ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА / DIFFERENTIAL EQUATIONS, DYNAMICAL SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL

DOI: https://doi.org/10.23670/IRJ.2022.125.2

МЕТОД ПОДОБЛАСТЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Научная статья

Горская Т.Ю.[1, *], Галимянов А.Ф.[2]
[1] ORCID : 0000-0001-7136-8388;
[1] Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань, Российская Федерация
[2] Казанский федеральный университет, Казань, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (gorskaya0304[at]mail.ru)

Аннотация

При изучении некоторых физических процессов, таких как, например, изучение силы, направленной на электрический заряд, движущейся со скоростью, близкой к световой в фоновом магнитном поле, возникает необходимость использования производных дробных порядков, а с развитием науки и технологий такие исследования становятся наиболее актуальными. Подобные задачи приводят к необходимости построения модели процесса с дальнейшей численной реализацией, требующей обоснования применения приближенного аппарата и нахождения точности приближения.

В работе представлены результаты теоретического обоснования применения метода подобластей для нахождения численного решения уравнений с операторами дробного дифференцирования.

Определена структура численного решения и оценка погрешности приближенного решения по метрике энергетического пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования. В качестве тестового примера для частного случая дробно-дифференциального уравнения построена вычислительная схема метода.

Результаты статьи могут служить как для теоретического, так и для практического применения при решении краевых задач, приводящих к дифференциальным уравнениям с дробным порядком производных.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, дробные производные Вейля, операторы дробного дифференцирования, метод подобластей.

SUBFIELD METHOD FOR EQUATIONS WITH FRACTIONAL AND DIFFERENTIAL OPERATOR

Research article

Gorskaya T.Y.[1, *], Galimyanov A.F.[2]
[1] ORCID : 0000-0001-7136-8388;
[1] Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation
[2] Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation

* Corresponding author (gorskaya0304[at]mail.ru)

Abstract

When studying some physical processes, such as, for example, the study of force directed on an electric charge moving at a speed close to light in a background magnetic field, there is a necessity to use derivatives of fractional orders, and with the development of science and technology such studies become most relevant. Such problems lead to the necessity of building a model of the process with further numerical realization, which requires justification of application of the approximation apparatus and finding the approximation accuracy.

The work presents the results of theoretical justification of application of the method of subfields for finding numerical solutions of equations with fractional differentiation operators.

The structure of the numerical solution and an estimate of the error of the approximate solution by the metric of the energy space generated by the fractional differentiation operator are determined. As a test case for a particular case of fractional differential equation, the computational scheme of the method is built.

The results of the article can serve as both theoretical and practical applications in solving boundary value problems that lead to differential equations with fractional order derivatives.

Keywords: differential equations, fractional Weyl derivatives, fractional differentiation operators, subfield method.

Введение

Интерес к изучению уравнений с дробно-дифференциальными операторами в настоящее время обусловлен активным использованием таких уравнений в ряде теоретических и прикладных задач физики, химии, а также биологии и медицины. К таким задачам относятся задачи диффузии, электрохимических процессов, в задачах автоматического управления и обработки сигналов. Активно используются такие уравнения для некоторых экономических задач, связанных со скачкообразными процессами, например, в задачах для непрерывных моделей устойчивой экономики. Также дифференциальные уравнения находят свое применение в задачах, изучающих процессы фильтрации, течения жидкости в пористой среде [1], [2], модели которых также описываются при помощи дифференциальных уравнений дробного порядка. Используются такие уравнения также при описании процессов, обладающих эффектом «памяти», причём дробный порядок уравнений в теории таких систем приобретает основополагающее значение, сопоставимое с классическим анализом применительно к механике сплошных сред [3],

[4]. Таким образом, становится очевидным востребованность дробного исчисления в различных областях науки. Особенно в таких областях, как классическая и квантовая физика, теория поля, физика твердого тела, динамика жидкости, турбулентность, общая химия, нелинейная биология, стохастический анализ, нелинейная теория управления, обработка изображений [5].

