ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА / DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.140.39

О ДИСКРЕТНОЙ ГРУППЕ 36-ГО ПОРЯДКА ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА

Научная статья

Хакимова З.Н.[1, *], Тимофеева Л.Н.[2], Атоян А.А.[3]
[1, 2, 3] Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (zilya-khakimova[at]mail.ru)

Аннотация

Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с мультипликативной правой частью. Найдены преобразования, замкнутые в этом классе уравнений. Для исследуемого класса уравнений или для его подклассов построены дискретные группы преобразований 6, 12 и 36-го порядков.

Применён метод вложения (расширения) класса уравнений для построения дискретной группы 36-го порядка.

Указан метод получения точных решений (общих и частных) уравнений, соответствующих вершинам графа, если известно решение хотя бы одного из этих уравнений, т.е. метод «размножения» разрешимых случаев в исследуемых классах уравнений.

В качестве примера рассмотрено уравнение свободных незатухающих колебаний маятника.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка, уравнение с мультипликативной правой частью, дискретная группа преобразований, дискретная группа преобразований, группа диэдра, точное решение ОДУ.

ON THE 36TH ORDER DISCRETE GROUP FOR A MULTIPLICATIVE CLASS OF 2ND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Research article

Khakimova Z.N.[1, *], Timofeeva L.N.[2], Atoyan A.A.[3]
[1, 2, 3] Mozhaisky Military Space Academy, Saint-Petersburg, Russian Federation

* Corresponding author (zilya-khakimova[at]mail.ru)

Abstract

A class of ordinary differential equations of 2nd order with multiplicative right side is examined. The transformations closed in this class of equations are found. Discrete groups of transformations of orders 6, 12 and 36 are constructed for the studied class of equations or for its subclasses.

The method of enclosing (extending) a class of equations to construct a discrete group of 36th order is applied.

The method of obtaining exact solutions (general and partial) of the equations corresponding to the vertices of the graph, if the solution of at least one of these equations is known, i.e. the method of "multiplication" of solvable cases in the studied classes of equations, is presented.

As an example, the equation of free continuous oscillations of a pendulum is examined.

Keywords: 2nd order ordinary differential equation (ODE), equation with multiplicative right part, discrete transformation group, discrete transformation group, dihedral group, exact solution of ODEs.

Введение

Дискретные группы преобразований для обыкновенных дифференциальных уравнений были открыты В. Ф. Зайцевым [1], если не считать тривиальные группы преобразований, известные раньше, например, циклическая группа преобразований 2-го порядка с образующей $x \to -x; y \to y$.

Благодаря дискретно-групповому анализу обыкновенных дифференциальных уравнений, В. Ф. Зайцеву и его научной школе удалось найти точные решения сотен ОДУ, которые включены в справочники конца 20-го – начала 21-го веков, например [2], [3], [4], [5], последний из которых является наиболее полным.

В данной работе исследуется класс ОДУ 2-го порядка с мультипликативными правыми частями:

$$y''_{xx} = K(x)L(y)M\left(y'_x\right) N\left(xy'_x - y\right), \tag{1}$$

а также его подкласс при $N \equiv 1$:

$$y''_{xx} = K(x)L(y)M\left(y'_x\right). \tag{2}$$

Обозначим их соответственно $(K, L, M, N) \cdot$ и $\cdot (K, L, M) = (K, L, M, 1)$ $\cdot$

Несколько странный 4-й сомножитель в правой части (1) имело смысл включить в (1) для получения замкнутости некоторых дискретных преобразований в классе уравнений (1), которые не являются замкнутыми в (2).

Основные результаты

2.1. Основные определения

Определение 1. Множество преобразований $\boldsymbol{G}$, замкнутых на выбранном классе уравнений $\boldsymbol{D}$, называется *дискретной группой преобразований* $\boldsymbol{G}$, допускаемой классом уравнений $\boldsymbol{D}$ [1].

Определение 2. Множество элементов данной дискретной группы $\boldsymbol{G}$ называется *множеством порождающих (образующих) элементов*, если всякий элемент группы $\boldsymbol{G}$ можно выразить в виде конечного произведения их степеней (в том числе с отрицательными показателями) [7].

Определение 3. Соотношения между образующими элементами дискретной группы $\boldsymbol{G}$ называется её *определяющими соотношениями*, если всякое другое соотношение между образующими является их алгебраическим следствием [7].

