ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА/DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180

ВЛИЯНИЕ ВЕТРА НА КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЕРТИКАЛЬНО ЗАВИХРЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Научная статья

Дьячкова А.В.[1, *], Бурмашева Н.В.[2], Просвиряков Е.Ю.[3]
[1] ORCID : 0000-0001-8626-4282;
[2] ORCID : 0000-0003-4711-1894;
[3] ORCID : 0000-0002-2349-7801;
[1, 2, 3] Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (zetsuen160[at]outlook.com)

Аннотация

Статья посвящена изучению влияния ветрового воздействия на конвективное течение вязкой несжимаемой вертикально завихренной жидкости. Исследование проводится с использованием математической модели, описывающей данное течение. Авторы статьи анализируют влияние параметров ветра на основные характеристики конвективного течения, такие как скорость, степень завихренности, температура и давление.

В данной статье приведено аналитическое решение системы дифференциальных уравнений, описывающей стационарное конвективное течение жидкости, для поля скоростей из класса решений, линейных по части переменных.

Полученные результаты позволяют расширить наши знания о процессах, происходящих в окружающей среде, и могут быть полезными для дальнейших исследований в области гидродинамики и гидродинамической устойчивости.

Ключевые слова: сдвиговое течение, система Обербека-Буссинеска, переопределенная система, точное решение, противотечение, стратификация.

WIND INFLUENCE ON CONVECTIVE FLOW OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE VERTICALLY SWIRLING FLUID

Research article

Dyachkova A.V.[1, *], Burmasheva N.V.[2], Prosviryakov Y.Y.[3]
[1] ORCID : 0000-0001-8626-4282;
[2] ORCID : 0000-0003-4711-1894;
[3] ORCID : 0000-0002-2349-7801;
[1, 2, 3] Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation

* Corresponding author (zetsuen160[at]outlook.com)

Abstract

The article is dedicated to the study of the effect of wind influence on the convective flow of a viscous, incompressible vertically swirling fluid. The study is carried out using a mathematical model describing this flow. The authors analyse the influence of wind parameters on the main characteristics of convective flow, such as velocity, degree of vorticity, temperature and pressure.

This work presents an analytical solution of the system of differential equations describing a stationary convective fluid flow for the velocity field from the class of solutions linear in part of the variables.

The results obtained increase our knowledge of the processes occurring in the environment and may be useful for further research in the field of hydrodynamics and hydrodynamic stability.

Keywords: shear flow, Oberbeck-Bussinesque system, overdetermined system, exact solution, countercurrent, stratification.

Введение

В настоящее время описание процессов в жидких и газообразных средах представляет интерес для исследования. Развитие технологий и возможность их применения в производстве играют важную роль в жизни современного общества. Исследования, направленные на изучение и описание течений жидкости, используются в динамике плазмы, разработке хладогентов и т. п.

Для описания течения жидкостей применяются математические модели. Традиционно используется система уравнений тепловой конвекции [1], [2], состоящей из уравнений Навье-Стокса, уравнения теплопроводности и уравнения несжимаемости жидкости.

В статье представлены результаты анализа аналитических решений исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Нетривиальной задачей является выбор граничных условий, от которых в существенной степени зависят свойства течения. В статье исследованы случаи при условии прилипания на границе жидкости с твердой поверхностью [3]. На свободной же поверхности используется условие, задающее скорости,

температуру и давление при контакте жидкости с воздухом. Такие граничные условия могут описывать воздействие ветра на слой жидкости.

Постановка задачи

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном слое постоянной толщины h. Конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости традиционно описывается следующей системой уравнений [1], [2]:

- уравнение Навье-Стокса в приближении Буссинеска:

$$V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2},$$
$$V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial y}+v\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}, \qquad (1)$$
$$V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+v\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}+\mathrm{g}\beta T,$$

- уравнение теплопроводности:

$$V_x\frac{\partial T}{\partial x}+V_y\frac{\partial T}{\partial y}+V_z\frac{\partial T}{\partial z}=\chi\Delta T \qquad (2)$$

- уравнение несжимаемости жидкости:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0 \qquad (3)$$

Здесь V_x, V_y, V_z – компоненты скорости, параллельные соответствующим осям координат прямоугольной декартовой системы $Oxyz$. Система координат введена так, что ось Oz направлена строго вверх. $P=P(x,y,z)$ – отклонение давления от гидростатического, отнесённое к постоянной средней плотности жидкости ρ, $T=T(x,y,z)$ – отклонение температуры от средней, β – температурный коэффициент объемного расширения, v – коэффициент кинематической вязкости, χ – коэффициент температуропроводности рассматриваемой жидкости.

Имеются пять уравнений (1)-(3) и 4 неизвестных V_x, V_y, P, T. Такая система является *переопределенной*. Будем искать решение для ненулевых компонент вектора скорости (V_x, V_y) в виде [3], [4], [7], [9]:

$$V_x=u(z)+a(z)y, V_y=v(z), P=P(x,y,z), T=T(x,y,z). \qquad (4)$$

При подстановке представления (4) в уравнение несжимаемости (3) уравнение (3) удовлетворяется тождественно. Проблема с переопределением разрешена.

После несложных преобразований получаем итоговую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
va''=P_3\ (\text{ значит, } a''=0)\\
va=-P_2+vu'',\\
P_0{}'=g\beta T_0,\quad P_1'=g\beta T_1,\quad P_2'=g\beta T_2,\\
P_3=0,\quad P_1=vv'',\\
\chi T_0{}''=uT_2+vT_1,\\
\chi T_1''=aT_2,\\
\chi T_2-0,\\
aT_3=0\ (\text{ значит, } T_3=0)\ .
\end{gathered} \qquad (5)$$

В итоге система уравнений в частных производных (1)-(3) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (5) для нахождения неизвестных функций $u, a, v, P_0, P_1, P_2, T_0, T_1, T_2$.

Учитывая, что $P_3=0$ и $T_3=0$, функции отклонения давления и температуры примут вид:

$$P=P_0+P_1y+P_2x, T=T_0+T_1y+T_2x\ .$$

Общее решение системы (5) представляет собой набор полиномиальных функций не выше четырнадцатой степени.

