О РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДВУХ СИНГУЛЯРНЫХ МЕР, ПОРОЖДЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМ РЯДОМ

Научная статья

Латухина Ю.А.[1,] *, Латухин А.Ю.[2]
[1] ORCID : 0000-0003-4183-3140;
[1, 2] Нижегородский государственный технический университет Дзержинский политехнический институт (филиал), Дзержинск, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (julia[at]latukhina.ru)

Аннотация
Сингулярные меры в теории функций очень мало изучены, в отличие от непрерывных и дискретных мер. Чтобы восполнить этот пробел, авторами статьи были рассмотрены сингулярные меры, порожденные стохастической процедурой с использованием однородной марковской цепи. С другой стороны, данные меры также могут быть рассматриваться как преобразования Фурье вероятностного распределения рассматриваемого стохастического ряда.

В [10] были описаны и доказаны основные свойства рассматриваемых мер, с помощью которых можно будет, во-первых, продолжить изучение сингулярных мер на данном примере, а во-вторых, попытаться применить полученные математические результаты в статистике, теории информации, обработке сигналов.

В данной статье изучена взаимосвязь двух сингулярных мер и получены рекуррентные соотношения, связывающие их друг с другом.

Полученные результаты, помимо их математической красоты, могут в дальнейшем использоваться для изучения асимптотического поведения данных вероятностных мер, нахождения их нулей, а также более подробного исследования их свойств как сингулярных мер.

Ключевые слова: сингулярная мера, вероятностная мера, стохастический ряд, марковская цепь, преобразование Фурье.

Введение

Рассмотрим стохастическую последовательность знаков $\{\pm\}$. Можно считать, что любая такая последовательность является реализацией случайного процесса $\{X_n\}_{k=0}^{n}$, определенного на вероятностном пространстве (Ω, β, P), где $\Omega = \{\omega | \omega = (t_1, ..., t_n, ...), t_k = \pm 1\}$ – пространство последовательностей $\{\pm 1\}$, β – алгебра, порожденная конечномерными цилиндрами $\{I_{fin} = \times_{k=0}^{\infty} A_k\}$, где все A_k, за исключением, быть может, конечного числа, которые равны {+1} или {–1}, совпадают с {+1,–1}.

Стохастические свойства последовательности знаков определяются свойствами вероятностной меры P, определяемой, в свою очередь, согласованным свойством конечномерных распределений $\{P_n(t_0, ..., t_n) \equiv P(X_0 = t_0, ..., X_n = t_n), t_k = \pm 1\}$.

Счетный случайный процесс $\{X_n\}_{k=0}^{\infty}$ с пространством состояний {+1,–1} называется простой однородной марковской цепью, если справедливо соотношение

$$P_n(t_0, ..., t_n) = p(t_0) \prod_{k=0}^{n-1} p(t_{k-1} | t_k) \ \ \forall n \in N, \ t_k = \pm 1 \quad (1)$$

где $p(t_{k-1} | t_k)$ – переходные вероятности за один шаг, то есть $p(t_{k-1} | t_k) = p(X_{k-1} = t_{k-1} | X_k = t_k)$.

Рассмотрим ряд

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \xi^k, \ \ 0 < \xi < \frac{1}{2} \quad (2)$$

где $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$ – марковская цепь.

Существует взаимно-однозначное соответствие между функциями распределения и вероятностными мерами на $\mathbb{R}^1$. Если задана произвольная функция распределения F, то соответствующая ей вероятностная мера P_F определяется своими значениями в классе всех открытых слева и замкнутых справа интервалов.

И обратно, если задана вероятностная мера P на $\mathbb{R}^1$, то соответствующая ей функция распределения определяется равенством $F_P(x) = P(-\infty, x]$.

С помощью введенных обозначений соответствие между множеством всех функций распределения F и множеством всех вероятностных мер P может быть выражено следующим образом:

$P_{F_P} = P$ и $F_{P_F} = F$.

Таким образом, все утверждения для функций распределения справедливы и для вероятностных мер.

Вероятностное распределение суммы ряда (2) является сингулярной мерой, носитель которой – канторовское множество с постоянным отношением разбиения ξ. Сингулярность меры означает, что все точки роста данной функции принадлежат некоторому множеству N нулевой меры Лебега, так что выполняется равенство $P_F(N) = 1$.

