выхода акустического луча из рассматриваемой трехслойной структуры.

Исследуем функцию (8) на экстремум и найдем координаты вершины графика этой функции:

$$x_B = \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{A} + \frac{d}{\operatorname{tg} \alpha_0}. \quad (9)$$

$$z_B = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_0} - 1}{A} + d \quad (10)$$

С другой стороны, исходя из симметрии траектории, координату вершины можно найти как точку пересечения продолжения прямолинейных участков траектории из формулы (8):

$$k_1 x_B = -k_1 (x_B - b),$$

$$x_B = \frac{b}{2}.$$

Тогда, подставив последнее в формулу (9), получаем выражение для вычисления координаты выхода акустического луча из трехслойной структуры:

$$b = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_0}{A} + \frac{2d}{\operatorname{tg} \alpha_0}. \quad (11)$$

Уравнения (9) и (10), как и ожидалось, показывают, что координаты вершины траектории зависят от толщины упрочненного слоя, градиента скорости и угла α_0 , под которым акустический луч входит в рассматриваемую среду. Но так как толщина переходной области ограничена, то вершина траектории акустического луча может быть, либо действительной при $z_e \leq D$, либо мнимой при $z_e > D$. Действительная вершина располагается в переходной области и лежит на траектории луча, а мнимая вершина располагается в неупрочненном слое и лежит на продолжении криволинейного участка траектории луча в неупрочненный слой.

Другими словами расчеты по формулам (9) и (10) дают не только информацию о координатах вершины траектории акустического луча, но и позволяют понять каким будет характер этой траектории – возвратный или сквозной. Очевидно, что при $z_e > D$ траектория будет сквозной, а при $z_e \leq D$ – возвратной.

Результаты модельных расчетов траектории ультразвукового луча и их анализ

Для проведения модельных расчетов и построения траектории ультразвукового луча возьмем границы упрочненного и переходного слоев и значения скорости ультразвука характерные для стали: $d=0,04$ м, $D=0,14$ м, $v_0=5920$ м/с, $v=5980$ м/с. Здесь v_0 – скорость ультразвука в упрочненном слое и на его границе с переходной областью; v – скорость ультразвука в неупрочненном слое и на его границе с переходной областью. Тогда для градиента скорости ультразвука в переходной области можно записать выражение $A = \frac{v-v_0}{v_0(D-d)}$. Все расчеты будем проводить на основании уравнений, полученных в предыдущем разделе.

На рис. 5 представлены траектории ультразвука при различных значениях угла α_0 в интервале от 1° до 10° с шагом 1° . Здесь точками обозначена граница упрочненного слоя, а пунктирной линией – граница переходного слоя. На рисунке видно, что траектория ультразвука сильно зависит от угла α_0 . Также следует заметить, что разным значениям угла α_0 может соответствовать одна и та же точка обратного выхода траектории из рассматриваемой среды. На рисунке близкие к такому случаю являются две пары траекторий, соответствующие углам 2° и 7° , 3° и 4° . На этом рисунке

также имеются траектории, которые насквозь проходят переходный слой и не возвращаются обратно (траектории соответствующие углам 9° и 10°).

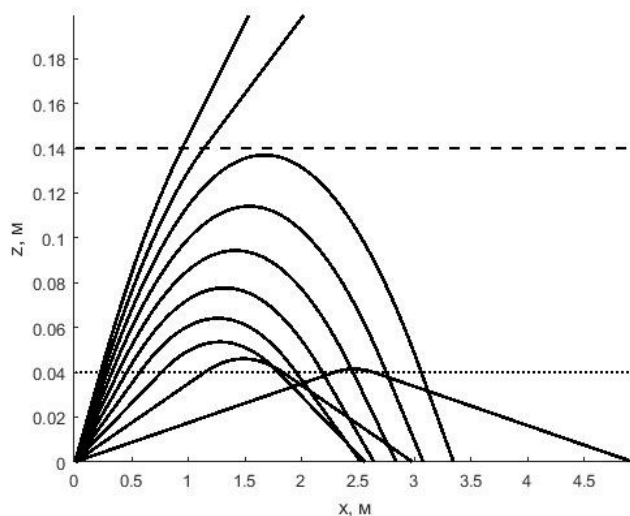


Рисунок 5 - Траектории ультразвука при значениях угла $\alpha_0 = 1^\circ - 10^\circ$ с шагом 1°
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.6.5>