Краевая задача

В решение системы (5) входят пятнадцать постоянных интегрирования, для их определения потребуются граничные условия. Будем рассматривать течение в слое жидкости толщины h, нижней границе которого соответствует значение $z = 0$ вертикальной координаты. Положим, что на нижней границе выполняется условие прилипания, а также известно распределение температуры:

$$u(0)=v(0)=a(0)=0,$$
$$T_0(0)=\theta_0, T_1(0)=A, T_2(0)=B.$$

На верхней же границе (при $z = h$) положим известными распределение поля скорости, температуры и давления:

$$u(h) = W\cos\varphi, v(h) = W\sin\varphi,$$
$$a(h) = \Omega,$$
$$T_0(h) = \theta_2, T_1(h) = 0, T_2(h) = 0,$$
$$P_0(h) = S, P_1(h) = S_1, P_2(h) = S_2.$$

Здесь W – значение фоновой скорости течения жидкости на верхней поверхности слоя, угол φ характеризует направление вектора скорости по отношению к координатным осям Oxy, Ω – завихренность.

По известным краевым условиям определим постоянные интегрирования, находя таким образом частное решение системы (5). Для упрощения анализа выполнен переход к безразмерной координате Z, произведя замену $Z = \frac{z}{h}$. Поскольку $z \in [0, h]$, тогда $Z \in [0, 1]$. Аналогично частное решение является набором полиномов не выше четырнадцатой степени:

$$\begin{gathered} u(Z) = \sum_{i=1}^{10} u_i Z^i, \\ a(Z) = \Omega Z, \\ v(Z) = \sum_{i=1}^{7} v_i Z^i, \\ P = P_0(Z) + P_1(Z)x + P_2(Z)y, \\ T = T_0(Z) + T_1(Z)x + T_2(Z)y, \end{gathered} \tag{6}$$

где $P_0, P_1, P_2, T_0, T_1, T_2$ многочлены порядка не выше четырнадцатого.

Основные результаты

4.1. Анализ скорости *v*

Первоначально разберём свойства скорости *v*, определяемой выражением (6).

Проведем для дальнейшего удобства некоторые простые преобразования и введем ряд соответствующих обозначений:

$$v = Z\left[-\frac{Bgh^5\beta\Omega}{2520v\chi}Z^6 + \frac{Bgh^5\beta\Omega}{720v\chi}Z^5 - \left(\frac{Agh^3\beta}{24v} + \frac{Bgh^5\beta\Omega}{288v\chi}\right)Z^3 + \frac{Agh^3\beta}{6v}Z^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{Bgh^5\beta\Omega}{120v\chi} + \frac{h^2S_1}{2v} - \frac{Agh^3\beta}{4v}\right)Z + \left(W\sin\varphi + \frac{Agh^3\beta}{8v} - \frac{59Bgh^5\beta\Omega}{10080v\chi} - \frac{h^2S_1}{2v}\right)\right] =$$
$$= Zf(Z).$$

При этом представим функцию $f(Z)$ в виде

$$f(Z) = a_6Z^6 + a_5Z^5 + a_3Z^3 + a_2Z^2 + a_1Z + a_0,$$

где

$$a_6 = -\frac{Bgh^5\beta\Omega}{2520v\chi}, a_5 = \frac{Bgh^5\beta\Omega}{720v\chi}, a_3 = -\left(\frac{Agh^3\beta}{24v} + \frac{Bgh^5\beta\Omega}{288v\chi}\right),$$
$$a_2 = \frac{Agh^3\beta}{6v}, a_1 = \left(\frac{Bgh^5\beta\Omega}{120v\chi} + \frac{h^2S_1}{2v} - \frac{Agh^3\beta}{4v}\right), a_0 = W\sin\varphi + \frac{Agh^3\beta}{8v} - \frac{59Bgh^5\beta\Omega}{10080v\chi} - \frac{h^2S_1}{2v},$$

а индекс *i* коэффициента a_i соответствует члену *i*-ой степени (по вертикальной координате *Z*).

Так же заметим зависимость коэффициентов a_6, a_3 от коэффициентов a_2, a_5

$$a_6 = -\frac{2}{7}a_5,$$
$$a_3 = -\left(\frac{1}{4}a_2 + \frac{5}{2}a_5\right).$$

Тогда функция *f(Z)* перепишется в виде

$$f(Z) = -\tfrac{2}{7}a_5Z^6 + a_5Z^5 - \left(\tfrac{1}{4}a_2 + \tfrac{5}{2}a_5\right)Z^3 + a_2Z^2 + a_1Z + a_0 \tag{7}$$

В итоге скорость *v* будет описываться следующим выражением:

$$v = Zf(Z) = Z\left(-\tfrac{2}{7}a_5Z^6 + a_5Z^5 - \left(\tfrac{1}{4}a_2 + \tfrac{5}{2}a_5\right)Z^3 + a_2Z^2 + a_1Z + a_0\right). \tag{8}$$

Как ранее было сказано, скорость *v* принимает нулевое значение на границе слоя *Z=0*, что видно из структуры выражения (8). Поэтому далее будем искать точки обращения функции *f* в нуль внутри слоя, таким образом определять застойные точки течения и возможные противотечения в слое [0,1].

Необходимо рассмотреть различные комбинации значений констант для анализа поведения скорости (8). Заметим, что случаи $a_0, a_1, a_2, a_5 = 0$ (значит, $f \equiv 0$), $a_1, a_2, a_5 = 0, a_0 \neq 0$ (значит, $f = a_0 =$ const) и

$a_0, a_2, a_5 = 0, a_1 \neq 0$ (значит, $f = a_1 Z$) не представляют интерес, так как функция *f* либо принимает постоянное значение, либо является линейной. Поэтому рассмотрим менее тривиальные варианты комбинаций. Для схематизации дальнейшего исследования разобьем все возможные случаи на группы: для начала рассмотрим варианты, в которых лишь один коэффициент из a_i равен нулю. Далее будем рассматривать все более общие случаи и, наконец, исследуем наиболее общий из них, где ни один из коэффициентов из a_i в нуль не обращается.

Группа I: лишь один коэффициент из a_i (i = 0,1,2,5) равен нулю

I.1) Пусть $a_5 = 0, a_0 a_1 a_2 \neq 0$.

Наибольшее число внутренних застойных точек равняется двум, что проиллюстрировано на рисунке 1.