Данные задачи, как правило, точно не решаются, поэтому необходимы теоретически обоснованные приближенные методы решения этих уравнений. Отметим, что в последнее время в научной литературе появляются работы, в которых предложены численные методы для некоторых классов уравнений. Приведем некоторые из них. Так, в работе [6] авторами разработан комплект Fractional Integration Toolbox (FIT), который эффективно выполняет дробное численное интегрирование и (или) дифференцирование с помощью интегралов типа Римана-Лиувилля на больших последовательностях данных. Инструментарий, предложенный в [6], допускает распараллеливание и предназначен для использования развертывания на платформах CPU и GPU. Однако, широкому кругу исследователей, занимающихся конкретными задачами, такой комплекс недоступен. Теоретическим изучением интегро-дифференциальных уравнений, определяющих множество скалярных интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами, включая линейные, нелинейные и резольвентные уравнения занимались авторы [7]. Ими был построен функционал Ляпунова, дающий качественные свойства решений, однако полученные результаты в основном касаются интегрируемых решений из интегрируемых возмущений. Авторами [8] приводится обоснование метода общих проекционных полиномов для решения периодических дробно-интегральных уравнений в двух пространствах Гёлдера. Данный результат носит теоретический характер и может быть использован в дальнейших исследованиях, связанных с построением вычислительных схем приближенных методов для задач, где используются уравнения из пространств Гёлдера. Авторы [9] обосновали обобщенный метод Бубнова-Галеркина для нахождения приближенного решения дробно-интегральных уравнений и получили оценки сходимости по метрике энергетического пространства, порожденного дробно-интегральным оператором, также предложили вычислительную схему этого метода для частного примера. В работе [10] авторами рассматривались некоторые экономические модели, использующие дифференциальные уравнения. Для некоторых уравнений непрерывных моделей экономики в работе [10] был предложен и обоснован приближенный метод. Авторами [11] предложен пример дифференциального уравнения, имеющего дробный порядок дифференцирования, который используется для моделей непрерывной экономики, и обоснован приближенный метод его решения. Однако, несмотря на достигнутый успех в этом направлении, остается открытым вопрос теоретического обоснования применения приближенных методов для более общего класса подобных задач. Так как существующие на сегодняшний момент работы, связанные с изучением дифференциальных уравнений дробного порядка, носят лишь частный характер. Наше исследование лишь дополнит теоретическое изучение еще одним методом для частного случая уравнений.

В работе предлагается метод подобластей для нахождения приближенного решения дробно-дифференциальных уравнений. Получены оценки сходимости приближенного решения к точному решению по метрике энергетического пространства, порожденного дробно-дифференциальным оператором. Построенный вычислительный метод проиллюстрирован на частном примере и приведена оценка метода.

Постановка задачи

В пространстве квадратично суммируемых функций на отрезке $[0,2\pi]$ рассмотрено уравнение с дробно-дифференциальным оператором $D^{(\alpha)}$ следующего вида:

$$D^{(\alpha)}u + Tu = f, \tag{1}$$

Где оператор $D^{(\alpha)} = \frac{(D_{+}^{(\alpha)} + D_{-}^{(\alpha)})}{2cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$ выражается через $D_{\pm}^{(\alpha)}$ - производные дробного порядка для функций $\varphi(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$, согласно формулам [12]:

$$(D_{a+}^{(\alpha)}\varphi)(x) \equiv \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

$$(D_{b-}^{(\alpha)}\varphi)(x) \equiv \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, -\infty < x < \infty,$$

здесь $0 < \alpha < 1$. Производные (2) – производные Римана-Лиувилля порядка α, левосторонний и правосторонний, соответственно, а функции u - неизвестная функция и f - заданная функции из пространства $L_2[0,2\pi]$. T - оператор, для которого справедливо условие: $(D^{(\alpha)} + T)$ - линейный оператор, и, в общем случае неограниченный и не положительно определенный.

В [12] показано, что для достаточно хороших функций оператор $D^{(\alpha)}$ совпадает с оператором Вейля для дифференцирования дробного порядка. Поэтому справедливо следующее правило:

$$D^{(\alpha)}u \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} u_k e^{ikx} \tag{3}$$

Здесь u_k суть коэффициентов Фурье для функции u.