Определение 4. *Кодом* дискретной группы $\boldsymbol{G}$ называется совокупность образующих и определяющих соотношений [7].

Замечание 1. Иногда кодом дискретной группы называют только совокупность определяющих соотношений между образующими.

Определение 5. *Группой диэдра* $\boldsymbol{D_q}$ порядка $\boldsymbol{2q}$ называется дискретная группа с двумя образующими $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, связанных следующими определяющими соотношениями: $\boldsymbol{u}^q = \boldsymbol{v}^2 = (\boldsymbol{uv})^2 = \boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$ – тождественное преобразование [7].

2.2. Дискретная группа преобразований 6-го порядка для класса уравнений (2)

Класс уравнений (2) включает в себя в качестве подкласса класс обобщённых уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ), когда *K*, *L*, *M* являются степенными функциями:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l \left(y'_x\right)^m . \tag{3}$$

Обозначим его $(k, l, m|A)$ или (k, l, m).

Класс уравнений (3) был подробно исследован В. Ф. Зайцевым и он имеет достаточно много приложений при определённых значениях показателей: модель политропного газового шара (модель звезды), уравнение Томаса-Ферми движения электронов и т.д. [8].

Были найдены дискретные преобразования [1], замкнутые в классе уравнений (3), например, точечное преобразование

$$\boldsymbol{r} : x \rightleftarrows y, \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{E}, (k, l, m) \to (l, k, 3 - m), \tag{4}$$

а также преобразование Беклунда, зависящее от параметров исходного уравнения

$$\boldsymbol{g} : {}^\circ x \to y^{\frac{1}{k+1}}, y \to \left(y'_x\right)^{-\frac{1}{l}}, y'_x \to x^{\frac{1}{1-m}}, \boldsymbol{g}^3 = \boldsymbol{E}, {}^\circ(k, l, m) \to \left(\frac{1}{1-m}, -\frac{k}{k+1}, \frac{2l+1}{l}\right). \tag{5}$$

Преобразования $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{g}$ являются образующими группы преобразований диэдра 6-го порядка:

$$D_3 = \left\{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{gr}, \boldsymbol{g}^2\boldsymbol{r}\right\}, \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{g}^3 = (\boldsymbol{gr})^2 = \boldsymbol{E} \tag{6}$$

($\boldsymbol{E}$ **–** тождественное преобразование).

Оказалось, что аналогичные преобразования действуют и в классе уравнений (2), в частности, то же точечное преобразование

$$r : {}^\circ x \rightleftarrows y, {}^\circ r^2 = E, y''_{xx} = K(x)L(y)M\left(y'_x\right) \xrightarrow{{}^\circ r^\circ} y''_{xx} = -L(x)K(y)y'^3_x M\left(\frac{1}{y'_x}\right), \tag{7}$$

а также обобщение преобразования Беклунда (5) (назовём его той же буквой)

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{g} : \quad x \to \alpha(y), \quad y \to \beta\left(y'_x\right), y'_x \to \gamma(x), \\
\alpha(y) = \left(\int K(y)dy\right)^{-1}, \beta\left(y'_x\right) = \left[\frac{1}{L\left(y'_x\right)}\right]^{-1}, \gamma(x) = \left[\int \frac{dx}{M(x)}\right]^{-1}, \boldsymbol{g}^3 = \boldsymbol{E}, \\
y''_{xx} = K(x)L(y)M\left(y'_x\right) \xrightarrow{\boldsymbol{g}} y''_{xx} = \gamma(x)\frac{1}{K(\alpha(x))}\frac{y'_x}{\beta'_x\left(y'_x\right)}
\end{gathered} \tag{8}$$

(показатель «-1» в (8) означает обратную функцию).

Граф группы преобразований диэдра $\boldsymbol{D_3}$ (6) 6-го порядка для класса уравнений (2) изображён на рис. 1.