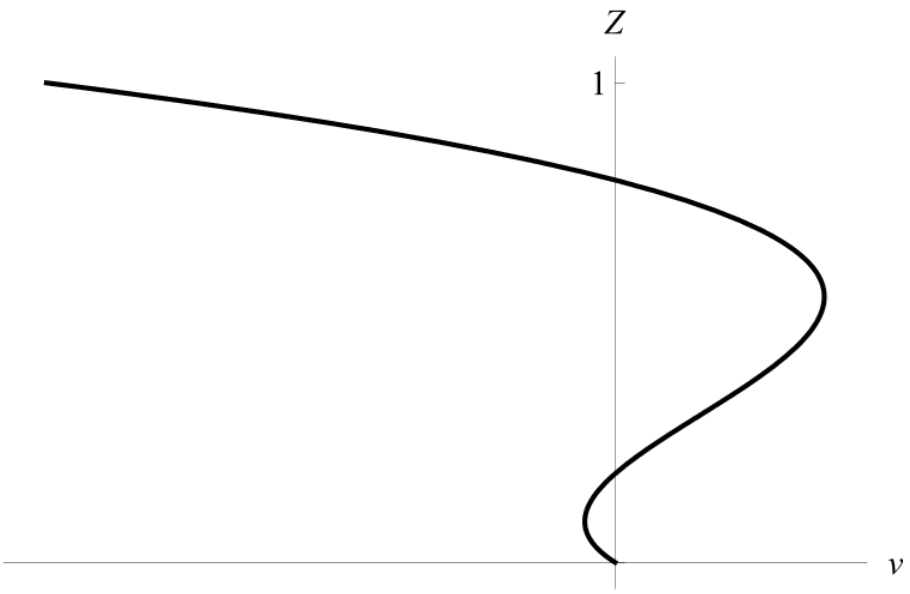

Рисунок 1 - Профиль скорости *v* при $a_5 = 0$, $a_0 a_1 a_2 \neq 0$

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.1

I.2) Пусть $a_2 = 0, a_0 a_1 a_5 \neq 0$

Этот случай реализуется при *A=0* Тогда компонента скорости *v* имеет не более двух нулевых точек внутри рассматриваемого слоя [9] (см. рисунок 2).

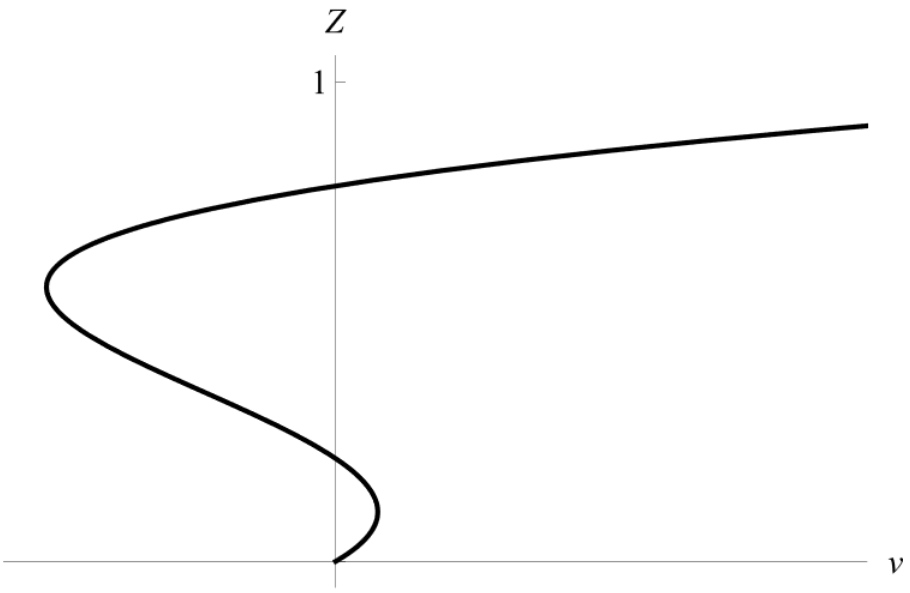

Рисунок 2 - Профиль скорости *v* при *a2* = 0, $a_0 a_1 a_5 \neq 0$

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.2

I.3) Пусть $a_1 = 0, a_2 a_5 a_0 \neq 0$

Такая ситуация возможна лишь при ненулевых значениях параметров A, B, S_1, Ω (в противном случае автоматически получаем $a_2 = a_5 = 0$). Аналогично предыдущему [9], компонента скорости v имеет внутри слоя не более двух застойных точек (см. рисунок 3).

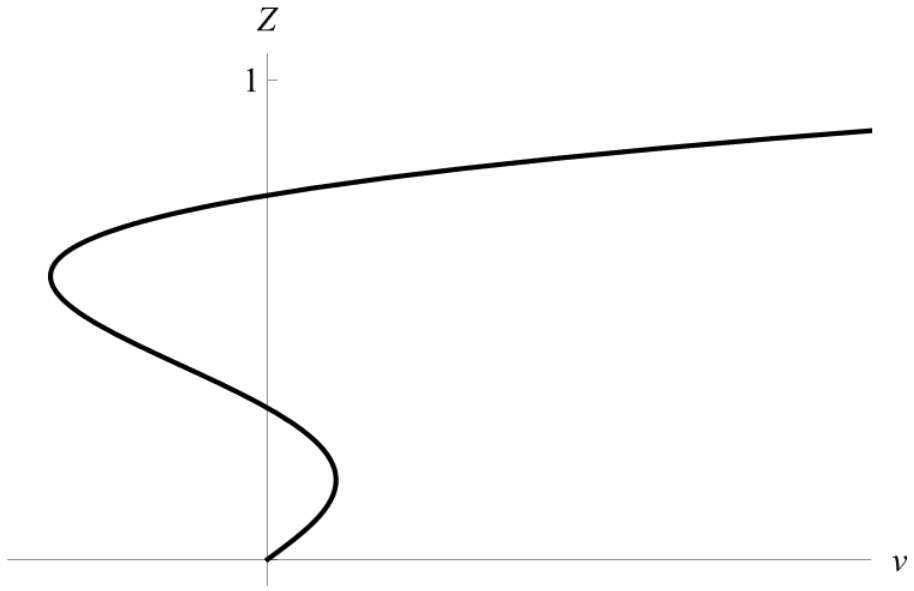

Рисунок 3 - Профиль скорости v при $a_1 = 0$, $a_2 a_5 a_0 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.3

I.4) Пусть $a_0 = 0, a_1 a_2 a_5 \neq 0$

Этот случай возможен при $W = 0$ и/или $\sin\varphi = 0$ и одновременном не равенстве нулю параметров A, B, S_1, Ω, для того, чтобы избежать ситуации $a_1 = a_2 = a_5 = 0$.

Исследуя монотонность этой функции, делаем вывод, что внутри исследуемого слоя скорость v также может иметь не более двух нулей (см. рисунок 4).

Рисунок 4 - Профиль скорости v при $a_0 = 0$, $a_1 a_2 a_5 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.4

Из приведенных выше рассуждений видно, что во всех случаях, когда только один из коэффициентов $a_i \quad (i = 0, 1, 2, 5)$ равен нулю, скорость v имеет одинаковое максимальное число точек застоя, равное двум (см. рисунок 1-4).