Анализ траекторий, у которых совпадают точки обратного выхода из упрочненного слоя (рис. 6), показывает, что их углы входа удовлетворяют следующему уравнению:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \beta = Ad$$

Кроме этого анализ также показывает, что углы α_0 и β будут равны друг другу, если толщина упрочненного слоя будет соответствовать двум третьим толщины всей двухслойной структуры, т.е. $d = \frac{2D}{3}$.

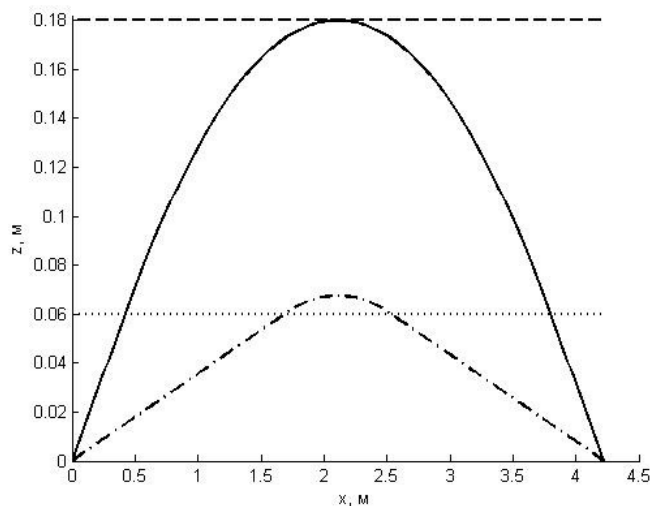


Рисунок 6 - Траектории ультразвука с одной точкой выхода
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.6.6>

Примечание: горизонтальным линиям соответствуют границы упрочненного и переходного слоев

В этом случае характер зависимости траекторий от угла ввода будет немного отличаться от представленного на рис. 5. Иллюстрация этого случая представлена на рис. 7. Здесь с увеличением угла наблюдается только уменьшение расстояния между точками входа и выхода траектории, и отсутствуют траектории, у которых совпадали бы точки выхода из упрочненного слоя

Далее проведем расчет зависимости траектории ультразвукового луча от толщины упрочненного слоя и толщины переходной области. Для этих вычислений в качестве исходных данных будем использовать те же значения скоростей. Значение угла α_0 возьмем 8° , что соответствует траектории из рис. 5, у которой вершина почти касается границы $z=D$.

На рис. 8 представлены результаты расчета траектории ультразвука в зависимости от различных значений толщины переходного слоя D . Здесь также точками указана граница упрочненного слоя, а пунктирными линиями указаны задаваемые положения границы переходного слоя. Из рисунка видно, что значение D очень сильно влияет на траекторию ультразвука и, как следствие, сильно влияет на положение точки обратного выхода ультразвука из рассматриваемой среды. При этом чем меньше толщина переходного слоя, тем меньше расстояние между точками входа и выхода траектории ультразвука в рассматриваемой среде. Из результатов расчета следует, что изменение толщины переходного слоя на 3 см приводит к смещению точки выхода траектории на величину порядка 80–90 см.