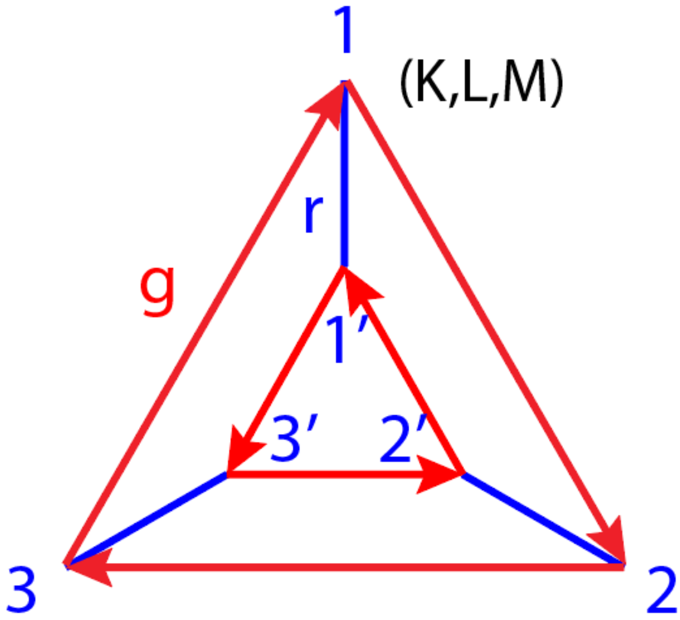

Рисунок 1 - Граф группы D_3
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.140.39.1

На рис. 1 вершины графа соответствуют уравнениям класса (2), а дуги графа обозначают преобразования группы $\boldsymbol{D_3}$ (6).

2.3. Дискретная группа преобразований 12-го порядка для класса уравнений (1)

Для класса уравнений (1) была найдена [9] дискретная группа диэдра $\boldsymbol{D_6}$ преобразований, замкнутых в классе уравнений (1):

$$D_6 = \left\{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}^2, \boldsymbol{h}^3, \boldsymbol{h}^4, \boldsymbol{h}^5, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{hr}, \boldsymbol{h}^2\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^3\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^4\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}^5\boldsymbol{r}\right\}, \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{h}^6 = (\boldsymbol{hr})^2 = \boldsymbol{E}, \tag{9}$$

образующими которой являются точечное преобразование

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}: \quad x \rightleftarrows y, \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{E}, y''_{xx} = K(x)L(y)M\left(y'_x\right)N\left(xy'_x - y\right) \xrightarrow{r} \\ \xrightarrow{r} y''_{xx} = -L(x)K(y)y'^3_x M\left(\frac{1}{y'_x}\right)N\left(-\frac{xy'_x - y}{y'_x}\right)\end{gathered} \tag{10}$$

и касательное преобразование

$$\boldsymbol{h}: \quad x \to \frac{1}{y'_x}, y \to -\frac{xy'_x - y}{y'_x}, y'_x \to y, xy'_x - y \to x, \boldsymbol{h}^6 = \boldsymbol{E},$$
$$y''_{xx} = K(x)L(y)M\left(y'_x\right)N\left(xy'_x - y\right) \xrightarrow{\boldsymbol{h}} y''_{xx} = -\frac{1}{N(x)}\frac{1}{M(y)}\frac{y'^3_x}{K\left(\frac{1}{y'_x}\right)}\frac{1}{L\left(-\frac{xy'_x - y}{y'_x}\right)}. \tag{11}$$

Граф группы $\boldsymbol{D_6}$ изображён на рис. 2.

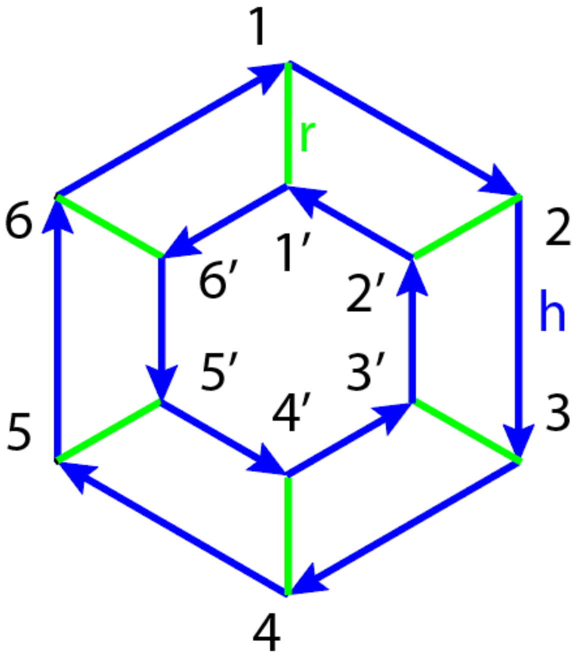

Рисунок 2 - Граф группы D_6
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.140.39.2

2.4. Дискретная группа преобразований 36-го порядка для класса уравнений (2)

Поскольку (2) является подклассом класса уравнений (1), то к вершинам графа группы $\boldsymbol{D_3}$ на рис. 1 можно присоединить графы групп $\boldsymbol{D_6}$. Таким образом, получается граф 36-го порядка, изображённый на рис. 3 (преобразование $\boldsymbol{r}$ опущено, поэтому показанные на рис. 3 18 вершин на самом деле удваиваются).