Группа II: только два коэффициента из $a_i \quad (i = 0, 1, 2, 5)$ равны нулю

II.1) Пусть $a_2 = a_5 = 0, a_0 a_1 \neq 0$

Такая комбинация осуществима при *A=0*, *B=0* и/или $\Omega = 0.$ Функция *f* принимает линейный вид, и, очевидно, она имеет внутри слоя $0 \leq Z \leq 1$ лишь один нуль, что проиллюстрировано на рисунке 5.

Рисунок 5 - Профиль скорости v при $a_2 = a_5 = 0$, $a_0 a_1 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.5

II.2) Пусть $a_0 = a_5 = 0, a_1 a_2 \neq 0$

Это возможно при $W \sin\varphi + \frac{Agh^3\beta}{8v} - \frac{h^2 S_1}{2v} = 0$ и $B = 0$ и/или $\Omega = 0.$ В слое не может существовать более одной нулевой точки скорости *v* (см. рисунок 6).

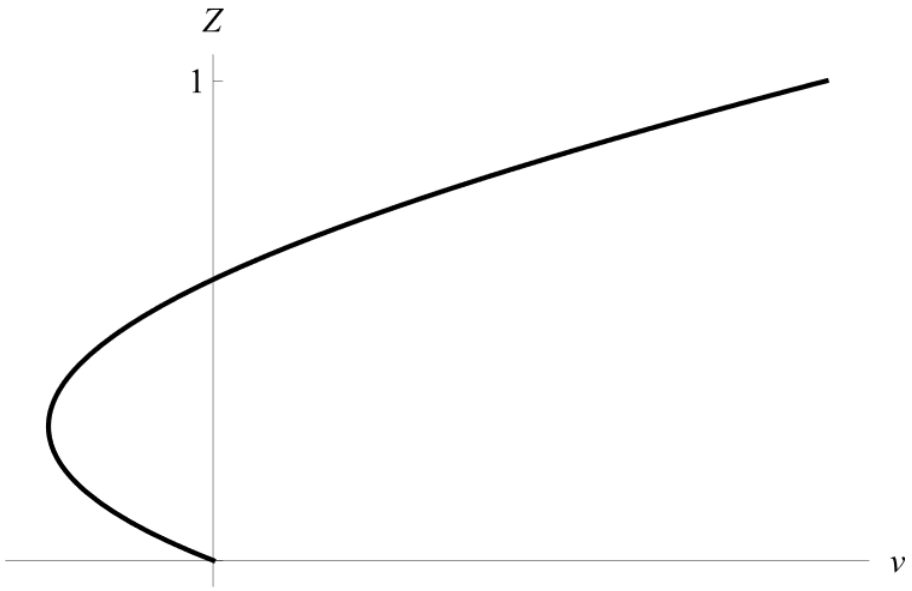

Рисунок 6 - Профиль скорости v при $a_0 = a_5 = 0$, $a_1 a_2 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.6

II.3) Пусть $a_0 = a_1 = 0, a_2 a_5 \neq 0$

Этот случай возможен при $\frac{h^2 S_1}{2v} = \frac{Agh^3\beta}{4v} - \frac{Bgh^5\beta\Omega}{120v\chi}, W \sin\varphi - \frac{Agh^3\beta}{8v} - \frac{143Bgh^5\beta\Omega}{10080v\chi} = 0, A \neq 0, B\Omega \neq 0.$

Скорость *v* имеет не более двух нулей в слое $Z \in [0, 1],$ что показано на рисунке 7.

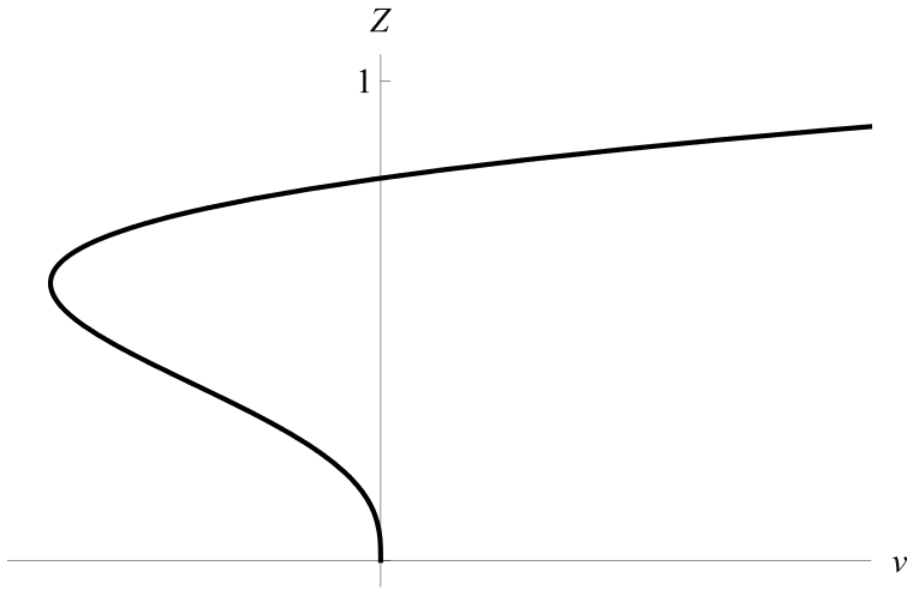

Рисунок 7 - Профиль скорости v при $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 a_5 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.7

II.4) Пусть $a_1 = a_2 = 0, a_0 a_5 \neq 0$

Данная ситуация реализуется при $A = 0, B\Omega \neq 0, \frac{Bgh^5\beta\Omega}{120v\chi} = -\frac{h^2 S_1}{2v}$

Исследовав монотонность функции, выясняем, что *f* монотонна на всем промежутке (0,1) и поэтому может иметь лишь один нуль внутри рассматриваемого слоя. Соответствующий профиль скорости *v* изображен на рис. 8.

