ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА / DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.140.47

О СОХРАНЕНИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ КОЭФФИЦИЕНТОВ СИСТЕМЫ

Научная статья

Антоновская О.Г.[1, *], Бесклубная А.В.[2]
[1] ORCID : 0000-0002-5688-7996;
[1, 2] Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (olga.antonovsckaja[at]yandex.ru)

Аннотация

Для дискретной системы, описываемой линейным точечным отображением, получены достаточные условия на малость возмущений коэффициентов системы, при выполнении которых квадратичная функция Ляпунова, построенная для исходной системы, будет функцией Ляпунова и для возмущенной системы. Факт знакоотрицательности первой разности в силу системы определяется фактом отрицательности корней вспомогательного полинома, коэффициенты которого зависят от коэффициентов системы. Получены достаточные условия сохранения факта отрицательности корней построенного полинома при конечных возмущениях коэффициентов системы. Рассмотрен один из методов определения коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, обладающей заданными свойствами: функции Ляпунова, удовлетворяющей ограничению на величину ее первой разности и удобной для использования при оценке количественных характеристик системы.

Ключевые слова: дискретная система, точечное отображение, возмущенная система, квадратичная функция Ляпунова, первая разность функции Ляпунова в силу системы.

ON PRESERVATION OF THE QUADRATIC LYAPUNOV FUNCTION OF A LINEAR DISCRETE SYSTEM UNDER STATIONARY PERTURBATIONS OF THE SYSTEM COEFFICIENTS

Research article

Antonovskaya O.G.[1, *], Besklubnaya A.V.[2]
[1] ORCID : 0000-0002-5688-7996;
[1, 2] Nyzhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation

* Corresponding author (olga.antonovsckaja[at]yandex.ru)

Abstract

For a discrete system described by a linear pointwise mapping, sufficient conditions on the smallness of perturbations of the system coefficients are obtained, under which the quadratic Lyapunov function constructed for the original system will be a Lyapunov function for the perturbed system as well. The fact of negativity of the first difference in the power of the system is determined by the fact of negativity of the roots of the auxiliary polynomial, whose coefficients depend on the coefficients of the system. Sufficient conditions for preserving the fact of negativity of the roots of the constructed polynomial at finite perturbations of the system coefficients are obtained. One of the methods for determining the coefficients of the quadratic Lyapunov function possessing the given properties is examined: a Lyapunov function satisfying the restriction on the value of its first difference and convenient for use in evaluating the quantitative characteristics of the system.

Keywords: discrete system, point mapping, perturbed system, quadratic Lyapunov function, first difference of the Lyapunov function in the power of the system.

Введение

Развитие теории дискретных динамических систем в направлении исследования макроструктуры пространства состояний является перспективным как с теоретической, так и с прикладной точек зрения, т.к. такая постановка вопроса оказывается естественной при решении задач различного технического содержания [1]. Для решения задачи исследования макроструктуры пространства состояний дискретных динамических систем имеет смысл использовать прямой метод Ляпунова, распространенный на дискретные системы [1], [2] и позволяющий оценивать макроструктуру пространства состояний на основе принципа достаточности [3].

Важное место в прямом методе Ляпунова занимает задача о построении в явном виде функции Ляпунова для тех или иных классов дискретных систем. Для исследования поведения систем вблизи их равновесных состояний, а также решения задач прикладного характера таких, как построение областей притяжения, определение быстродействия и т. д. могут быть использованы функции Ляпунова квадратичного вида [1], [2]. При этом функции Ляпунова могут строиться в соответствии со специальными требованиями, упрощающими решение рассматриваемой задачи. Например, при решении прикладных задач возникает потребность в ограничениях на первую разность квадратичной функции Ляпунова $V(x)$. Причём существенным является такой выбор её коэффициентов, при котором знакоотрицательность $\Delta V(x)$ обеспечивается с определенным [4], [5] (иногда максимальным [6], [7]) запасом.

В данной работе изучается вопрос о том, при каких условиях квадратичная функция Ляпунова, построенная для дискретной динамической системы, описываемой линейным точечным отображением, будет оставаться функцией Ляпунова при изменении коэффициентов системы. (Подобная задача для непрерывной линейной динамической системы рассмотрена в [8]).