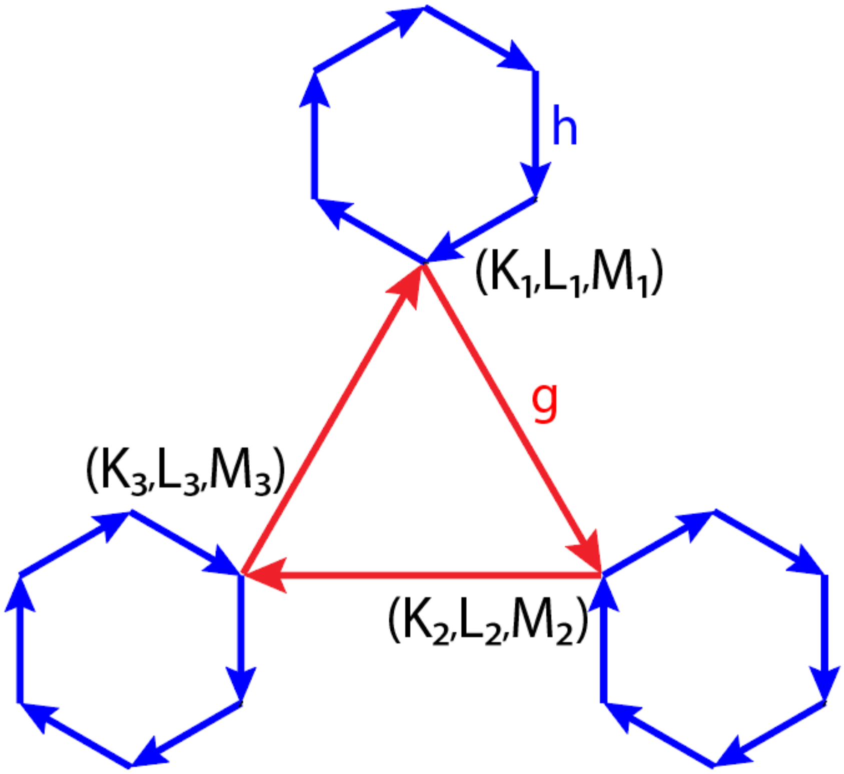

Рисунок 3 - Граф группы 36-го порядка
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.140.39.3

Примечание: преобразование r и дополнительные 18 вершин опущены

2.5. Получение точных решений уравнений

Рассмотрим уравнение свободных колебаний маятника

$$y''_{xx} = -\sin y \qquad (12)$$

дискретные симметрии которого были частично исследованы в работе [9].

Поскольку уравнение (12) принадлежит классу уравнений (1), то к нему можно применить группу преобразований $\boldsymbol{D_6}$ (9).

Уравнения, соответствующие вершинам графа на рис. 2, помещены в таблицу 1.

Таблица 1 - Уравнения-вершины графа на рис. 1

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.140.39.4

1	$y''_{xx} = -\sin y$	1’	$y''_{xx} = y'_x \sin x$
2	$y''_{xx} = -\dfrac{(y'_x)^3}{\sin \dfrac{xy'_x - y}{y'_x}}$	2’	$y''_{xx} = -\dfrac{1}{\sin(xy'_x - y)}$
3	$y''_{xx} = \left(\dfrac{y'_x}{y}\right)^3 \sin \dfrac{x}{y}$	3’	$y''_{xx} = -\dfrac{1}{x^3} \sin \dfrac{y}{x}$
4	$y''_{xx} = -\left(\dfrac{xy'_x - y}{y}\right)^3 \dfrac{1}{\sin \dfrac{1}{xy'_x - y}}$	4’	$y''_{xx} = \left(\dfrac{xy'_x - y}{x}\right)^3 \dfrac{1}{\sin \dfrac{y'_x}{xy'_x - y}}$
5	$y''_{xx} = -\left(\dfrac{xy'_x - y}{x}\right)^3 \sin \dfrac{1}{x}$	5’	$y''_{xx} = -\left(\dfrac{xy'_x - y}{y}\right)^3 \sin \dfrac{1}{y}$
6	$y''_{xx} = \dfrac{1}{x^3 \sin y'_x}$	6’	$y''_{xx} = -\left(\dfrac{y'_x}{y}\right) \dfrac{1}{\sin \dfrac{1}{y'_x}}$