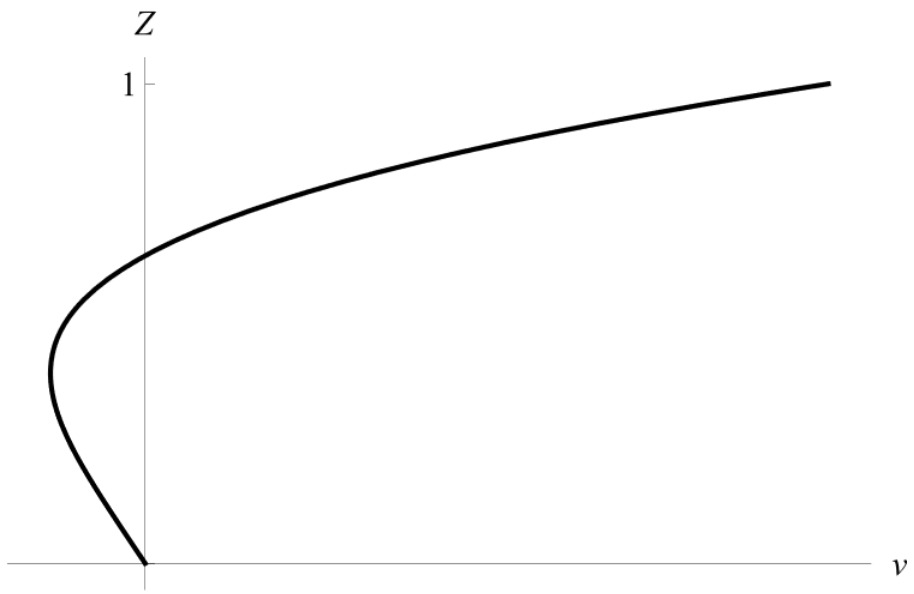

Рисунок 8 - Профиль скорости v при $a_1 = a_2 = 0$, $a_1 a_5 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.8

II.5) Пусть $a_0 = a_2 = 0, a_1 a_5 \neq 0$

Этот случай возможен при $B\Omega \neq 0, A = 0, W \sin\varphi - \frac{h^2 S_1}{2v} = \frac{59Bgh^3\beta\Omega}{10080v\chi}$. Так как функция оказывается монотонной на отрезке [0,1], она имеет лишь один нуль на этом отрезке. Получаем профиль, представленный на рисунке 9.

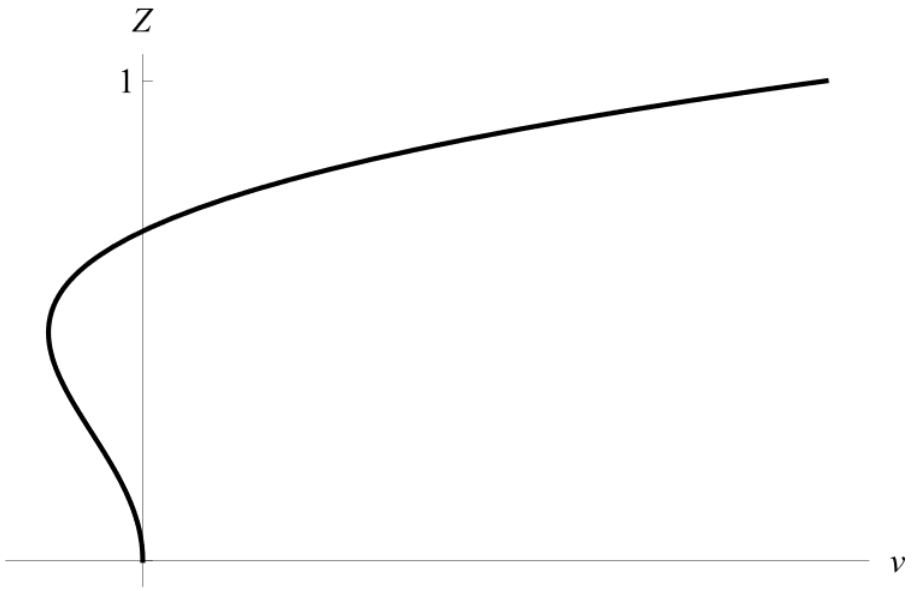

Рисунок 9 - Профиль скорости v при $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 a_5 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.9

II.6) Пусть $a_1 = a5 = 0, a_0 a_2 \neq 0$

Этот случай осуществим при $A \neq 0, B\Omega = 0, \frac{h^2 S_1}{2v} = \frac{\mathrm{Agh}^3 \beta}{4v}$. Функция строго монотонна на этом интервале (0,1) и имеет одну нулевую точку (см. рисунок 10).

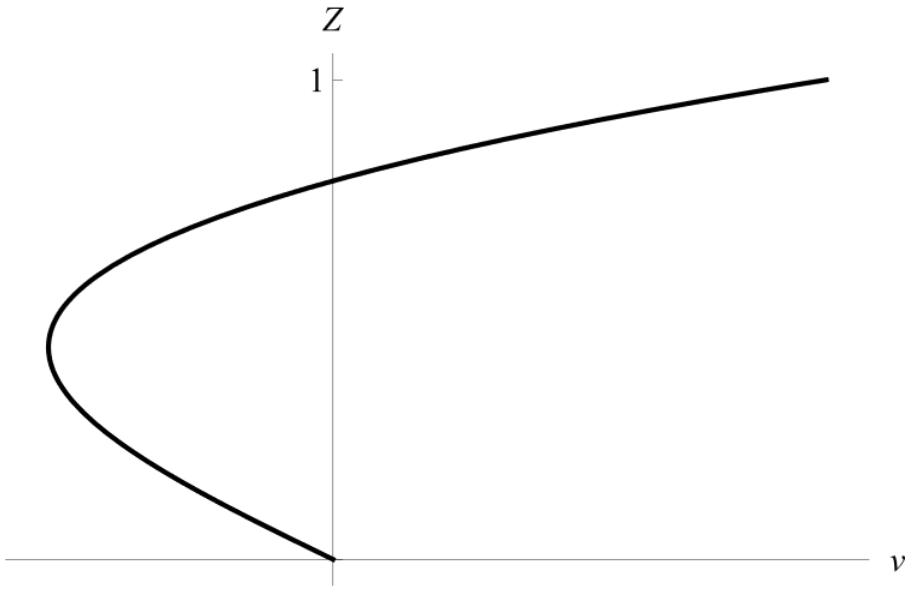

Рисунок 10 - Профиль скорости v при $a_1 = a_5 = 0$, $a_0 a_2 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.10

Заметим, что в случаях II.1)-II.6) (и на рисунках 5-10 соответственно) прослеживается закономерность: для случаев с двумя (из четырех) равными нулю параметрами $a_i \quad (i = 0, 1, 2, 5)$ скорость *v* имеет внутри исследуемого слоя лишь одну застойную точку.

Группа III: ровно три коэффициента из $a_i \quad (i = 0, 1, 2, 5)$ равны нулю.