В случае, когда дробная производная (2) порядков $a \geq 1$ ее можно представить следующим образом: число α, дробный порядок производной, можно представить как $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ т.е. через сумму целой и дробной частей соответственно. Если α - целое число, то под дробной производной будем понимать обычное дифференцирование:

$$D_{a+}^{\alpha} = (\frac{d}{dx})^{\alpha}, D_{b-}^{\alpha} = (-\frac{d}{dx})^{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Если же число α не целое, то вводятся производные:

$$D_{a+}^{\alpha}f \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{+}^{\{\alpha\}}f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{a+}^{1-\{\alpha\}}f,$$

$$D_{b-}^{\alpha}f \equiv \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{-}^{\{\alpha\}}f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{b-}^{1-\{\alpha\}}f.$$

В явном виде они задаются как:

$$D_{a+}^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, n = [\alpha]+1,$$

$$D_{b-}^{\alpha}f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, n = [\alpha]+1.$$

Для оператора (3) справедливы следующие леммы.

Лемма 1. D^{α} положительно определенный оператор.

Лемма 2. D^{α} симметричный оператор.

Для функций $u, v \in L_2[0, 2\pi]$ введем скалярное произведение и норму соответственно в операторном виде:

$$[u, v] = (D^{\alpha}u, v), [u] = (D^{\alpha}u, u)^{1/2},$$

В явном виде скалярное произведение будет выражено как:

$$[u, v] = (D^{\alpha}u, v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k|k|^{\alpha}e^{ikx}v(x)dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|^{\alpha}u_k v_k$$

Пополняя $D(D^{(\alpha)})$ по норме, введенной выше, получим энергетическое пространство H_D порожденное оператором дробного дифференцирования $D^{(\alpha)}$.

Скалярно умножая исходное уравнение (1) на произвольную функцию $v \in D(D^{(\alpha)})$, получим следующее уравнение:

$$[u, v] + (Tu, v) = (f, v), \tag{4}$$

которое допускает обобщённую постановку задачи. Напомним, что согласно [12] обобщенным решением уравнения (1) называется функция $u \in H_D$, удовлетворяющая уравнению (4) для любой функции $v \in H_D$.

Метод подобластей

Для нахождения приближенного решения уравнения (1) в энергетическом пространстве H_D выбирается система базисных функций φ_j , $j = 1..N$, через которую решение выражается в виде следующего разложения:

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} a_j\varphi_j \tag{5}$$

Неизвестные коэффициенты разложения a_j определяются по методу подобластей из системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$[u_N, \psi_k] + (Tu_N, \psi_k) = (f, \psi_k), k = 1\ldots N, \tag{6}$$

здесь $\psi_k, k = 1\ldots N$ – базисные сплайны нулевого порядка по равноотстоящим узлам.

Приближенное решение, согласно представлению (5), подставим в уравнение (4), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j[\varphi_j, \psi_k] + \sum_{j=1}^{N} a_j(T_{\varphi_j}, \psi_k) = (f, \psi_k), k = 1\ldots N \tag{7}$$

Здесь учли также линейность скалярных произведений.

В качестве иллюстрации приведем пример вычислительной схемы метода подобластей для уравнения (1), при следующих данных: пусть $\alpha = 1,5$ оператор $Tu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin(t+\tau)u(\tau)d\tau, f(t) = 1,5cost + \frac{1}{\sqrt{2}}sint$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$u' + D^{(0,5)}u + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin(t+\tau)u(\tau)d\tau = 1,5cost + \frac{1}{\sqrt{2}}sint \tag{8}$$

Неизвестную функцию $u(t)$ уравнения (8) будем искать приближенно методом подобластей, для этого в разложении (5) в качестве базисных функций возьмем систему функций $\varphi_j = e^{-ijt}, j = 1,..,N$. Неизвестные коэффициенты a_j разложения (5) найдем как решение системы:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j(\varphi_j', \psi_k) + \sum_{j=1}^{N} a_j[\varphi_j, \psi_k] + \sum_{j=1}^{N} a_j(T_{\varphi_j}, \psi_k) = (f, \psi_k), k = 1\ldots N,$$

где в качестве функций $\psi_k, k = 1\ldots N$ используем базисные сплайны нулевого порядка по равноотстоящим узлам вида: $\psi_k = \frac{2\pi kt}{N}$, где $t = 1$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ и где $t = 0$ при $t \notin [y_k, t_{k+1}], t_k = \frac{2\pi k}{N}, k = 1,..,N.$

Тогда система для вычислительной схемы метода подобластей для модельного примера, уравнения (6) примет вид:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j\Bigg(-2sin\frac{\pi j}{N}\cdot e^{-i\frac{\pi j(2k+1)}{N}} + \frac{(-1)^j\sqrt{2}}{\pi(j^2-0,25)}sin\frac{\pi}{N}\times$$

$$\times 2jcos\frac{\pi(2k+1)}{N} - isin\frac{\pi(2k+1)}{N}\Bigg) =$$
$$= sin\frac{2\pi}{N}\cdot\left(\sqrt{2}sin\frac{2\pi(2k+1)}{N} + 3cos\frac{2\pi(2k+1)}{N}\right), k, .., N.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.