В данной статье рассмотрим сингулярные меры, порожденные стохастической процедурой, описываемой (1) и (2), с точки зрения изучения их свойств и взаимосвязи.

Для краткости изложения введем следующие обозначения:

$\vec{t} = (t_0, t_1, ..., t_n),\ t_k = \pm 1$;

$\vec{z} = (z_0, z_1, ..., z_n),\ z_k \in \mathbb{C}$;

$\vec{y} = (y_0, y_1, ..., y_n),\ y_k = Im(z_k)$;

$\vec{z} \cdot \vec{t} = z_0 \cdot t_0 + z_1 \cdot t_1 + ... + z_n \cdot t_n$.

Характеристическая функция системы $\{X_k\}_{k=0}^{n}$ имеет вид:

$$\varphi_n(\vec{z}) = \int_{\Omega} e^{i\vec{z}\cdot\vec{t}} dP_n(\vec{t}) \tag{3}$$

и, согласно определению, является преобразованием Фурье совместного распределения $P_n(\vec{t})$.

Кроме этого, рассмотрим функцию, которая также является сингулярной вероятностной мерой

$$\psi_n(\vec{z}) = \int_{\Omega} t_n e^{i\vec{z}\cdot\vec{t}} dP_n(\vec{t}) \tag{4}$$

Для совместного распределения системы, связанной простой марковской зависимостью с матрицей переходных вероятностей, справедливо соотношение:

$$P_n(\vec{t}) = \frac{1}{2^{n+1} ch^n \gamma} e^{\gamma \sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{k+1}},\quad \gamma = \frac{1}{2} ln \frac{1-\alpha}{\alpha} \tag{5}$$

и $\gamma > 0$ при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

В отличие от непрерывных и дискретных мер, сингулярные меры в теории функций изучены не в полной мере. В данной статье будет рассмотрена связь между сингулярными мерами (3) и (4) и доказаны рекуррентные соотношения, связывающие эти меры друг с другом.

Реккурентное соотношение для сингулярных мер, порожденных простой однородной марковской цепью

Теорема 1. Для сингулярных мер, определяемых соотношениями (3) и (4), справедливо рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(z) &= cos(\xi^{n+1} z) \cdot \varphi_n(z) + i\, sin(\xi^{n+1} z)\, th\gamma \cdot \psi_n(z) \\ \psi_{n+1}(z) &= i\, sin(\xi^{n+1} z) \cdot \varphi_n(z) + cos(\xi^{n+1} z)\, th\gamma \cdot \psi_n(z) \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство.

Сначала покажем справедливость (6) для сингулярной меры $\varphi_n(z)$.

Обозначив $\vec{\xi}^n = (1, \xi, \xi^2, ..., \xi^n)$ и воспользовавшись представлением (5), можно записать

$$\varphi_n(z) = \int_{\Omega} e^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t}} dP_n(\vec{t}) = \frac{1}{2^{n+1} ch^n \gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t} + \gamma\sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{k+1}} d\prod_{k=0}^{n} \delta(t_k^2 - 1).$$

То есть

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{2^{n+1} ch^n \gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t} + \gamma\sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{k+1}} d\prod_{k=0}^{n} \delta(t_k^2 - 1) \tag{7}$$

Для n+1 имеем:

$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{1}{2^{n+2} ch^{n+1} \gamma} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{iz(\vec{\xi}^n\cdot\vec{t} + \xi^{n+1} t_{n+1}) + \gamma\sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{k+1} + \gamma t_n t_{n+1}} d\prod_{k=0}^{n+1} \delta(t_k^2 - 1) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+2} ch^{n+1} \gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t} + \gamma\sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{k+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^1} e^{iz\xi^{n+1} t_{n+1} + \gamma t_n t_{n+1}} d\delta(t_{n+1}^2 - 1) \right) d\prod_{k=0}^{n} \delta(t_k^2 - 1) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+2} ch^{n+1} \gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t} + \gamma\sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{k+1}} \left(e^{-iz\xi^{n+1} - \gamma t_n} + e^{iz\xi^{n+1} + \gamma t_n} \right) d\prod_{k=0}^{n} \delta(t_k^2 - 1) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1} ch^{n+1} \gamma} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t} + \gamma\sum_{k=0}^{n-1} t_k t_{k+1}} ch(iz\xi^{n+1} + \gamma t_n)\, d\prod_{k=0}^{n} \delta(t_k^2 - 1).$$