III.1) Пусть $a_0 = a1 = a2 = 0, a_5 \neq 0$

Тогда $A = 0, B\Omega \neq 0, \frac{Bgh^5 \beta\Omega}{120 v\chi} = -\frac{h^2 S_1}{2v}, W \sin\varphi = -\frac{5Bgh^5 \beta\Omega}{2016 v\chi}$. На отрезке [0,1] полином *f* строго монотонен и при этом имеет экстремум в точке *Z=0*, то есть функция *f*, преодолевая *Z=0* далее либо возрастает, либо убывает, не пересекая ось *Z*. Профиль скорости *v* в этом случае представлен на рисунке 11.

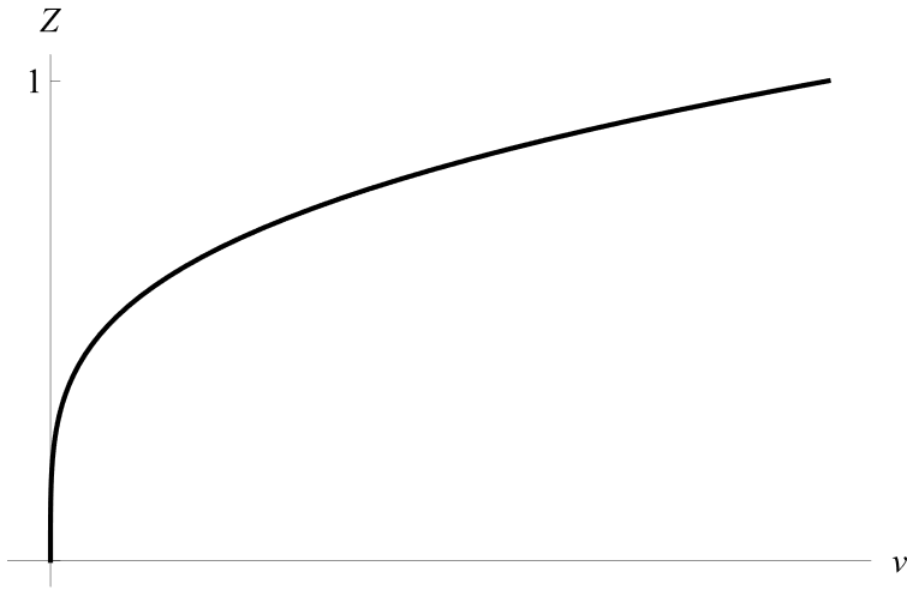

Рисунок 11 - Профиль скорости v при $a_0 = a_1 = a_5 = 0$, $a_2 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.11

III.2) Пусть $a_0 = a_1 = a_5 = 0, a_2 \neq 0$ ·

Этот случай реализуется при $A \neq 0, B\Omega = 0, \frac{h^2 S_1}{2v} = \frac{Agh^3\beta}{4v}, W \sin\varphi = \frac{Agh^3\beta}{8v}$. На промежутке (0,1) нулей функция не имеет. Тогда скорость *v* в слое $Z \in [0,1],$ имеет единственный нуль на границе *Z=0* рассматриваемого слоя и ни одного нуля внутри (см. рисунок 12).

Рисунок 12 - Профиль скорости v при $a_0 = a_1 = a_5 = 0$, $a_2 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.12

Заметим, что случаи III.3) $a_1 = a_2 = a_5 = 0, a_0 \neq 0$ и III.4) $a_0 = a_2 = a_5 = 0, a_1 \neq 0$ обсуждались выше ввиду их тривиальности.

Аналогично предыдущим выводам, подведем итог, что для вариантов с тремя нулевыми коэффициентами и $a_i \quad (i = 0, 1, 2, 5)$ скорость *v* не имеет внутри слоя $Z \in [0,1],$ застойных точек вовсе (см. рисунки 11-12).

Группа IV: ни один из коэффициентов $a_i \quad (i = 0, 1, 2, 5)$ не равен нулю

В эту группу попадает только один случай, он вынесен в классификацию этой группы. Это наиболее общий случай из исследуемых. Это возможно при $A \neq 0, B\Omega \neq 0, S_1 \neq 0, W \sin\varphi \neq 0$, но не только при этом сочетании значений параметров. Функция *f* из выражения (7) является линейной комбинацией трех монотонных на исследуемом интервале функций. Из чего следует, что компонента скорости *v* имеет внутри рассматриваемого слоя $Z \in [0,1],$ не более трех точек застоя [9]. Данный факт проиллюстрирован на рисунке 13.

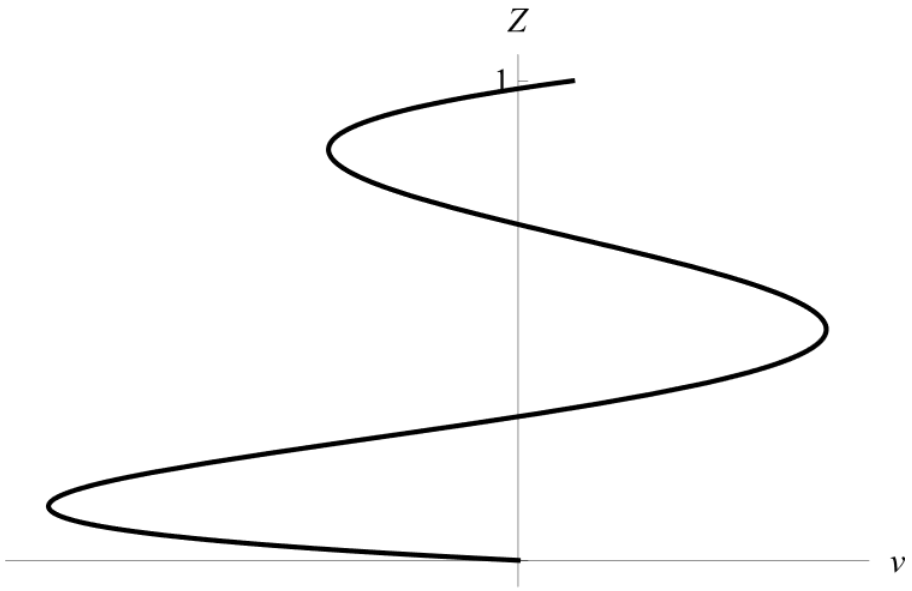

Рисунок 13 - Профиль скорости v при $a_0 a_1 a_2 a_5 \neq 0$
DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.13

Рассмотрев различные вариации значений параметров для скорости v, получили, что компонента скорости может как не иметь нулей в рассматриваемом слое вовсе, так и иметь не более трех застойных точек внутри слоя, таким образом разделяя его на четыре подслоя с возможной сменой направления течения (см. рисунок 13).