Пусть

1) уравнение (1) имеет единственное решение при данной правой части;

2) форма $L(u,v) = [u,v] + (Tu,v)$ является H_D - определенной и H_D - ограниченной, т.е. выполняются условия:

$$L(u,u) \geq \gamma_0^2[u]^2, L(u,v) \geq \gamma_1^2[u][v], \gamma_0, \gamma_1 \equiv const;$$

3) Последовательность подпространств H_N - линейных оболочек функций $\varphi_j, j = 1..N$ - является предельно плотной в H_D .

Тогда при любом конечном N система (6) однозначно разрешима и приближенное решение u_N сходится к точному решению u при $N \to \infty$ по метрике $[\cdot]$ энергетического пространства H_D и справедлива оценка погрешности:

$$[u - u_N] \leq c\varepsilon(u,N),$$

где $\varepsilon(u,N)$ - заданная функция от N (оценка погрешности аппроксимации), удовлетворяющая неравенству:

$$min_{c_j}||D^{(\alpha)}(u - \sum_{j=1}^{N} c_j\varphi_j)|| \leq \varepsilon(u,N) \to 0.$$

Заключение

Предложенный в работе метод подобластей для нахождения приближенного решения дробно-дифференциального уравнения, основан на получении численного решения в виде многочлена по системе базисных функций в заданном пространстве, которую легко подобрать. Кроме того, реализация метода не представляет трудностей, так как она основана на решении систем линейных алгебраических уравнений. Полученная в статье оценка сходимости приближенного решения к точному решению по метрике энергетического пространства, порожденного дробно-дифференциальным оператором, показывает достаточно высокую точность приближения. Считаем, что предложенный вычислительный метод эффективен для решения подобных задач для дробно-дифференциальных операторов.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 528 с.

2. Cueto-Felgueroso L. A phase field model of unsaturated flow [Electronic source] / L. Cueto-Felgueroso, R. Juanes // Water Resour. Res. . – 2009. – №45. – URL: https://www.semanticscholar.org/paper/A-phase-field-model-of-unsaturated-flow-Cueto%E2%80%90Felgueroso-Juanes/fb17ca4a118a81881c636e7582357b5a8038dc54. (accessed: 13.07.22) doi: 10.1029/2009WR007945

3. Огородников Е.Н. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов. / Е.Н. Огородников, В.П. Радченко, Н.С. Яшагин // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2011. – 1(22). – с. 255-268.

4. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка дис. ...д-ра null: 01.01.02 : защищена 2007-10-24 : утв. 2022-07-13 / А.В. Псху – М.: 2007. – 190 с. – URL: https://dlib.rsl.ru/01003158579.

5. Rami E.-N.A. Cosmology with Fractional Action Principle. / E.-N.A. Rami // Romanian Reports in Physics. – 2007. – 3(59). – p. 763-771.

6. Marinov T.M. Fractional integration toolbox. / T.M. Marinov, N. Ramirez, F. Santamaria // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2013. – 16(3). – p. 670-681.

7. Barton T.A. Lp-solutions of singular integro-differential equations. / T.A. Barton, I.K. Purnaras // J. Math. Anal. Appl.. – 2012. – 386. – p. 830-841.

8. Agachev J.R. About the Convergence of the General Projection Polynomial Method for a Class of Periodic Fractional–Integral Equations. / J.R. Agachev, A.F. Galimyanov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – 35(3). – p. 211-217.

9. Галимянов А.Ф. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно-интегральным оператором. / А.Ф. Галимянов, Т.Ю. Горская // Известия КГАСУ. – 2014. – 4(30). – с. 398-402.

10. Vorontsova V.L. Numerical methods of the decision differential the equations for continuous models of economy. / V.L. Vorontsova, T.Yu. Gorskaya // Mediterranean Journal of Social Sciences. – 2015. – 6(1S3). – p. 198-203.