Отсюда, используя формулу сложения $ch(\alpha + \beta) = ch\alpha\, ch\beta + sh\alpha\, sh\beta$, получаем

$$ch(iz\xi^{n+1} + \gamma t_n) = ch(iz\xi^{n+1}) \cdot ch(\gamma t_n) + sh(iz\xi^{n+1}) \cdot sh(\gamma t_n).$$

Ввиду четности косинуса гиперболического и нечетности синуса гиперболического, а также того, что $t_n = \pm 1$, справедливы равенства $ch(\gamma t_n) = ch\gamma$ и $sh(\gamma t_n) = t_n sh\gamma$. Поэтому

$ch(iz\xi^{n+1}+\gamma t_n)=cos(\xi^{n+1}z)\cdot ch\gamma+i\,sin(\xi^{n+1}z)\cdot t_n\cdot sh\gamma$.

Отсюда

$$\varphi_{n+1}(z)=\frac{1}{2^{n+1}ch^{n+1}\gamma}cos(\xi^{n+1}z)ch\gamma\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t}+\gamma\sum\limits_{k=0}^{n-1}t_kt_{k+1}}d\prod_{k=0}^{n}\delta(t_k^2-1)+$$

$$+\frac{1}{2^{n+1}ch^{n+1}\gamma}i\,sin(\xi^{n+1}z)sh\gamma\int\limits_{\mathbb{R}^n}t_ne^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t}+\gamma\sum\limits_{k=0}^{n-1}t_kt_{k+1}}d\prod_{k=0}^{n}\delta(t_k^2-1)=$$

$$=cos(\xi^{n+1}z)ch\gamma\cdot\varphi_n(z)+i\,sin(\xi^{n+1}z)sh\gamma\cdot\psi_n(z)\ .$$

Итак, имеем формулу для $\varphi_{n+1}(z)$ в (6).

$$\varphi_{n+1}(z)=cos(\xi^{n+1}z)\cdot\varphi_n(z)+i\,sin(\xi^{n+1}z)\,th\gamma\cdot\psi_n(z)\ .$$

Аналогично получается (6) для $\psi_{n+1}(z)$.

$$\psi_{n+1}(z)=\frac{1}{2^{n+2}ch^{n+1}\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}t_{n+1}e^{iz(\vec{\xi}^n\cdot\vec{t}+\xi^{n+1}t_{n+1})+\gamma\sum\limits_{k=0}^{n-1}t_kt_{k+1}+\gamma t_nt_{n+1}}d\prod_{k=0}^{n+1}\delta(t_k^2-1)=$$

$$=\frac{1}{2^{n+2}ch^{n+1}\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t}+\gamma\sum\limits_{k=0}^{n-1}t_kt_{k+1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}t_{n+1}e^{iz\xi^{n+1}t_{n+1}+\gamma t_nt_{n+1}}d\delta(t_{n+1}^2-1)\right)d\prod_{k=0}^{n}\delta(t_k^2-1)=$$

$$=\frac{1}{2^{n+2}ch^{n+1}\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t}+\gamma\sum\limits_{k=0}^{n-1}t_kt_{k+1}}\left(e^{iz\xi^{n+1}+\gamma t_n}-e^{-iz\xi^{n+1}-\gamma t_n}\right)d\prod_{k=0}^{n}\delta(t_k^2-1)=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}ch^{n+1}\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{iz\vec{\xi}^n\cdot\vec{t}+\gamma\sum\limits_{k=0}^{n-1}t_kt_{k+1}}sh(iz\xi^{n+1}+\gamma t_n)\,d\prod_{k=0}^{n}\delta(t_k^2-1)\ .$$

Учитывая формулу сложения $sh(\alpha+\beta)=sh\alpha\,ch\beta+ch\alpha\,sh\beta$, получаем:

$$sh(iz\xi^{n+1}+\gamma t_n)=sh(iz\xi^{n+1})\cdot ch(\gamma t_n)+ch(iz\xi^{n+1})\cdot sh(\gamma t_n)=$$

$$=i\,sin(\xi^{n+1}z)\cdot ch\gamma+cos(\xi^{n+1}z)\cdot t_n\cdot sh\gamma\ .$$

Таким образом, получаем формулу для $\psi_{n+1}(z)$ из (6):

$$\psi_{n+1}(z)=i\,sin(\xi^{n+1}z)\cdot\varphi_n(z)+cos(\xi^{n+1}z)\,th\gamma\cdot\psi_n(z)\ .$$

Теорема полностью доказана.