Примечание: уравнение 1 – уравнение колебаний маятника (12)

Уравнение колебаний маятника (12) легко разрешимо, общее его решение приведено, например, в [9]. В таблице 1 уравнение (12) имеет номер 1.

Так как уравнения 2-6’ в таблице 1 связаны с уравнением 1 известными преобразованиями – преобразованиями группы $\boldsymbol{D_6}$ (9), то общие решения этих 11 уравнений также можно вычислить, поскольку решения уравнений связаны теми же самыми преобразованиями, что и сами уравнения.

Пример 1.

Легко проверить, что уравнение (12) под номером 1 в таблице 1 имеет следующее частное решение в параметрическом виде:

$$x = \pm i \ln \frac{\cos \frac{\tau}{2} + 1}{\sin \frac{\tau}{2}} + C, \cdot y = \tau \tag{13}$$

где τ – параметр.

Найдём, к примеру, решение уравнения 2’.

По графу на рис. 2 легко видеть, что уравнение 2’

$$y''_{xx} = -\frac{1}{\sin(x y'_x - y)} \tag{14}$$

приводится к уравнению 1 с помощью преобразования ***hr***: $2' \xrightarrow{\circ \boldsymbol{hr} \circ} 1,$

где ***hr*** – известное преобразование Лежандра:

$$\boldsymbol{hr} : x \longrightarrow y'_x, \cdot y \longrightarrow xy'_x - y \tag{15}$$

Следовательно, решения уравнений 1 и 2’ связаны этим же преобразованием. Таким образом, решение уравнения 2’ (14) является композицией преобразования (15) и решения (13) уравнения колебаний маятника 1:

$$x = -\frac{2\left(\sin \frac{\tau}{2}\right)^2}{1 + \cos \frac{\tau}{2}}, y = \pm i \frac{2\left(\sin \frac{\tau}{2}\right)^2}{1 + \cos \frac{\tau}{2}} \ln \frac{\cos \frac{\tau}{2} + 1}{\sin \frac{\tau}{2}} - \tau \tag{16}$$

2.6. Пример построения дискретной группы 36-го порядка. Метод расширения

Уравнение (12) принадлежит обоим классам уравнений – (1) и (2), для которых построены дискретные группы диэдра – $\boldsymbol{D_6}$ и $\boldsymbol{D_3}$ соответственно.

Группа $\boldsymbol{D_6}$ применена к уравнению (12) в пункте 5. А вот группа $\boldsymbol{D_3}$ не может быть полностью применена к уравнению (12) в силу теоремы, приведенной в [1]: класс уравнений (2) допускает группу $\boldsymbol{D_3}$ при $K, L \neq \text{ const}$. А для уравнения (12) $K \equiv 1(\text{ и } M \equiv 1)$.

Чтобы снять это ограничение, применим метод расширения: поместим уравнение (12) в следующий класс уравнений:

$$y''_{xx} = Ax^k \sin y \left(y'_x\right)^m \tag{16}$$

который обозначим

$$\left(x^k, \sin y, \left(y'_x\right)^m\right) \tag{17}$$

Коэффициент A в (17) опустим, так как он несущественен: его можно изменять с помощью преобразования масштабирования.

Класс уравнений (16), в отличие от уравнения (12), допускает группу преобразований $\boldsymbol{D_3}$. Уравнения, соответствующие вершинам графа на рис. 1, помещены в таблицу 2.