Квадратичная функция Ляпунова, удовлетворяющая заданному ограничению для линейного точечного отображения

Для фиксированного $n \in N$ рассмотрим дискретную динамическую систему, описываемую линейным точечным отображением с постоянными коэффициентами

$$\bar{x} = Ax, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n, \tag{1}$$

и квадратичную форму с постоянными коэффициентами

$$V(x) = x^T K x \quad \left(K^T = K\right). \tag{2}$$

Элементы постоянных $n \times n$ -матриц A *и* K вещественные. Первая разность квадратичной формы $\Delta V_{(1)}(x)$ (2) в силу дискретной системы (1) также является квадратичной формой:

$$\Delta V_{(1)}(x) = x^T \left(A^T K A - K\right) x. \tag{3}$$

Далее считаем, что собственные значения $z_1, z_2, \ldots, z_n$ матрицы коэффициентов A дискретной системы (1), т.е. корни характеристического уравнения $\det(A - zE_n) = 0$, лежат внутри единичного круга и что квадратичная форма (2) положительно определена (здесь и ниже E_n – единичная $n \times n$ -матрица). Это предположение означает, в частности, что у дискретной системы (1) имеется [1] квадратичная функция Ляпунова. В работе [4] доказана.

Теорема 1. Пусть квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова дискретной системы (1) и на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ *функции* $\mathrm{V}(\mathrm{x})$ *максимальное значение её первой разности (3) в силу (1) равно* δV_0. *Тогда для собственных значений* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *матрицы коэффициентов* A *справедливо неравенство* $\max_{i=1,\ldots,n} |z_i|^2 - 1 \le \delta < 0$ *, а коэффициенты квадратичной формы (2) удовлетворяют равенству*

$$\det\left(A^T K A - K - \delta K\right) = 0. \tag{4}$$

Замечание 1. В дальнейшем матрицу $A^T K A - K$ квадратичной формы (3) будем обозначать A_K. Очевидно, что матрица A_K симметрична: $A_K = A_K^T$. Пусть $A_K = (A_{km})_{k,m=1}^n$. Если $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ и $K = \left(K_{ij}\right)_{i,j=1}^n$, то для элементов матрицы A_K очевидны равенства

$$A_{km} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} a_{ik} a_{jm} - K_{km}, \quad (k, m = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

в которых учтена симметричность матрицы K . В этих обозначениях (5) запишется в виде $\det(A_{km} - \delta K_{km}) = 0.$

Доказательство теоремы, приведённое в работе [4], основывается на решении соответствующей экстремальной задачи. Дадим другое её доказательство.

Доказательство. Так как (2) – положительно определённая квадратичнаяформа, то корректно задан регулярный пучок $A_K - \mu K$ квадратичных форм [9], где μ – числовой параметр. Пусть $\mu_1 \le \ldots \le \mu_n$ характеристические числа этого пучка [4], т.е. корни уравнения

$$\det(A_K - \mu K) = 0 \tag{6}$$

(все корни этого уравнения вещественные [4]). Тогда, согласно [4], имеет место равенство

$$\max_{x \ne 0} \frac{x^T A_K x}{x^T K x} = \mu_n \tag{7}$$

Так как отношение указанных в (7) квадратичных форм на любой прямой, проходящей через начало координат, принимает, за исключением точки $x = 0$ одно и то же значение (вообще говоря, своё для каждой прямой), то

$$\max_{x \ne 0} \frac{x^T A_K x}{x^T K x} = \max_{V(x) = V_0 > 0} \frac{\Delta V_{(1)}(x)}{V(x)} = \delta. \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8) заключаем, что $\mu_n = \delta$, а значит, вследствие того, что μ_n – корень уравнения (6), справедливо равенство (4). По условию теоремы квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова дискретной системы (1), поэтому квадратичная форма (3) отрицательно определена, а значит, $\mu_n = \delta < 0.$ Следовательно, для завершения доказательства теоремы остаётся установить справедливость неравенства $\delta \ge \max_{i=1,\ldots,n} |z_i|^2 - 1$. Пусть, без нарушения общности, модуль собственного значения z_n – матрицы A не меньше, чем модули остальных её собственных значений. Могут представиться только два случая: либо 1) $\operatorname{Im} z_n = 0$, либо $\operatorname{Im} z_n \ne 0$. Рассмотрим каждый из них отдельно.