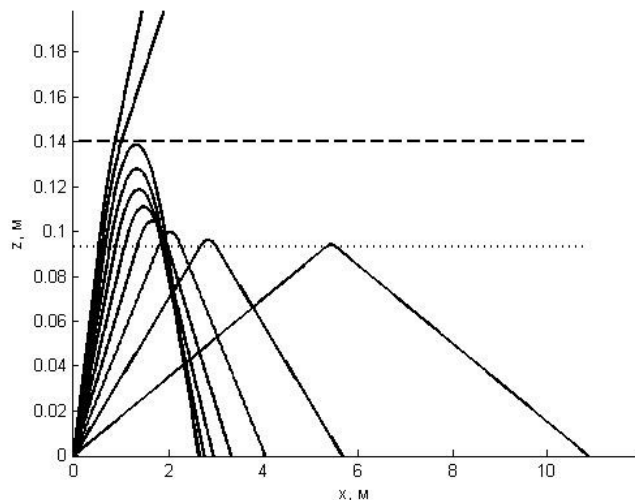


Рисунок 7 - Траектории ультразвука при $d = 2D/3$ и значениях угла $\alpha_0 = 1^\circ - 10^\circ$ с шагом 1°
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.6.7>

На рис. 9 представлены результаты расчета траектории ультразвука в зависимости от различных значений толщины упрочненного слоя d . Как и на предыдущих рисунках, здесь пунктирной линией обозначена граница переходного слоя, а точками указаны задаваемые положения границы упрочненного слоя. Из рисунка видно, что при неизменном положении границы переходного слоя ($z=D$) увеличение толщины упрочненного слоя приводит к уменьшению толщины переходной области. Здесь фактически представлены результаты расчета траекторий в зависимости от одновременного изменения размеров обоих слоев рассматриваемой структуры при неизменной их общей толщине, т.е. при $D = \text{const}$. Результаты показывают, что увеличение толщины упрочненного слоя приводит к незначительному увеличению координаты вершины траектории z_v – вершина траектории становится ближе к границе переходного слоя $z=D$. При этом расстояние между точками входа и выхода ультразвука в рассматриваемой среде уменьшается, что говорит о более сильном влиянии на траекторию изменения толщины переходной области по сравнению с изменением толщины упрочненного слоя.

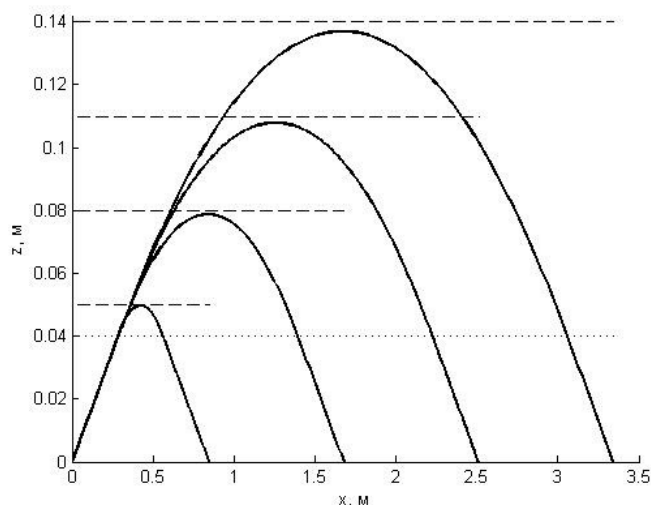


Рисунок 8 - Траектории ультразвука при значениях толщины переходного слоя: $D = 0,05 - 0,14$ м, шаг равен 0,03 м

DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.6.8>

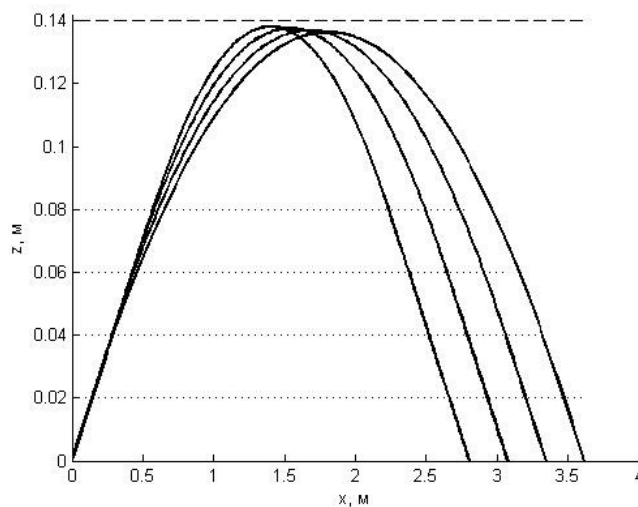


Рисунок 9 - Траектории ультразвука при значениях толщины упрочненного слоя: $d = 0,02-0,08$ м, шаг равен 0,02 м
DOI: <https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.6.9>