Таблица 2 - Уравнения-вершины графа на рис. 1

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.140.39.5

1	$(x^k, \sin y, (y'_x)^m)$	1’	$(\sin x, y^k, -(y'_x)^{3-m})$
2	$\left(x^{\frac{1}{1-m}}, y^{-\frac{k}{k+1}}, -(y'_x)^2\sqrt{(y'_x)^2-1}\right)$	2’	$\left(x^{-\frac{k}{k+1}}, y^{\frac{1}{1-m}}, \sqrt{1-(y'_x)^2}\right)$
3	$\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, y^{\frac{1}{m-2}}, (y'_x)^{\frac{k-1}{k}}\right)$	3’	$\left(x^{\frac{1}{m-2}}, -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, (y'_x)^{\frac{2k+1}{k}}\right)$

Преобразование g зависит от функций K, L, M исходного уравнения (в соответствии с (8)), поэтому оно имеет различный вид, будучи применённым к разным уравнениям-вершинам:

$$1 \xrightarrow{\boldsymbol{g}} 2, \boldsymbol{g} : x \to y^{\frac{1}{k+1}}, y \to \arcsin\frac{1}{y'_x}, y'_x \to x^{\frac{1}{1-m}}$$

$$2 \xrightarrow{\boldsymbol{g}} 3, \boldsymbol{g} : x \to y^{\frac{1-m}{2-m}}, y \to \left(y'_x\right)^{\frac{k+1}{k}}, y'_x \to -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3 \xrightarrow{\boldsymbol{g}} 1, \boldsymbol{g} : x \to \cos y, y \to \left(y'_x\right)^{2-m}, y'_x \to x^k.$$

Так как класс уравнений (16) принадлежит классу уравнений (1), то он допускает группу $\boldsymbol{D_6}$, которую можно применить к вершинам 1, 2, 3 графа на рис. 2. В результате, уравнение (16) допускает дискретную группу преобразований 36-го порядка, граф которой изображён на рис. 3.

2.7. Пример получения точного решения с помощью группы 36-го порядка

Рассмотрим уравнение

$$y''_{xx} = Ax^{-\frac{5}{3}} y^{-\frac{7}{3}} \left(y'_x\right)^3 \tag{18}$$

в качестве исходного. Пусть оно соответствует вершине 1.1 на рис. 4

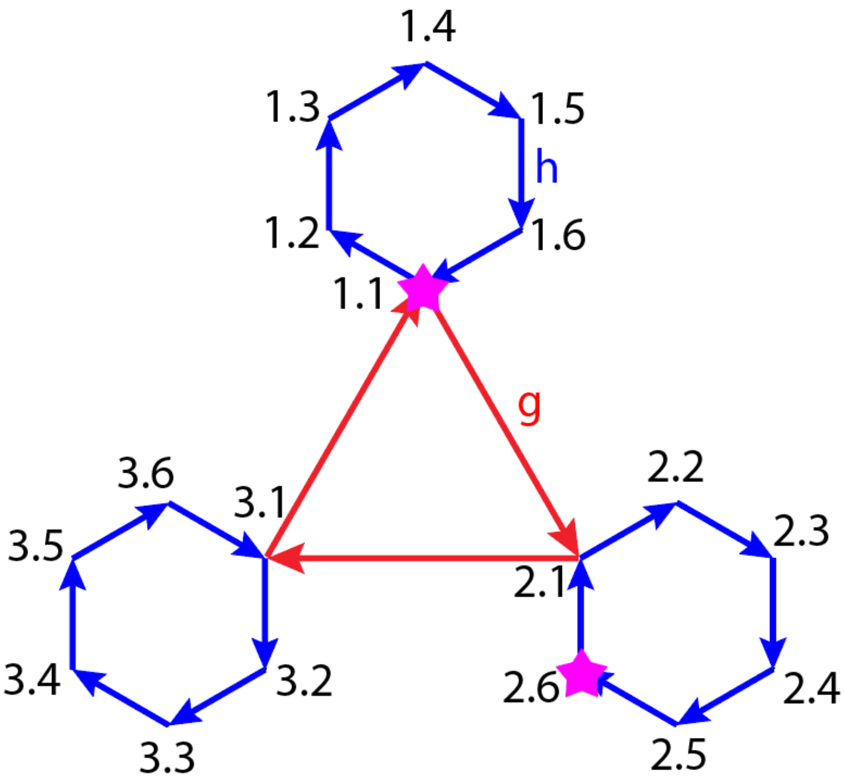

Рисунок 4 - Граф группы 36-го порядка для примера 2
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.140.39.6

Примечание: преобразование r и дополнительные 18 вершин опущены

Согласно [6], общее решение уравнения (18):

$$x = a_1 P_2 P_3^{-\frac{1}{2}}, y = b_1 P_2^4, \tag{19}$$

где $P_2 = \pm\left(\tau^2 - 1\right), P_3 = \tau^3 - 3\tau + C_2, P_4 = \pm\left(\tau^4 - 6\tau^2 + 4C_2\tau - 3\right), a_1$ и b_1 – коэффициенты, зависящие от *A* и C_1 (C_1, C_2 – произвольные постоянные).