Перед тем как привести еще один вариант рекуррентного соотношения, связывающего сингулярные меры, порожденные стохастическим рядом (2), сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Справедливо равенство $th\gamma=1-2\alpha$.

Доказательство.

По определению гиперболического тангенса имеем

$$th\gamma=\frac{e^\gamma-e^{-\gamma}}{e^\gamma+e^{-\gamma}}=\frac{e^\gamma+e^{-\gamma}-2e^{-\gamma}}{e^\gamma+e^{-\gamma}}=1-2\frac{e^{-\gamma}}{e^\gamma+e^{-\gamma}}\ .$$

Согласно (5)

$$\gamma=\frac{1}{2}ln\frac{1-\alpha}{\alpha}\ .$$

Тогда можно представить $e^{-\gamma}$ в виде:

$$e^{-\gamma}=e^{-\frac{1}{2}ln\frac{1-\alpha}{\alpha}}=e^{ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Аналогично получаем, что

$$e^\gamma=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

И поэтому

$$th\gamma=1-2\frac{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}=1-2\frac{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1-\alpha+\alpha}{(\alpha(1-\alpha))^{\frac{1}{2}}}}=1-2\frac{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{(\alpha(1-\alpha))^{\frac{1}{2}}}}=1-2\left(\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}=1-2\alpha\ .$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Справедливо неравенство $th\gamma>0$.

Доказательство.

Так как $0<\alpha<\frac{1}{2}$, то $th\gamma=1-2\alpha>0$.

Лемма доказана.

Для краткости записи обозначим $q=th\gamma$. Тогда (6) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(z)&=cos(\xi^{n+1}z)\cdot\varphi_n(z)+iq\,sin(\xi^{n+1}z)\cdot\psi_n(z)\\ \psi_{n+1}(z)&=i\,sin(\xi^{n+1}z)\cdot\varphi_n(z)+q\,cos(\xi^{n+1}z)\cdot\psi_n(z)\end{aligned}\qquad(8)$$

Получим еще одну формулу для характеристической функции $\varphi_n(z)$.

Согласно равенству (7) имеем

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{iz\xi^0t}d\delta(t^2-1)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^1}e^{izt}d\delta(t^2-1)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=cosz\ .$$

Подставив n=0 в соотношение (8) и учитывая только что полученное равенство, можно записать

$\varphi_1(z) = cos(\xi z)\, cosz + iq\, sin(\xi z) \cdot \psi_0(z)$ &

При n=1 из (8) и равенств, полученных ранее, имеем

$$\varphi_2(z) = cos(\xi^2 z) \cdot \varphi_1(z) + iq\, sin(\xi^2 z) \cdot \psi_1(z) =$$
$$= cos(\xi^2 z)\, cos(\xi z)\, cosz + iq \left(cos(\xi^2 z)\, sin(\xi z) \cdot \psi_0(z) + sin(\xi^2 z) \cdot \psi_1(z) \right) \cdot$$

Аналогично рассуждая, получим при n=2:

$$\varphi_3(z) = cos(\xi^3 z) \cdot \varphi_2(z) + iq\, sin(\xi^3 z) \cdot \psi_2(z) = \prod_{k=0}^{3} cos(\xi^k z) +$$
$$+ iq(cos(\xi^3 z)\, cos(\xi^2 z)\, sin(\xi z) \cdot \psi_0(z) + cos(\xi^3 z)\, sin(\xi^2 z) \cdot \psi_1(z) + sin(\xi^3 z) \cdot \psi_2(z)) \cdot$$

При n=3:

$$\varphi_4(z) = cos(\xi^4 z) \cdot \varphi_3(z) + iq\, sin(\xi^4 z) \cdot \psi_3(z) = \prod_{k=0}^{4} cos(\xi^k z) +$$
$$+ iq(cos(\xi^4 z)\, cos(\xi^3 z)\, cos(\xi^2 z)\, sin(\xi z) \cdot \psi_0(z) + cos(\xi^4 z)\, cos(\xi^3 z)\, sin(\xi^2 z) \cdot \psi_1(z) +$$
$$+ cos(\xi^4 z)\, sin(\xi^3 z) \cdot \psi_2(z) + sin(\xi^4 z) \cdot \psi_3(z)) \cdot$$

И так далее.