В случае 1) обозначим через $y \in R^n$ собственный вектор матрицы A отвечающий собственному значению z_n . Тогда $Ay = z_n y$ и $y^T A^T = z_n y^T$. Поэтому верно равенство $y^T A_K y = y^T\left(A^T K A - K\right) y = z_n^2 y^T K y - y^T K y = \left(z_n^2 - 1\right) y^T K y,$ в силу которого получаем оценку $\delta = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A_K x}{x^T K x} \geq \frac{y^T A_K y}{y^T K y} = \frac{\left(z_n^2 - 1\right) y^T K y}{y^T K y} = z_n^2 - 1 = |z_n|^2 - 1.$

В случае 2) собственному значению $z_n = \alpha + i\beta$ матрицы A отвечает в пространстве C^n собственный вектор $y = y_1 + i y_2$, где $y_i \in R^n, \quad i = 1, 2.$ Раскрывая в равенстве $A\left(y_1 + i y_2\right) = (\alpha + i\beta)\left(y_1 + i y_2\right)$ скобки и отделяя вещественную и мнимую части, получаем $A y_1 = \alpha y_1 - \beta y_2, \quad A y_2 = \beta y_1 + \alpha y_2$ и, следовательно, $y_1^T A^T = \alpha y_1^T - \beta y_2^T, \quad y_2^T A^T = \beta y_1^T + \alpha y_2^T.$ В силу двух последних соотношений несложно убедиться в том, что имеет место равенство

$$y_i^T A_K y_i = \left(\alpha^2 + \beta^2 - 1\right) y_i^T K y_i + (-1)^i \left(\alpha\beta\left(y_1^T K y_2 + y_2^T K y_1\right) + \right. \\ \left. + \beta^2\left(y_1^T K y_1 + y_2^T K y_2\right)\right), \quad (i = 1, 2). \tag{9}$$

Выберем тот вектор y_i , для которого второе слагаемое в правой части равенства (9) неотрицательно. Тогда при таком y_i вследствие (9) справедливо неравенство $y_i^T A_K y_i \geq \left(\alpha^2 + \beta^2 - 1\right) y_i^T K y_i$, в силу которого и положительной определённости квадратичной формы (2) получаем оценку $\delta = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A_K x}{x^T K x} \geq \frac{y_i^T A_K y_i}{y_i^T K y_i} = \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2 - 1\right) y_i^T K y_i}{y_i^T K y_i} = \alpha^2 + \beta^2 - 1 = |z_n|^2 - 1$.

Теорема доказана.

Заметим, что уравнение (6) может быть записано в виде $P_n(\mu) = 0$, где

$$P_n(\mu) = \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mu + a_n, \tag{10}$$

$$a_k = (-1)^k (\det K)^{-1} \textstyle\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \det K^{i_1, i_2, \ldots, i_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

(причем $a_n = (-1)^n (\det K)^{-1} \det A_K$), а матрица $K^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ получается из матрицы K заменой столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ на одноименные столбцы матрицы A_K . Многочлен (10)-(11) получается из (6), если раскрыть определитель и разделить полученный многочлен на коэффициент при старшей степени μ . Как отмечено в доказательстве теоремы 1, все корни многочлена $P_n(\mu)$ (см. (10)) вещественные [9].

Предположим, что построена квадратичная форма (2), которая является функцией Ляпунова для отображения (1). Пусть коэффициенты (1) изменились, т.е. функции последования отображения приняли вид

$$\bar{x} = (A + \Delta A)x, \tag{12}$$

где $\Delta A = \left(\Delta a_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ – постоянная вещественная матрица. Тогда для матрицы $(A + \Delta A)_K$ первой разности $\Delta V_{(12)}(x)$ квадратичной формы (2) в силу (12) очевидно равенство

$$(A + \Delta A)_K = (A + \Delta A)^T K (A + \Delta A) - K = \left(A^T K A - K\right) + \\ + \left((\Delta A)^T K A + A^T K \Delta A + \Delta A\right)^T K \Delta A = A_K + (\Delta A)_K.$$

Поэтому величины A_{km} (см. (5)) преобразуются к виду $A_{km} + \Delta A_{km}$, где

$$\Delta A_{km} = \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}\left(\Delta a_{ik}\Delta a_{jm} + a_{ik}\Delta a_{jm} + \Delta a_{ik} a_{jm}\right), (k, m = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