Найдем, к примеру, общее решение уравнения

$$y''_{xx} = Bx^{-\frac{10}{7}} \left(y'_x\right)^{\frac{5}{2}} \left(xy'_x - y\right)^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

соответствующее вершине 2.6 графа на рис. 4.

Легко видеть, что $2.6 \xrightarrow{hg^2} 1.1$, поэтому общее решение уравнения 2.6 (20) есть композиция преобразования ***hg²*** и общего решения уравнения 1.1 (19):

$$x = a_2 P_4^{\frac{7}{3}}, y = b_2 P_9 \tag{21}$$

где $P_9 = 7\tau^9 - 108\tau^7 + 84C_2\tau^6 + 378\tau^5 - 756C_2\tau^4 + 84\left(4C_2^2 + 9\right)\tau^3 - 756C_2\tau^2 + 567\tau + 4\left(4C_2^2 - 27\right)C_2$, где a_2 и b_2 – коэффициенты, зависящие от B и C_1; P_4 указано выше.

Заключение

В данной работе продолжено исследование мультипликативных классов уравнений (1), (2), (3), начатое в работах [1], [9], [10].

В работе [1] исследовались только классы уравнений (3) и (2); в [10] рассматривался подкласс класса уравнений (1) со степенной правой частью; в статье [9] было продолжено изучение класса уравнений (2) и начато изучение класса уравнений (1).

Для класса уравнений (1) построена дискретная группа преобразований 12-го порядка, а для класса уравнений (2) – 36-го порядка.

Изложен метод «размножения» – получения новых разрешимых случаев в исследуемых классах уравнений. Приведены примеры нахождения точных решений уравнений редукцией к уравнению колебаний маятника (по группе 12-го порядка), а также с помощью общего решения одного из обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (по группе 36-го порядка).

В дальнейшем можно попытаться применить рассмотренную технику для класса уравнений с несколькими мультипликативными слагаемыми.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Сообщество рецензентов Международного научно-исследовательского журнала
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.140.39.7

Conflict of Interest

None declared.

Review

International Research Journal Reviewers Community
DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.140.39.7

Список литературы / References

1. Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. — М.: Наука, 1993. — 464 с.
2. Polyanin A.D. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. — CRC Press. Boca Raton — London, 2018. — 1496 p.
3. Математическая энциклопедия: в 5 т. Т. 5 / гл. ред. И. М. Виноградов. — М.: Советская энциклопедия, 1984. — 1248 с.
4. Хакимова З.Н. О дискретных симметриях уравнения свободных незатухающих колебаний маятника / З. Н. Хакимова, К. В. Грешневиков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2023». — СПб.: РГПУ, 2023. — С. 254-258.
5. Зайцев В.Ф. Об одном применении метода вложения / В. Ф. Зайцев, О. В. Зайцев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2015». — СПб.: РГПУ, 2015. — С. 30-33.
6. Khakimova Z.N. The Replenishment Method and New Solvable Cases of Third-order Nonlinear Differential Equations of Emden-Fowler Type / Z. N. Khakimova // 7th International conference «Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modeling»: Book of Abstract». — Moscow: NRNU MEPhI, 2019. — p. 49-51.
7. Зайцев О.В. О дискретных симметриях и новых разрешимых случаях в классе полиномиальных дифференциальных уравнений / О. В. Зайцев // Наука XXI века: новый подход. Материалы IX молодежной международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — СПб.: Научно-издательский центр “Открытие”, 2014. — С. 8-16.
8. Хакимова З.Н. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений / З. Н. Хакимова, О. В. Зайцев // Актуальные вопросы современной науки. — №3. — СПб., 2014. — С. 3-11.
9. Хакимова З.Н. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве / З. Н. Хакимова, О. В. Зайцев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. — № 1(4). — С. 61-92. — URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4.html (дата обращения: 28.12.2023)
10. Хакимова З.Н. Решения в полиномах дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений, порожденных вторым уравнением Пенлеве / З. Н. Хакимова, О. В. Зайцев, Л. Н. Тимофеева // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. — № 3(7). — С. 141-152. — URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.3/article.1.9.html (дата обращения: 28.12.2023)