Таким образом, можно сделать предположение, что справедлива следующая

Теорема 2.

Для сингулярных мер $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$, определяемых соотношениями (3) и (4) соответственно, справедливо рекуррентное соотношение

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=0}^{n} cos(\xi^k z) + iq \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z)\, sin(\xi^{j+1} z) \qquad (9)$$

Доказательство.

Обоснуем справедливость (9) с помощью метода математической индукции.

Как было показано ранее, при n=0 имеем

$$\varphi_0(z) = cosz \ ,$$

Нетрудно видеть, что данное выражение удовлетворяет (9).

Таким образом, при n=0 соотношение (9) выполняется. Далее предположим, что (9) уже доказано для n. Докажем, что из этого предположения вытекает справедливость рекуррентного соотношения (9) и для n+1.

Согласно формуле (8),

$$\varphi_{n+1}(z) = cos(\xi^{n+1} z) \cdot \varphi_n(z) + iq\, sin(\xi^{n+1} z) \cdot \psi_n(z) \cdot$$

Так как по нашему предположению соотношение (9) справедливо для $\varphi_n(z)$, то отсюда следует, что

$$\varphi_{n+1}(z) = cos(\xi^{n+1} z) \left(\prod_{k=0}^{n} cos(\xi^k z) + iq \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z)\, sin(\xi^{j+1} z) \right) + iq\, sin(\xi^{n+1} z) \cdot \psi_n(z) =$$
$$= \prod_{k=0}^{n+1} cos(\xi^k z) + iq \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^{n+1} cos(\xi^k z)\, sin(\xi^{j+1} z) + iq\, sin(\xi^{n+1} z) \cdot \psi_n(z) =$$
$$= \prod_{k=0}^{n+1} cos(\xi^k z) + iq \sum_{j=0}^{n} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^{n+1} cos(\xi^k z)\, sin(\xi^{j+1} z) \ \cdot$$

Таким образом нетрудно видеть что рекуррентное соотношение (9) выполняется и для n+1.

Согласно методу математической индукции теорема доказана.

Рекуррентное соотношение для характеристической функции стохастического ряда

Переходя к пределу при $n \to \infty$ получаем выражение для характеристической функции $\varphi_S(z)$ стохастического ряда (2).

Теорема 3.

Для характеристической функции стохастического ряда (2) справедливо рекуррентное соотношение

$$\varphi_S(z) = \prod_{k=0}^{\infty} cos(\xi^k z) + iq \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z)\, sin(\xi^{j+1} z) \qquad (10)$$

Доказательство.

Докажем, что при $n \to \infty$ последовательность сингулярных мер (8) равномерно сходится на компактах из множества $\mathbb{C}^1$.

Рассмотрим произвольный компакт $K \in \mathbb{C}^1$.

Так как бесконечное произведение $\prod_{k=0}^{\infty} cos(\xi^k z)$ равномерно сходится, то рекуррентное соотношение (9) можно преобразовать следующим образом:

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=0}^{n} cos(\xi^k z) + iq \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(z) \left(\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z) + \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z) - \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z) \right) \cdot sin(\xi^{j+1} z)$$

Получаем

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=0}^{n} cos(\xi^k z) + iq\sum_{j=0}^{n-1}\psi_j(z)\prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z)\cdot sin(\xi^{j+1}z) + iq\sum_{j=0}^{n-1}\psi_j(z)\left(\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z) - \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z)\right)\cdot sin(\xi^{j+1}z) \qquad (11)$$

Оценим абсолютную величину последнего слагаемого в (11):

$$\left|iq\sum_{j=0}^{n-1}\psi_j(z)\left(\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z) - \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z)\right)\cdot sin(\xi^{j+1}z)\right| \le$$

$$\le q\sum_{j=0}^{n-1}\left|\psi_j(z)\right|\cdot\left|\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z) - \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z)\right|\cdot\left|sin(\xi^{j+1}z)\right| \le$$

$$\le q\sum_{j=0}^{n-1}\left|\psi_j(z)\right|\cdot\left|\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z)\right|\cdot\left|1 - \prod_{k=n+1}^{\infty} cos(\xi^k z)\right|\cdot\left|sin(\xi^{j+1}z)\right| =$$

$$= q\cdot\left|1 - \prod_{k=n+1}^{\infty} cos(\xi^k z)\right|\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\left|\psi_j(z)\right|\cdot\left|\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z)\right|\cdot\left|sin(\xi^{j+1}z)\right| \cdot$$