Заключение

Из всех возможных траекторий ультразвука в рассматриваемой структуре наибольший интерес представляет такая, у которой вершина касается границы переходной области с неупрочненным слоем, т.е. координата вершины которой удовлетворяет условию $z_0 = D$. При проведении анализа этой траектории выяснилось, что независимо от толщины упрочненного слоя и переходной области вершина траектории всегда будет касаться границы $z = D$, если ввести луч в рассматриваемую структуру под углом, удовлетворяющим уравнению:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{(m+1)^2 - 1},$$

где $m = \frac{v-v_0}{v_0}$. Т.е. этот угол зависит только от скоростей ультразвука на границах переходного слоя $z=d$ и $z=D$.

Конфликт интересов

Не указан.

Conflict of Interest

None declared.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Зайцев В.С. Отражение звука в неоднородной непрерывной среде / В.С. Зайцев // ГБУЗ «Приазовский государственный технический университет». — №6. — 1998. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otrazhenie-zvuka-v-neodnorodnoy-nerpreryvnoy-srede> (дата обращения: 04.03.2024).
2. Красненко Н.П. Приземное распространение звуковых волн в атмосфере / Н.П. Красненко // Доклады ТУСУР. — №2 (28). — 2013. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/prizemnoe-rasprostranenie-zvukovyh-voln-v-atmosfere> (дата обращения: 04.03.2024).
3. Абрамович А.А. Акустические исследования градиентных стекол / А.А. Абрамович // Акустический журнал. — Т. 55. — № 3. — 2009. — С. 350-355.
4. Бабич В.М. Многомерный метод ВКБ или лучевой метод. Его аналоги и обобщения / В.М. Бабич // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — Т. 34. — 1988. — С. 93-134.
5. Баев А.Р. Возможности контроля структуры чугуновых и стальных изделий по данным ультразвуковых измерений / А.Р. Баев, Г.Е. Коновалов, Я.В. Артеменко [и др.] // Литье и металлургия. — № 2. — 2004. — С. 85-89.
6. Баев А.Р. Совершенствование методов и средств ультразвукового контроля металлоизделий с модифицированным поверхностным слоем / А.Р. Баев, Г.Е. Коновалов, А.Л. Майоров // Литье и металлургия. — № 3. — 2011. — С. 148-151. — DOI: 10.21122/1683-6065-2011-3-148-151
7. Данилов А.В. Распространение упругих волн в периодически неоднородной среде / А.В. Данилов, А.А. Радионов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. — Т. 16. — № 2. — 2013. — С. 25-28.
8. Кацнельсон Б.Г. Горизонтальная рефракция звука в мелком море и ее экспериментальные наблюдения / Б.Г. Кацнельсон, М. Бади, Д. Линч // Акустический журнал. — Т. 53. — № 3. — 2007. — С. 362-376.

9. Боровских А.В. Распространение волн в неоднородной среде: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / А.В. Боровских. — Москва, 2006. — 36 с.

10. Белянкова Т.И. Особенности распространения волн Лява в упругих функционально-градиентных покрытиях / Т.И. Белянкова, В.В. Калинин // Вычислительная механика сплошных сред. — Т. 10. — № 1. — 2017. — С. 39-52. — DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.1.4

Список литературы на английском языке / References in English

1. Zajcev V.S. Otrazhenie zvuka v neodnorodnoj nepreryvnoj srede [Sound reflection in an inhomogeneous continuous medium] / V.S. Zajcev // GVUZ «Priazovskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet» [State Educational Institution "Priazovsky State Technical University"]. — №6. — 1998. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otrazhenie-zvuka-v-neodnorodnoj-nepreryvnoj-srede> (accessed: 04.03.2024) [in Russian].