Анализ скорости u

Перейдем к анализу компоненты u скорости V_x, описываемой решением (6). Для скорости u справедливо представление

$$u = Z\left[-\frac{Bgh^7\beta\Omega^2}{226800v^2\chi}Z^9 + \frac{Bgh^7\beta\Omega^2}{51840v^2\chi}Z^8 - \left(\frac{Bgh^7\beta\Omega^2}{12096v^2\chi} + \frac{Agh^5\beta\Omega}{1008v^2}\right)Z^6 + \frac{Agh^5\beta\Omega}{180v^2}Z^5 + \right.$$
$$+\left(\frac{Bgh^7\beta\Omega^2}{2400v^2\chi} + \frac{h^4\Omega S_1}{40v^2} - \frac{Agh^5\beta\Omega}{80v^2}\right)Z^4 +$$
$$+\left(\frac{Agh^5\beta\Omega}{96v^2} - \frac{Bgh^3\beta}{24v} - \frac{59Bgh^7\beta\Omega^2}{120960v^2\chi} + \frac{Wh^2\Omega\sin\varphi}{12v} - \frac{h^4\Omega S_1}{24v^2}\right)Z^3 +$$
$$+\frac{Bgh^3\beta}{6v}Z^2 + \left(\frac{h^2S_2}{2v} - \frac{Bgh^3\beta}{4v}\right)Z +$$
$$\left.+\left(W\cos\varphi + \frac{Bgh^3\beta}{8v} - \frac{5Agh^5\beta\Omega}{2016v^2} + \frac{Bgh^7\beta\Omega^2}{7200v^2\chi} - \frac{h^2W\Omega\sin\varphi}{12v} + \frac{h^4\Omega S_1}{60v^2} - \frac{h^2S_2}{2v}\right)\right] = Zg(Z).$$

Произведем замену для упрощения дальнейших рассуждений.

$$g(Z) = b_9Z^9 + b_8Z^8 + b_6Z^6 + b_5Z^5 + b_4Z^4 + b_3Z^3 + b_2Z^2 + b_1Z + b_0,$$

где индексы i коэффициентов b_i соответствуют степени вертикальной координаты Z и

$$b_9 = -\frac{Bgh^7\beta\Omega^2}{226800v^2\chi}, b_8 = \frac{Bgh^7\beta\Omega^2}{51840v^2\chi}, b_6 = -\left(\frac{Bgh^7\beta\Omega^2}{12096v^2\chi} + \frac{Agh^5\beta\Omega}{1008v^2}\right), b_5 = \frac{Agh^5\beta\Omega}{180v^2},$$

$$b_4 = \frac{Bgh^7\beta\Omega^2}{2400v^2\chi} + \frac{h^4\Omega S_1}{40v^2} - \frac{Agh^5\beta\Omega}{80v^2}, b_3 = \frac{Agh^5\beta\Omega}{96v^2} - \frac{Bgh^3\beta}{24v} - \frac{59Bgh^7\beta\Omega^2}{120960v^2\chi} + \frac{Wh^2\Omega\sin\varphi}{12v} - \frac{h^4\Omega S_1}{24v^2},$$

$$b_2 = \frac{Bgh^3\beta}{6v}, b_1 = \frac{h^2S_2}{2v} - \frac{Bgh^3\beta}{4v},$$

$$b_0 = W\cos\varphi + \frac{Bgh^3\beta}{8v} - \frac{5Agh^5\beta\Omega}{2016v^2} + \frac{Bgh^7\beta\Omega^2}{7200v^2\chi} - \frac{h^2W\Omega\sin\varphi}{12v} + \frac{h^4\Omega S_1}{60v^2} - \frac{h^2S_2}{2v}.$$

Заметим, что не все коэффициенты являются независимыми

$$b_9 = -\frac{35}{8}b_8$$

$$b_6 = -\left(\frac{30}{7}b_8 + \frac{5}{28}b_5\right)$$

Тогда функция g преобразуется к виду:

$$g(Z) = -\frac{35}{8}b_8Z^9 + b_8Z^8 - \left(\frac{30}{7}b_8 + \frac{5}{28}b_5\right)Z^6 + b_5Z^5 + b_4Z^4 + b_3Z^3 + b_2Z^2 + b_1Z + b_0 =$$

$$= b_8\left(-\frac{35}{8}Z^9 + Z^8 - \frac{30}{7}Z^6\right) + b_5\left(-\frac{5}{28}Z^6 + Z^5\right) + b_4Z^4 + b_3Z^3 + b_2Z^2 + b_1Z + b_0.$$

В итоге компонента скорости *u* представима в виде:

$$u = Zg(Z) = Z\left(b_8Z^6\left(-\tfrac{35}{8}Z^3 + Z^2 - \tfrac{30}{7}\right) + b_5Z^5\left(-\tfrac{5}{28}Z + 1\right) + b_4Z^4 + b_3Z^3 + b_2Z^2 + b_1Z + b_0\right) \qquad (9)$$

Из структуры выражения (9) видно, что скорость *u* принимает нулевое значение на нижней границе исследуемого слоя *Z=0* Для нахождения остальных нулевых точек, необходимо подробнее рассмотреть поведение функции *g*. Как и при анализе скорости *v*, можно рассмотреть все возможные сочетания значений коэффициентов $b_i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8)$, но это очень трудоемкая и не эффективная аналитическая работа, так как в случае анализа функции (9) на наличие нулей придется рассмотреть 128 вариантов. Избегая такой ситуации, рассмотрим сразу общий случай (9) когда $b_0b_1b_2b_3b_4b_5b_8 \neq 0$.

Скорость *u* (9) может принимать нулевое значение внутри слоя, только если полином *g* имеет на интервале (0,1) действительные корни.

Компонента скорости *u* может иметь внутри слоя $Z \in [0, 1]$ не более шести застойных точек (см. рисунок 14).