Последнее равенство записано ввиду того, что выражение $1 - \prod_{k=n+1}^{\infty} cos(\xi^k z)$, а следовательно и его абсолютная величина, не зависит от j, и поэтому данный множитель можно вынести из-под знака суммирования по j.

Оценим абсолютную величину $\left|\psi_j(z)\right|$:

Из определения сингулярной меры (4) и согласно [10] имеем

$\psi_j(\vec{z}) = \int_\Omega t_j e^{iz\cdot S_j(\vec{t})} dP_j(\vec{t})$, где $S_j(\vec{t}) = \sum_{k=0}^{j}\xi^k t_k$.

Тогда получаем

$$\left|\psi_j(\vec{z})\right| = \left|\int_\Omega t_j e^{iz\cdot S_j(\vec{t})} dP_j(\vec{t})\right| \le \int_\Omega \left|t_j\right|\cdot\left|e^{iz\cdot S_j(\vec{t})}\right| dP_j(\vec{t}) \le \int_\Omega e^{|z|\cdot S_j(\vec{t})} dP_j(\vec{t}) \le$$

$$\le \int_\Omega e^{|z|\cdot(1+\xi+\ldots+\xi^j)} dP_j(\vec{t}) \le \int_\Omega e^{|z|\cdot(1+\xi+\ldots+\xi^j+\ldots)} dP_j(\vec{t}) = \int_\Omega e^{|z|\cdot\frac{1}{1-\xi}} dP_j(\vec{t}) = e^{|z|\cdot\frac{1}{1-\xi}}\int_\Omega dP_j(\vec{t}) =$$

$$= e^{|z|\cdot\frac{1}{1-\xi}} \equiv C_1(z) \cdot$$

Оценим абсолютную величину.

Так как функция комплексной переменной косинус принимает наибольшие значения на мнимой оси, то справедливо:

$$\left|\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z)\right| \le \prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k y) \le \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k y) \equiv C_2(y) \cdot$$

Таким образом, можно записать:

$$\left|iq\sum_{j=0}^{n-1}\psi_j(z)\left(\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z) - \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z)\right)\cdot sin(\xi^{j+1}z)\right| \le$$

$$\le q\cdot\left|1 - \prod_{k=n+1}^{\infty} cos(\xi^k z)\right|\cdot C_1(z)\cdot C_2(y)\cdot\sum_{j=0}^{\infty} sin(\xi^{j+1}z) =$$

Ряд $\sum_{j=0}^{\infty} sin(\xi^{j+1}z)$ сходится, так как $sin(\xi^{j+1}z) \sim \xi^{j+1}z$, а ряд $\sum_{j=0}^{\infty}\xi^{j+1}z$ в свою очередь сходится ввиду того, что справедливо $0 < \xi < 1$ и, исходя из вышесказанного, можно продолжить равенство, введя следующее обозначение $C_3(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\xi^{j+1}z$, равенство можно продолжить:

$$= q\cdot\left|1 - \prod_{k=n+1}^{\infty} cos(\xi^k z)\right|\cdot C_1(z)\cdot C_2(y)\cdot C_3(z) = q\cdot C(z)\cdot\left|1 - \prod_{k=n+1}^{\infty} cos(\xi^k z)\right| \cdot$$

Так как переменная z принадлежит компакту, то можно найти такую z_0 из компакта K, что для нее выполняется неравенство $C(z_0) \ge C(z)$, справедливое для всех $z \in K$, и, таким образом, окончательно имеем:

$$\left|iq\sum_{j=0}^{n-1}\psi_j(z)\left(\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z) - \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z)\right)\cdot sin(\xi^{j+1}z)\right| \le q\cdot C(z_0)\cdot\left|1 - \prod_{k=n+1}^{\infty} cos(\xi^k z)\right| \cdot$$