уравнение (6) примет вид

$$\det\left(A_K + (\Delta A)_K - \mu K\right) = 0, \tag{14}$$

а вместо многочлена (10) получим многочлен

$$P_n^{\Delta}(\mu) = \mu^n + \left(a_1 + \Delta a_1\right)\mu^{n-1} + \ldots + \left(a_{n-1} + \Delta a_{n-1}\right)\mu + a_n + \Delta a_n, \tag{15}$$

где Δa_k – сумма произведений всех миноров матрицы $(\Delta A)_K$ до порядка k включительно на соответствующие им алгебраические дополнения из матрицы $K^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$. В частности, нужный нам в дальнейшем коэффициент Δa_n равен

$$\Delta a_n = \frac{(-1)^n}{\det K} \textstyle\sum_{p=1}^n \omega_p, \tag{16}$$

здесь

$$\omega_l = \Delta A_{ij} A_j^i, \quad \omega_n = \det(A + \Delta A)_K, \tag{17}$$

$$\omega_q = \textstyle\sum_{i_1 < \ldots < i_q} \sum_{j_1 < \ldots < j_q} \begin{vmatrix} \Delta A_{i_1 j_1} & \ldots & \Delta A_{i_1 j_q} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta A_{i_q j_1} & \ldots & \Delta A_{i_q j_q} \end{vmatrix} A_{j_1, \ldots, j_q}^{i_1, \ldots, i_q}, \quad q = 2, \ldots, n-1 \tag{18}$$

где A_j^i – алгебраическое дополнение элемента A_{ij} в матрице A_K, а $A_{j_1,\ldots,j_q}^{i_1,\ldots,i_q}$ – алгебраическое дополнение минора матрицы A_K, построенного на строках с номерами $i_1,\ldots,i_q$ и столбцах с номерами $i_1,\ldots,i_q$. Многочлен (15)-(16) получается (14) при учете (13), если раскрыть определитель и разделить полученный многочлен на коэффициент при старшей степени μ.

Задача, рассматриваемая в работе, состоит в нахождении условий, которым должны удовлетворять возмущения, чтобы квадратичная функция Ляпунова (2), построенная для дискретной (1), оставалась бы функцией Ляпунова и для возмущённой дискретной системы (12). Уточним постановку задачи.

2.1. Об условиях, дающих решение задачи

Функция Ляпунова (2) построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (12), если и только если все собственные значения матрицы $A_K+(\Delta A)_K$ будут отрицательными. Так как матрица $A_K+(\Delta A)_K$ симметричная, то все её собственные значения вещественны [10]. Значит, если у матрицы $A_K+(\Delta A)_K$ все собственные значения отрицательны, то все коэффициенты её характеристического многочлена $P_n^{\Delta}(\mu)$ положительны, что очевидно следует из формул Виета. Как хорошо известно [11], для многочлена с вещественными коэффициентами (не обязательно такого, что все его корни вещественны) условие положительности всех коэффициентов является необходимым условием того, чтобы все корни этого многочлена имели отрицательную вещественную часть, но, вообще говоря, не достаточным для многочленов степени, выше двух. В рассматриваемом же нами случае многочлена, все корни которого вещественны, это необходимое условие и достаточно. Действительно, если все коэффициенты многочлена, имеющего только вещественные корни, положительны, то значения этого многочлена на неотрицательной полуоси положительны, а значит, все его корни лежат на отрицательной полуоси. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Квадратичная форма (2), являющаяся функцией Ляпунова для дискретной системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для возмущенной системы (12), если и только если для матрицы ΔA *выполняются неравенства* $a_k+\Delta a_k>0, k=1,2,\ldots,n.$

Таким образом, чтобы проверить, будет ли квадратичная форма (2), являющаяся функцией Ляпунова дискретной системы (1), также и функцией Ляпунова возмущенной системы (12), нужно в дополнение к найденным положительным коэффициентам a_k (см. формулы (11)) найти величины $\Delta a_k,\quad k=1,2,\ldots,n$ (см. формулы (16)) и проверить выполнимость неравенств $a_k+\Delta a_k>0,\quad k=1,2,\ldots,n$. Для проверки этого необходимого и достаточного условия необходимо вычислить все величины $\Delta a_k,\quad k=1,2,\ldots,n$, что связано с большим количеством довольно объёмных вычислений. Можно предложить достаточное условие, для проверки которого требуется вычислить фактически только элемент Δa_n. Чтобы сформулировать это достаточное условие, рассмотрим наряду с точечным отображением (12) также параметрическое семейство