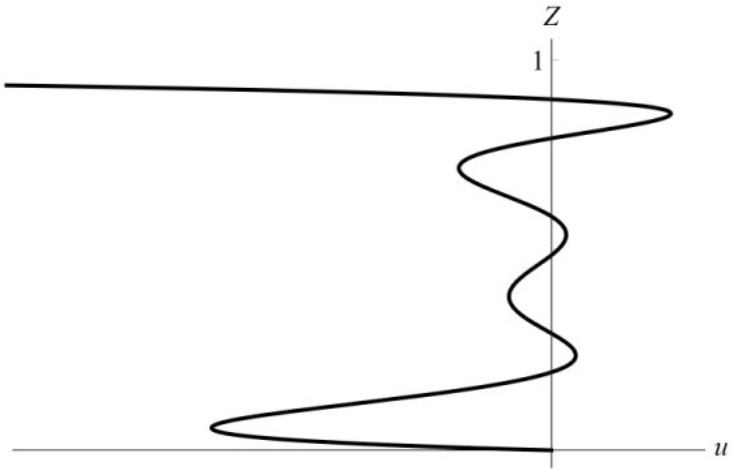

Рисунок 14 - Профиль скорости u при $b_0b_1b_2b_3b_4b_5b_8 \neq 0$

DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.143.180.14

Заключение

В данной статье рассмотрена краевая задача, описывающая конвективное течение вязкой несжимаемой вертикально завихренной жидкости в горизонтальном слое. Получено ее точное решение при условии прилипания жидкости на нижней границе слоя. Рассмотрено возможное поведение поля скорости течения в зависимости от задаваемых на верхней границе исследуемого слоя жидкости условий. Было показано, что в слое жидкости могут возникать области с обратным течением, причем в рассматриваемом слое может существовать не более четырех подслоев с разным направлением течения. Показано, что число застойных точек (и соответственно подслоев) может меняться в зависимости от значений параметров краевой задачи. Также было показано, что могут существовать области, в которых касательное напряжение меняет свой тип – с растягивающего на сжимающее и наоборот. В ходе работы также были получены аналитические выражения для компонент полей температуры и давления. Анализ этих выражений не вошел в содержание данной статьи.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. — М.: Наука, 1972. — 392 с.

2. Лаврентьев М.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — 2-е изд. — М.: Наука, 1973. — 417 с.

3. Goldstein S. Modern Developments in Fluid Mechanics – II / S. Goldstein. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1938.

4. Lin C.C. Note on a Class of Exact Solutions in Magneto-Hydrodynamics / C.C. Lin // Arch. Rational Mech. Anal. — 1958. — Vol. 1. — Is. 1. — P. 391-395.

5. Сидоров А.Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн / А.Ф. Сидоров // Прикладная механика и теоретическая физика. — 1989. — Т. 2. — С. 34-40.

6. Аристов С.Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости: автореф. дис. докт. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Аристов Сергей Николаевич. — Владивосток: ИАПУ, 1990. — 32 с.

7. Аристов С.Н. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии / С.Н. Аристов, Е.Ю. Просвиряков // Теоретические основы химической технологии. — 2016. — Т. 50. — № 3. — С. 294-301. — DOI: 10.7868/S0040357116030027

8. Navier C.L.M.H. M'emoire sur les Lois du mouvement des fluides / C.L.M.H. Navier // M'em. Acad. Sci. Inst. de France. — 1823. — Vol. 2. — № 6. — P. 389-440.

9. Burmasheva N.V. Studying the Stratification of Hydrodynamic Fields for Laminar Flows of Vertically Swirling Fluids / N.V. Burmasheva, E.Yu. Prosviryakov. — 2020. — Iss. 4. — P. 62-78. — DOI: 10.17804/2410-9908.2020.4.062-078.

10. Burmasheva N.V. Convective Layered Flows of a Vertically Whirling Viscous Incompressible Fluid. Velocity Field Investigation / N.V. Burmasheva, E.Yu. Prosviryakov. — Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math.Sci.]. — 2019. — Vol. 23. — No. 2. — P. 341-360. — DOI: 10.14498/vsgtu1670.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Gershuni G.Z. Konvektivnaya ustojchivost' neszhimaemoj zhidkosti [Convective Stability of an Incompressible Fluid] / G.Z. Gershuni, E.M. Zhuhovickij. — Moscow, Nauka, 1972. — 392 p. [in Russian]

2. Lavrent'ev M.A. Problemy gidrodinamiki i ih matematiche-skie modeli [Problems of Hydrodynamics and Their Mathematical Models] / M.A. Lavrent'ev, B.V. Shabat. — 2nd ed. — Moscow, Nauka, 1972. — 417 p. [in Russian]

3. Goldstein S. Modern Developments in Fluid Mechanics – II / S. Goldstein. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1938.

4. Lin C.C. Note on a Class of Exact Solutions in Magneto-Hydrodynamics / C.C. Lin // Arch. Rational Mech. Anal. — 1958. — Vol. 1. — Is. 1. — P. 391-395.

5. Sidorov A.F. O dvuh klassah reshenij uravnenij mekhaniki zhidkosti i gaza i ih svyazi s teoriej begushchih voln [On Two Classes of Solutions to Equations of Fluid and Gas Mechanics and Their Connection with the Theory of Traveling Waves] / A.F. Sidorov // Prikladnaya mekhanika i teoreticheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]. — 1989. — Vol. 2. — P. 34-40. [in Russian]

6. Aristov S.N. Vihrevye techeniya v tonkih sloyah zhidkosti [Vortex Phenomena in Thin Layers of Liquid: abstract. dis. Doc. Physics and Mathematics Sciences: 01.02.05/ Aristov Sergey Nikolaevich // — Vladivostok, IACP. —1990. — 32 p. [in Russian]

7. Aristov S.N. Novyj klass tochnyh reshenij trekhmernyh uravnenij termodiffuzii [A New Class of Exact Solutions to Three-Dimensional Thermal Diffusion Equations] / S.N. Aristov, E.YU. Prosviryakov // Teoreticheskie osnovy himicheskoj tekhnologii [Journal of Theoretical Foundations of Chemical Engineering]. — 2016. — Vol. 50. — № 3. — P. 294-301. — DOI: 10.7868/S0040357116030027 [in Russian]

8. Navier C.L.M.H. M'emoire sur les Lois du mouvement des fluides [Memoir on the Laws of Fluid Motion] / C.L.M.H. Navier // M'em. Acad. Sci. Inst. de France [Math. Acad. Sci. Inst. of France]. — 1823. — Vol. 2. — № 6. — P. 389-440. [in French]

9. Burmasheva N.V. Studying the Stratification of Hydrodynamic Fields for Laminar Flows of Vertically Swirling Fluids / N.V. Burmasheva, E.Yu. Prosviryakov. — 2020. — Iss. 4. — P. 62-78. — DOI: 10.17804/2410-9908.2020.4.062-078.

10. Burmasheva N.V. Convective Layered Flows of a Vertically Whirling Viscous Incompressible Fluid. Velocity Field Investigation / N.V. Burmasheva, E.Yu. Prosviryakov. — Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math.Sci.]. — 2019. — Vol. 23. — No. 2. — P. 341-360. — DOI: 10.14498/vsgtu1670.