Список литературы на английском языке / References in English

1. Zajcev V.F. Spravochnik po nelinejnym differencial'nym uravneniyam. Prilozheniya v mekhanike, tochnye resheniya [Handbook of Nonlinear Differential Equations. Applications in Mechanics, Precise Solutions] / V. F. Zajcev, A. D. Polyanin. — M.: Nauka, 1993. — 464 p. [in Russian]
2. Polyanin A.D. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. — CRC Press. Boca Raton — London, 2018. — 1496 p.
3. Matematicheskaya enciklopediya: v 5 t. T. 5 [The Mathematical Encyclopedia: in 5 vols. V. 5] / chef ed. I. M. Vinogradov. — M.: Sovetskaya enciklopediya, 1984. — 1248 p.
4. Hakimova Z.N. O diskretnyh simmetriyah uravneniya svobodnyh nezatuhayushchih kolebanij mayatnika [On Discrete Symmetries of the Equation of Free Undamped Oscillations of a Pendulum] / Z. N. Hakimova, K. V. Greshnevikov // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovaniya: materialy nauchnoj konferencii «Gercenovskie chteniya» [Some Actual Problems of Modern Mathematics and Mathematical Education: materials of the Scientific Conference Herzen readings]. — 2023». — SPb.: RGPU, 2023. — P. 254-258. [in Russian]
5. Zajcev V.F. Ob odnom primenenii metoda vlozheniya [About One Application of the Embedding Method] / V. F. Zajcev, O. V. Zajcev // Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovaniya: materialy nauchnoj konferencii «Gercenovskie chteniya — 2015» [Some Actual Problems of Modern Mathematics and Mathematical Education: materials of the Scientific Conference Herzen readings 2015]. — SPb.: RGPU, 2015. — P. 30-33. [in Russian]
6. Khakimova Z.N. The Replenishment Method and New Solvable Cases of Third-order Nonlinear Differential Equations of Emden-Fowler Type / Z. N. Khakimova // 7th International conference «Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modeling»: Book of Abstract». — Moscow: NRNU MEPhI, 2019. — p. 49-51.

7. Zajcev O.V. O diskretnyh simmetriyah i novyh razreshimyh sluchayah v klasse polinomial'nyh differencial'nyh uravnenij [On Discrete Symmetries and New Solvable Cases in the Class of Polynomial Differential Equations] / O. V. Zajcev // Nauka XXI veka: novyj podhod. Materialy IX molodezhnoj mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii studentov, aspirantov i molodyh uchenyh [Science of the XXI Century: a New Approach. Materials of the IX Youth International Scientific and Practical Conference of students, postgraduates and young scientists]. — SPb.: Scientific publishing center “Otkritie”, 2014. — P. 8-16. [in Russian]

8. Hakimova Z.N. Klassifikaciya novyh razreshimyh sluchaev v klasse polinomial'nyh differencial'nyh uravnenij [Classification of New Solvable Cases in the Class of Polynomial Differential Equations] / Z. N. Hakimova, O. V. Zajcev // Aktual'nye voprosy sovremennoj nauki [Current Issues of Modern Science]. — №3. — SPb., 2014. — P. 3-11. [in Russian]

9. Hakimova Z.N. Drobno-polinomial'nye differencial'nye uravneniya: diskretnye gruppy i resheniya cherez transcendent 1-go uravneniya Penleve [Fractional-polynomial Differential Equations: Discrete Groups and Solutions via the Transcendental 1st Painleve Equations] / Z. N. Hakimova, O. V. Zajcev // Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya [Differential Equations and Control Processes]. — 2021. — № 1(4). — P. 61-92. — URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4.html (accessed: 28.12.2023) [in Russian]

10. Hakimova Z.N. Resheniya v polinomah drobno-polinomial'nyh differencial'nyh uravnenij, porozhdennyh vtorym uravneniem Penleve [Solutions in Polynomials of Fractional-polynomial Differential Equations Generated by the Second Painleve Equation] / Z. N. Hakimova, O. V. Zajcev, L. N. Timofeeva // Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya [Differential Equations and Control Processes]. — 2021. — № 3(7). — P. 141-152. — URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.3/article.1.9.html (accessed: 28.12.2023) [in Russian]