$$\bar{x}=(A+\tau\Delta A)x, \tag{19}$$

параметр τ в котором изменяется на отрезке *[0,1]* и в которое (1) и (12) входят при $\tau=0$ и $\tau=1$ соответственно. Обозначим через $\Delta a_n(\tau)$ величину Δa_n, вычисленную при фиксированном τ для (19) по формуле (16), т.е. для (19) нужно в формулах (17) и (18) заменить ΔA_{ij} на $\tau\Delta A_{ij}$ и ΔA_K на $\tau\Delta A_K$. Тогда очевидно, что величина $\Delta a_n(\tau)$ представляет собой многочлен степени n переменной τ с нулевым свободным членом, а именно,

$$\Delta a_n(\tau)=\frac{(-1)^n}{\det K}\sum_{p=1}^{n}\omega_p\tau^p. \tag{20}$$

Обозначим через $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$ многочлен $P_n^{\Delta}(\mu)$ (см. (15)), построенный для (19). Свободный член многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$ равен $\Delta a_n(\tau)+a_n$ и является многочленом степени n с положительным свободным членом. Тогда, согласно [8], будут иметь место следующие утверждения.

Лемма 1. *Если многочлен* $\Delta a_n(\tau)+a_n$ *при всех* $\tau\in[0,1]$ *положителен, то квадратичная форма (2), являющаяся функцией Ляпунова для системы (1), будет функцией Ляпунова и для системы (12).*

Заметим, что матрица $A_K+(\Delta A)_K$ будет невырожденной, если норма матрицы-возмущения $(\Delta A)_K$ не превосходит радиуса невырожденности [12] матрицы A_K. Другими словами, имеет место

Лемма 2. Если матрица A_K *отрицательно определена, то матрица* $A_K+(\Delta A)_K$ *будет отрицательно определённой при любой матрице* $A_K+(\Delta A)_K$, *удовлетворяющей неравенству*

$$\|(\Delta A)_K\|<\left\|A_K^{-1}\right\|^{-1}=\min_{i=1,\ldots,n}|\Lambda_i\,(A_K)|,$$

где $\Lambda_i\,(A_K)\quad(i=1,\ldots,n)$ *– собственные значения матрицы* A_K. *(Через* $\|\cdot\|$ *обозначена спектральная норма матрицы.)*

Из леммы 2 очевидно вытекает

Лемма 3. Если матрица A_K *отрицательно определена и выполняется неравенство* $\|\Delta A\|<(2\|K\|)^{-1}\min_{i=1,\ldots,n}|\Lambda_i\,(A_K)|,$ *то отрицательно определенной будет и матрица* $A_K+(\Delta A)_K$.

2.2. Примеры построения в двух частных случаях квадратичной функции Ляпунова с заданным максимумом на её поверхности уровня первой разности

Пусть квадратичная функция Ляпунова для системы (1) строится в соответствии с методикой работы [5], основанной на переходе к каноническим координатам.

1. Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения дискретной системы (1) вещественны и различны; без нарушения общности считаем, что $|z_1| < |z_2| < \ldots < |z_n|$. Тогда существует линейное невырожденное преобразование координат $x = B\xi, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T, \quad B = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ приводящее точечное отображение к виду [13]

$$\bar{\xi} = A\xi, \quad i = 1, \ldots, n, \quad A = \operatorname{diag}\left[z_1, z_2, \ldots, z_n\right] \tag{21}$$

(У матрицы B её k -й столбец является собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $z_k, \quad k = 1, \ldots, n$). При этом квадратичные формы (2) и (3) перейдут соответственно в квадратичные формы $W(\xi)$ и $\Delta W_{(21)}(\xi)$, причём [5]

$$\max_{V=V_0} \frac{\Delta V_{(12)}}{V} = \max_{W=V_0} \frac{\Delta W_{(21)}}{W}, \quad \min_{V=V_0} \frac{\Delta V_{(12)}}{V} = \min_{W=V_0} \frac{\Delta W_{(21)}}{W} \; .$$

Таким образом, не ограничивая общности, можно предполагать, что система (1) имеет канонический вид (21). Тогда равенства (5) примут вид

$$A_{km} = (z_k z_m - 1)\, K_{km}, \quad k, m = 1, \ldots, n \; ,$$

а уравнение (6) запишется следующим образом:

$$\det\left((z_k z_m - 1 - \mu)\, K_{km}\right)_{k,m=1}^{n} = 0. \tag{22}$$

Построим для системы (1) квадратичную функцию Ляпунова (2), удовлетворяющую равенству $\max_{V=V_0} \Delta V_{(21)} = \delta V_0$, где в качестве заранее выбранной величины δ можно взять любое число из полуинтервала $\left[z_n^2 - 1, 0\right)$.