11. Galimyanov A.F. Approximate Methods for Solving Differential Equations for Continuous Models of a Sustainable Economy. / A.F. Galimyanov, T.Yu. Gorskaya // Advances in Social Science, Education and Humanities Research. – 2022. – 632. – p. 309-315.

12. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

13. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков – М.: Наука, 1981. – 416 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Shreder M. Fraktaly', xaos, stepenny'e zakony'. Miniatyury' iz beskonechnogo raya [Fractals, Chaos, and Gradual Laws. Miniatures from the Infinite Paradise] / M. Shreder – Izhevsk: Regulyarnaya i xaoticheskaya dinamika, 2001. – 528 p. [in Russian]

2. Cueto-Felgueroso L. A phase field model of unsaturated flow [Electronic source] / L. Cueto-Felgueroso, R. Juanes // Water Resour. Res. . – 2009. – №45. – URL: https://www.semanticscholar.org/paper/A-phase-field-model-of-unsaturated-flow-Cueto%E2%80%90Felgueroso-Juanes/fb17ca4a118a81881c636e7582357b5a8038dc54. (accessed: 13.07.22) doi: 10.1029/2009WR007945

3. Ogorodnikov E.N. Reologicheskie modeli vyazkouprugogo tela s pamyat'yu i differencial'ny'e uravneniya drobny'x oscillyatorov [Rheological models of viscoelastic bodies with memory and differential equations of fractional oscillators]. / E.N. Ogorodnikov, V.P. Radchenko, N.S. Yashagin // Vestn. Sam. gos. texn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki [Vestn. Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]. – 2011. – 1(22). – p. 255-268. [in Russian]

4. Psxu A.V. Kraevy'e zadachi dlya differencial'ny'x uravnenij s chastny'mi proizvodny'mi drobnogo i kontinual'nogo poryadka [Boundary value problems for partial differential equations with partial derivatives of fractional and continuum orders] dis....of PhD in Natural sciences: 01.01.02 : defense of the thesis 2007-10-24 : approved 2022-07-13 / А.В. Псху – M.: 2007. – 190 p. – URL: https://dlib.rsl.ru/01003158579. [in Russian]

5. Rami E.-N.A. Cosmology with Fractional Action Principle. / E.-N.A. Rami // Romanian Reports in Physics. – 2007. – 3(59). – p. 763-771.

6. Marinov T.M. Fractional integration toolbox. / T.M. Marinov, N. Ramirez, F. Santamaria // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2013. – 16(3). – p. 670-681.

7. Barton T.A. Lp-solutions of singular integro-differential equations. / T.A. Barton, I.K. Purnaras // J. Math. Anal. Appl.. – 2012. – 386. – p. 830-841.

8. Agachev J.R. About the Convergence of the General Projection Polynomial Method for a Class of Periodic Fractional–Integral Equations. / J.R. Agachev, A.F. Galimyanov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – 35(3). – p. 211-217.

9. Galimyanov A.F. Obobshhenny'j metod Bubnova-Galerkina dlya uravnenij s drobno-integral'ny'm operatorom [Generalized Bubnov-Galerkin method for equations with fractional-integral operator]. / A.F. Galimyanov, T.Yu. Gorskaya // Izvestiya KGASU [Proceedings of the KSUAE]. – 2014. – 4(30). – p. 398-402. [in Russian]

10. Vorontsova V.L. Numerical methods of the decision differential the equations for continuous models of economy. / V.L. Vorontsova, T.Yu. Gorskaya // Mediterranean Journal of Social Sciences. – 2015. – 6(1S3). – p. 198-203.

11. Galimyanov A.F. Approximate Methods for Solving Differential Equations for Continuous Models of a Sustainable Economy. / A.F. Galimyanov, T.Yu. Gorskaya // Advances in Social Science, Education and Humanities Research. – 2022. – 632. – p. 309-315.

12. Samko S.G. Integraly' i proizvodny'e drobnogo poryadka i nekotory'e ix prilozheniya [Fractional order integrals and derivatives and some applications] / S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev – Minsk: Nauka i texnika, 1987. – 688 p. [in Russian]

13. Marchuk G.I. Vvedenie v proekcionno-setochny'e metody' [Introduction to projection-grid methods] / G.I. Marchuk, V.I. Agoshkov – M.: Nauka, 1981. – 416 p. [in Russian]