Так как $\prod_{k=n+1}^{\infty} cos(\xi^k z)$ сходится, то для любого положительного числа ϵ найдется номер $n_0 = n_0(\epsilon)$, такой что для всех номеров $n \ge n_0$ выполняется неравенство:

$$\left|1 - \prod_{k=n+1}^{\infty} cos(\xi^k z)\right| \le \epsilon \cdot$$

Тогда для всех номеров $n \ge n_0$ выполняется неравенство:

$$\left|iq\sum_{j=0}^{n-1}\psi_j(z)\left(\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z) - \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z)\right)\cdot sin(\xi^{j+1}z)\right| \le \epsilon \ ,$$

то есть при $n \to \infty$

$$\left| iq \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(z) \left(\prod_{k=j+2}^{n} cos(\xi^k z) - \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z) \right) \cdot sin(\xi^{j+1} z) \right| \to 0 \ .$$

Следовательно, при $n \to \infty$ получаем из (9):

$$\varphi_S(z) = \prod_{k=0}^{\infty} cos(\xi^k z) + iq \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(z) \prod_{k=j+2}^{\infty} cos(\xi^k z)\, sin(\xi^{j+1} z) \ .$$

Теорема доказана.

Заключение

В данной статье были получены рекуррентные соотношения, связывающие сингулярные меры, порожденные простой однородной марковской цепью.

Как известно, марковские цепи имеют широкое применение в различных областях науки. Используя полученные в данной статье результаты, можно продолжить изучение сингулярных мер, порожденных простой однородной марковской цепью, что поможет как в дальнейшем исследовании подобных мер, так и в возможном практическом применении полученных результатов.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко — Москва: Наука, 1988. — 448 с.
2. Лукач Е. Характеристические функции / Е. Лукач. М. Наука, 1979
3. Рамачандран Б. Теория характеристических функций / Б. Рамачандран. М.Наука, 1975
4. Лукач Е. Характеристические функции / Е. Лукач. М. Наука, 1979
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. Т.1 М. Мир, 1965
6. Minkowski H. Zur Gejmetre der Zahlem / H. Minkowski // Abhandlungen, v.2, 1911, S. 50-51
7. Denjoy A. - Sur une fonction reelle de Minkowski // J.Math pures et appl., v.17, 1938, p.105-151
8. Salem R. On some singular monotonic functions which are stricly increasing / R. Salem // Trans. Amer. Math.Soc.. — 1943. — 53. — p. 427-439.
9. Невё Ж. - Математические основы теории вероятностей. М. Наука, 1979
10. Латухина Ю.А. О сингулярных мерах, порождаемых случайными рядами / Ю.А. Латухина // Международный научно-исследовательский журнал. — 2014. — 10(29). — с. 17-22.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Gnedenko B.V. Kurs teorii verojatnostej [Probability theory course] / B.V. Gnedenko — Moskva: Nauka, 1988. — 448 p. [in Russian]
2. Lukacs E. Harakteristicheskie funkcii [Characteristic functions] / E. Lukacs. M. Nauka, 1979 [in Russian]
3. Ramachandran B. Teoriya harakteristicheskih funkcij [Theory of characteristic functions] / B. Ramachandran. M. Nauka, 1975 [in Russian]
4. Lukacs E. Harakteristicheskie funkcii [Characteristic functions] E. Lukacs. M. Nauka, 1979 [in Russian]
5. Zygmund A. Trigonometricheskie ryady [Trigonometric series] / A. Zigmund. Vol.1 M. Mir, 1965 [in Russian]
6. Minkowski H. Zur Gejmetre der Zahlem [On the geometry of numbers] / H. Minkowski // Abhandlungen [Treatises], v.2, 1911, p. 50-51 [in German]
7. Denjoy A. - On a real Minkowski function // J.Math pures et appl., v.17, 1938, p.105-151
8. Salem R. On some singular monotonic functions which are stricly increasing / R. Salem // Trans. Amer. Math.Soc.. — 1943. — 53. — p. 427-439.
9. Neveu J. - Mathematical foundations of probability theory. M. Nauka, 1979
10. Latuhina Ju.A. O singuljarnyh merah, porozhdaemyh sluchajnymi rjadami [About singular measures generated by random series] / Ju.A. Latuhina // International Scientific Research Journal. — 2014. — 10(29). — p. 17-22. [in Russian]