Квадратичную функцию Ляпунова с $\max_{V=V_0} \Delta V_{(21)} = \delta V_0$ зададим следующим образом:

$$V\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n-2} K_{ii}\xi_i^2 + K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2 + 2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n + K_{nn}\xi_n^2 \tag{23}$$

где $K_{ii} > 0, i = 1, \ldots, n, K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn}$,

а $R(\delta) = (1+\delta)\,(z_{n-1} - z_n)^2\,(z_{n-1}z_n - 1 - \delta)^{-2} \quad \left(\delta \in \left[z_n^2 - 1, 0\right)\right)$.

То есть матрица K построенной квадратичной формы имеет вид

$$K = \left(K_{11}, \ldots, K_{n-2,n-2}, \begin{pmatrix} K_{n-1,n-1} & K_{n-1,n} \\ K_{n-1,n} & K_{nn} \end{pmatrix}\right) .$$

Несложно убедиться, что при условии $\delta \in \left[z_n^2 - 1, 0\right)$ величина $R(\delta)$ принадлежит полуинтервалу $(0,1]$, а квадратичные формы с матрицами K и A_K (матрицы A и K определены в (21) и (24)) и соответственно положительно и отрицательно определены. Корнями уравнения (22) $\mu_1 = z_1^2 - 1, \ldots, \mu_{n-2} = z_{n-2}^2 - 1, \mu_{n-1} = \left(z_{n-1}^2 + z_n^2 - 2\right) - \delta, \mu_n = \delta,$ являются: (то, что первые $n-2$ из этих значений – корни уравнения (22), очевидно, в том же, что два последних из них корни, проще всего убедиться непосредственной подстановкой в уравнение (22)). При этом в рассматриваемом случае при выборе (24) матрицы квадратичной формы наименьшим и наибольшим корнями уравнения (22) будут $z_1^2 - 1$ и δ .

2. Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения системы (1) различны, причём среди корней с наибольшей вещественной частью имеются комплексно-сопряжённые между собой.

Если $|z_1| < |z_2| < \ldots < |z_n|$, и только $z_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta$, то для канонической системы дифференциальных уравнений [5] квадратичную функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию $\max_{V=V_0} \Delta V = \delta V_0$ можно искать в виде (23), где

$$\left(K_{n-1,n-1} + K_{nn}\right)^2 = C(\delta)\left(K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2\right), \tag{25}$$

а $C(\delta) = (\delta - 2\alpha)^2\beta^{-2} + 4$, считая равными между собой коэффициенты $K_{i-1,i-1} = K_{ii}, \quad i = 1, \ldots, n-2$, если переменные ξ_{i-1}, ξ_i соответствуют паре комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения.

В самом деле, пусть корни характеристического уравнения $z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}$ действительны и различны, и только $z_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta$. Тогда существует линейное невырожденное преобразование координат, приводящее точечное отображение к каноническому виду [11]

$$\bar{\xi} = A\xi, \quad i = 1, \ldots, n, \quad A = \operatorname{diag}\left[z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\right] \tag{26}$$

При этом квадратичные формы (2) и (3) перейдут соответственно в квадратичные формы $W(\xi)$ и $\Delta W_{(21)}(\xi)$, причём [5]

$$\max_{V=V_0} \frac{\Delta V_{(12)}}{V} = \max_{W=V_0} \frac{\Delta W_{(26)}}{W}, \quad \min_{V=V_0} \frac{\Delta V_{(12)}}{V} = \min_{W=V_0} \frac{\Delta W_{(26)}}{W} \; .$$

Таким образом, не ограничивая общности, можно предполагать, что система (1) имеет канонический вид (26).