2. Krasnenko N.P. Prizemnoe rasprostranenie zvukovyh voln v atmosfere [Surface propagation of sound waves in the atmosphere] / N.P. Krasnenko // Doklady TUSUR [Reports of TUSUR]. — №2 (28). — 2013. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/prizemnoe-rasprostranenie-zvukovyh-voln-v-atmosfere> (accessed: 04.03.2024) [in Russian].

3. Abramovich A.A. Akusticheskie issledovaniya gradientnyh stekol [Acoustic studies of gradient glasses] / A.A. Abramovich // Akusticheskij zhurnal [Acoustic Magazine]. — V. 55. — № 3. — 2009. — P. 350-355 [in Russian].

4. Babich V.M. Mnogomernyj metod VKB ili luchevoj metod. Ego analogi i obobshcheniya [The multidimensional VKB method or the beam method. Its analogues and generalizations] / V.M. Babich // Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Fundam. Napravleniya [Results of Science and Technology Ser. Modern Problems of Mat. Fundamental directions]. — V. 34. — 1988. — P. 93-134 [in Russian].

5. Baev A.R. Vozmozhnosti kontrolya struktury chugunnyh i stal'nyh izdelij po dannym ul'trazvukovyh izmerenij [The ability to control the structure of cast iron and steel products according to ultrasonic measurements] / A.R. Baev, G.E. Konovalov, YA.V. Artemenko [et al.] // Lit'e i metallurgiya [Casting and metallurgy]. — № 2. — 2004. — P. 85-89 [in Russian].

6. Baev A.R. Sovershenstvovanie metodov i sredstv ul'trazvukovogo kontrolya metalloizdelij s modifitsirovannym poverhnostnym sloem [Improvement of methods and means of ultrasonic inspection of metal products with a modified surface layer] / A.R. Baev, G.E. Konovalov, A.L. Majorov // Lit'e i metallurgiya [Casting and metallurgy]. — № 3. — 2011. — P. 148-151. — DOI: 10.21122/1683-6065-2011-3-148-151 [in Russian]

7. Danilov A.V. Rasprostranenie uprugih voln v periodicheski neodnorodnoj srede [Propagation of elastic waves in a periodically inhomogeneous medium] / A.V. Danilov, A.A. Radionov // Fizika volnovykh processov i radiotekhnicheskie sistemy [Physics of wave processes and radio engineering systems]. — V. 16. — № 2. — 2013. — P. 25-28 [in Russian].

8. Kacnel'son B.G. Gorizontalnaya refrakciya zvuka v melkom more i ee eksperimental'nye nablyudeniya [Horizontal refraction of sound in shallow seas and its experimental observations] / B.G. Kacnel'son, M. Badi, D. Linch // Akusticheskij zhurnal [Acoustic Magazine]. — V. 53. — № 3. — 2007. — P. 362-376 [in Russian].

9. Borovskih A.V. Rasprostranenie voln v neodnorodnoj srede: avtoref. dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk: 01.01.02 [Wave propagation in an inhomogeneous medium: abstract of the dissertation of the Doctor of Physical and Mathematical Sciences : 01.01.02] / A.V. Borovskih. — Moscow, 2006. — 36 p. [in Russian]

10. Belyankova T.I. Osobennosti rasprostraneniya voln Lyava v uprugih funkcional'no-gradientnyh pokrytyah [Features of Love wave propagation in elastic functional gradient coatings] / T.I. Belyankova, V.V. Kalinchuk // Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred [Computational continuum mechanics]. — V. 10. — № 1. — 2017. — P. 39-52. — DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.1.4 [in Russian]