Нетрудно убедиться, что корнями уравнения (6) являются: $\mu_1 = z_1^2 - 1, \dots, \mu_{n-2} = z_{n-2}^2 - 1, \quad \mu_{n-1} = 2\left(\alpha^2 + \beta^2 - 1\right) - \delta, \mu_n = \delta.$ Таким образом, в рассматриваемом случае при выборе (25) матрицы квадратичной формы наибольшим корнем уравнения (6) будет $\delta.$

Рассмотрим теперь случай, когда среди корней $z_1, z_2, \dots, z_{n-2}$ есть пара комплексно-сопряженных корней, скажем $z_{i-1,i} = \alpha_1 \pm i\beta_1$. Тогда линейным невырожденным преобразованием координат система может быть приведена к виду, подобному (26), но с матрицей

$$A = \operatorname{diag}\left[z_1, z_2, \dots, z_{i-2}, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, z_{i+1}, \dots, z_{n-2}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\right]. \qquad (27)$$

Если искать квадратичную функцию Ляпунова для канонической системы в виде можно искать в виде (23), где $K_{n-1,n-1}, K_{nn}$ связаны в силу (25), считая равными между собой коэффициенты $K_{i-1,i-1} = K_{ii}$, то корнями уравнения (6) будут: $\mu_1 = z_1^2 - 1, \dots, \mu_{i-2} = z_{i-2}^2 - 1, \quad \mu_{i-1,i} = 2\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - 1\right) - \delta, \quad \mu_{i+1} = z_{i+1}^2 - 1$, $\dots, \mu_{n-2} = z_{n-2}^2 - 1, \mu_{n-1} = 2\left(\alpha^2 + \beta^2 - 1\right) - \delta, \mu_n = \delta$. Таким образом, в рассматриваемом случае при выборе (25) матрицы квадратичной формы наибольшим корнем уравнения (6) будет δ.

Случай, когда среди корней характеристического уравнения имеется несколько пар комплексно-сопряженных корней, рассматривается аналогично.

Таким образом, если наибольшему значению действительных частей корней характеристического уравнения соответствует пара комплексно-сопряженных корней, корнями уравнения (6) являются: $\mu_1 = |z_1|^2 - 1, \dots, \mu_{n-2} = |z_{n-2}|^2 - 1, \quad \mu_{n-1} = 2\left(\alpha^2 + \beta^2 - 1\right) - \delta, \mu_n = \delta.$ И в рассматриваемом случае при выборе в силу (24), (25) матрицы квадратичной формы наибольшим корнем уравнения (6) будет δ.

Переходя обратно от канонических переменных к исходным переменным, мы получим квадратичную функцию Ляпунова (2), удовлетворяющую заданным ограничениям.

Заключение

Представленная работа посвящена вопросу о сохранении квадратичной функции Ляпунова дискретной системы, описываемой линейным точечным отображением, при изменении коэффициентов системы. Получены достаточные условия ан величину возмущений коэффициентов, при которых функция Ляпунова исходной системы останется функцией Ляпунова системы возмущенной. Результаты, полученные в работе, являются продолжением исследований работы [8].

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Косякин А. А. Колебания в цифровых автоматических системах / А. А. Косякин, Б. М. Шамриков. — Москва : Наука, 1983. — 336 с.
2. Бромберг П. В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования / П. В. Бромберг. — Москва : Наука, 1967. — 324 с.
3. Антоновская О. Г. Об одном способе оценки размеров области притяжения неподвижной точки нелинейного точечного отображения произвольной размерности / О. Г. Антоновская, В. И. Горюнов // Известия вузов. Математика. — 2016. — № 12. — С. 12–18.
4. Антоновская О. Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами. / О. Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49. — № 9. — С. 1220–1224.
5. Антоновская О. Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами / О. Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52. — № 3. — С. 275–281.
6. Антоновская О. Г. О максимальном ограничении знакоотрицательности первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова / О. Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39. — № 11. — С. 1562–1563.
7. Антоновская О. Г. Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем / О. Г. Антоновская // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 2(501). — С. 19–23.
8. Антоновская О. Г. О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях ее коэффициентов / О. Г. Антоновская // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59. — № 3. — С. 295–302.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — Москва : Наука, 1968. — 560 с.
10. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — Москва : Мир, 1989. — 655 с.

11. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — Москва : Наука, 1967. — 480 с.
12. Поляк Б. Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков. — Москва : URSS, 2014. — 560 с.
13. Неймарк Ю. И. Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний / Ю. И. Неймарк // Известия вузов. Радиофизика. — 1958. — Т. 1. — № 1. — С. 41–66.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Kosyakin A. A. Kolebaniya v tsifrovykh avtomaticheskikh sistemakh [Oscillations in Digital Automatic Sytems] / A. A. Kosyakin, B. M. Shamrikov. — Moscow: Nauka, 1983. — 336 p. [in Russian]
2. Bromberg P. V. Matritchnyie metody м teorii releynogo I impulsnogo regulirovaniya [Matrix Methods in the Theory of Relay and Pulse Regulation] / P. V. Bromberg. — Moscow : Nauka, 1967. — 324 p. [in Russian]
3. Antonovskaya O. G. Ob odnom sposobe ocenki razmerov oblasti pritjazhenija nepodvizhnoj tochki nelinejnogo tochechnogo otobrazhenija proizvol'noj razmernosti [On a Method of Evaluation of Attraction Domain for Fixed Point of Nonlinear Point Mapping of Arbitrary Dimention] / O. G. Antonovskaya, V. I. Goryunov // Izvestija vuzov. Matematika [Russian Mathematics]. — 2016. — № 12. — P. 12–18. [in Russian]
4. Antonovskaya O. G. O postroenii kvadratichnoj funkcii Ljapunova s zadannymi svojstvami [On the Construction of a Quadratic Lyapunov Function with Given Properties] / O. G. Antonovskaya // Differencial'nye uravnenija [Differential Equations]. — 2013. — V. 49. — № 9. — P. 1220–1224. [in Russian]
5. Antonovskaya O. G. Ob opredelenii kojefficientov kvadratichnoj funkcii Ljapunova s zadannymi svojstvami [Determination of the Coefficients of Aquadratic Lyapunov Function with Given Properties] / O. G. Antonovskaya // Differencial'nye uravnenija [Differential Equations]. — 2016. — V. 52. — № 3. — P. 275–281. [in Russian]
6. Antonovskaya O. G. O maksimal'nom ogranichenii znakootricatel'nosti pervoj proizvodnoj (pervoj raznosti) kvadratichnoj funkcii Ljapunova [On the Maximum Possible Negativity Margin for the First Derivative (First Difference) of a Quadratic Lyapunov Function] / O. G. Antonovskaya // Differencial'nye uravnenija [Differential Equations]. — 2003. — V. 39. — № 11. — P. 1562–1563. [in Russian]
7. Antonovskaya O. G. Postroenie kvadratichnyh funkcij Ljapunova, udovletvorjajushhih zadannym ogranichenijam, dlja nepreryvnyh i diskretnyh dinamicheskih sistem [Construction of Quadratic Lyapunov Functions Satisfying Given Constraints for Continuous and Discrete Dynamical Systems] / O. G. Antonovskaya // Izvestija vuzov. Matematika [Russian Mathematics]. — 2004. — № 2(501). — P. 19–23. [in Russian]
8. Antonovskaya O. G. O sohranenii kvadratichnoj funkcii Ljapunova linejnoj differencial'noj avtonomnoj sistemy pri stacionarnyh vozmushhenijah ee kojefficientov [On the Preservation of a Quadratic Lyapunov Function of a Linear Differential Autonomous System under Constant Perturbations of the Coefficients] / O. G. Antonovskaya // Differencial'nye uravnenija [Differential Equations]. — 2023. — V. 59. — № 3. — C. 295–302. [in Russian]
9. Gantmakher F. R. Teoriya matrits [Matrix Theory] / F. R. Gantmakher. — Moscow : Nauka, 1968. — 560 p. [in Russian]
10. Horn R. Matrichnyj analiz [Matrix Analysis] / R. Horn, C. Johnson. — Moscow : Mir, 1989. — 655 p. [in Russian]
11. Demidovich B. P. Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti [Lectures on the Mathematical Theory of Stability] / B. P. Demidovich. — Moscow : Nauka, 1967. — 480 p. [in Russian]
12. Polyak B. T. Upravlenie lineinymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: Tekhnikalineinykh matrichnykh neravenstv [Control of Linear Systems under Exogenous Disturbances: Technique of Linear Matrix Inequalities] / B. T. Polyak, M. V. Khlebnikov, P. S. Shcherbakov. — Moscow : URSS, 2014. — 560 p. [in Russian]
13. Neymark Yu. I. Metod tochechnyh preobrazovanij v teorii nelinejnyh kolebanij [The Method of Point Transformations in the Theory of Nonlinear Oscillations] / Yu. I. Neymark // Izvestija vuzov. Radiofizika [Soviet Radiophysics]. — 1958. — Vol. 1. — № 1. — P. 41–66. [in Russian]