

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.138.15>ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ НА КООРДИНАТНОЙ  
ПЛОСКОСТИ

Научная статья

Косников Ю.Н.<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>ORCID : 0000-0003-4717-7682;<sup>1</sup> Пензенский государственный университет, Пенза, Российская Федерация

\* Корреспондирующий автор (kosnikov[at]gmail.com)

**Аннотация**

При описании объектов визуализации набором характерных (опорных) точек геометрическая форма объектов восстанавливается с помощью интерполяции. Как правило, используется параметрическая интерполяция с применением смешивающих функций. Эффективность интерполяции в большой степени зависит от выбора значений параметров в опорных точках. На примере сплайн-интерполяции исследователи показали, что благоприятные визуальные формы создают хордовая и центростремительная параметризации. Однако они имеют недостатки. Это, прежде всего, организация процесса интерполяции отдельно по сегментам, причем диапазон значений параметра для каждого сегмента свой и представлен набором вещественных чисел. Это усложняет алгоритм и снижает производительность интерполяции. В статье предлагается интерполяция с целочисленными отсчетами параметра. Эти отсчеты определяются на плоскости аргументов интерполанта. Описан алгоритм нахождения отсчетов. В статье приведены результаты экспериментального сравнения возможностей целочисленной и центростремительной параметризаций на примере плоской кривой. Эксперимент показал, что целочисленная параметризация по точности не уступает центростремительной при рациональном выборе расстояний между опорными точками. В то же время целочисленные значения параметра являются аргументами смешивающих функций, значения которых могут быстро находиться табличным методом.

**Ключевые слова:** поверхность, интерполяция, центростремительная параметризация, целочисленная параметризация, смешивающая функция.

## INTEGER PARAMETERIZATION OF GEOMETRIC SHAPES ON THE COORDINATE PLANE

Research article

Kosnikov Y.N.<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>ORCID : 0000-0003-4717-7682;<sup>1</sup> Penza State University, Penza, Russian Federation

\* Corresponding author (kosnikov[at]gmail.com)

**Abstract**

When describing visualization objects by a set of characteristic (reference) points, the geometrical shape of objects is restored by means of interpolation. As a rule, parametric interpolation with application of mixing functions is used. The efficiency of interpolation to a great extent depends on the choice of parameter values in the reference points. Using spline interpolation as an example, researchers have shown that chordal and centripetal parameterization produce favourable visual shapes. However, they have disadvantages. These are, firstly, the organization of the interpolation process separately by segments, and the range of parameter values for each segment is different and is represented by a set of real numbers. This complicates the algorithm and reduces the interpolation performance. The paper proposes interpolation with integer counts of the parameter. These samples are defined on the argument plane of the interpolant. An algorithm for finding the counts is described. The paper presents the results of an experimental comparison of the possibilities of integer and centripetal parameterization on the example of a plane curve. The experiment has shown that the integer parameterization is not inferior to centripetal parameterization in accuracy at rational choice of distances between reference points. At the same time, the integer parameter values are arguments of mixing functions, the values of which can be quickly found by the tabular method.

**Keywords:** surface, interpolation, centripetal parameterization, integer parameterization, mixing function.

**Введение**

В задачах геометрического моделирования объектов визуализации исходными данными, зачастую, являются неупорядоченные множества характерных (опорных) точек. Тогда поверхность объекта восстанавливается интерполяционными методами. В качестве примеров можно назвать визуализацию результатов 3D-сканирования объектов, построение поверхностей по точкам, заданным разработчиком, создание рельефа земной поверхности по замерам топографов, отображение тенденции поведения физической величины по набору дискретных отсчетов (например, по сигналам датчиков), наглядное представление экспериментальных данных. В этих случаях традиционно применяются методы интерполяции на основе смешивающих функций: метод обратных взвешенных расстояний, метод Шепарда, различные виды сплайн-интерполяции, триангулированная нерегулярная сеть, радиальные базисные функции и другие. Им посвящен целый ряд публикаций разных лет, в частности [1], [2], [3], [4]. Опорные точки становятся узлами интерполяции. В процессе интерполяции координаты текущей точки определяются как взвешенные

значения смешивающих функций, которые привязаны к опорным точкам. Можно представить, что каждая опорная точка вносит в координаты текущей точки некоторый вклад, зависящий от взаимного расположения этих точек.

Поверхности объектов могут иметь сложную геометрию, в связи с чем функция-интерполянт записывается в параметрической форме:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} bf(u, v), \\y &= \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} bf(u, v), \\z &= \sum_{i=1}^N \lambda_{zi} bf(u, v),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x, y, z$  – декартовы координаты текущей точки;

$N$  – количество опорных точек;

$bf(u, v)$  – смешивающая функция;

$u, v$  – параметры (аргументы функции-интерполянта);

$\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}$  – весовые коэффициенты – коэффициенты влияния  $i$ -го узла интерполяции на декартовы координаты текущей точки.

Систему параметрических координат  $u, v$  можно представить в виде криволинейной сетки, «наброшенной» на поверхность. Узлы параметрической сетки привязываются к опорным точкам и являются узлами интерполяции. Для получения интерполяции с малой погрешностью важно рационально назначать опорным точкам значения параметрических координат.

### Методы и принципы параметризации геометрических форм

Расстановка опорных точек в области определения поверхности может характеризоваться значительной неравномерностью. Если количество узлов параметрической сетки совпадает с количеством опорных точек, то расстояние между соседними опорными точками равно одной параметрической единице. Из-за этого появляются нежелательные аномалии. Дело в том, что для компьютерной визуализации объекты представляются в полигональной форме. Если привязывать полигоны к ячейкам координатной сетки, то на участках сгущения опорных точек возникнет много мелких полигонов, хотя прикладная задача может и не требовать такой детальности. Кроме того, на таких участках могут возникать выбросы координат и петли, что неприемлемо для визуальных образов потенциально гладких поверхностей. С другой стороны, на участках с редкой расстановкой опорных точек возникнут обширные плоские участки, что придает поверхности стилизованный («граненый») вид.

Выходом является сопоставление параметрических координат опорных точек с их пространственным размещением. Такой способ для случая параметризации кривых предложен еще в 1989 году. В работе [5] исследуются отличия двух разновидностей параметризации – хордовой (chordal) и центростремительной (centripetal) от традиционной – равномерной (uniform). Исследование проводится на примере интерполяции кубической кривой. В диссертационной работе А.Ю. Якимович [6] показано, что и хордовая, и центростремительная параметризации имеют достоинства и недостатки, а лучшей параметризацией кривой является естественная, или натуральная параметризация – параметризация длиной дуги. Приближением к естественной параметризации является хордовая параметризация. К такому же выводу пришли авторы статьи [7], исследовавшие возможные виды параметризации для применения кардинального сплайна в задачах анимации. В работе [8] рассматриваются геометрические свойства квадратичных интерполяционных кривых Безье с равномерной и центростремительной параметризацией, показаны достоинства центростремительной параметризации. Рекомендации по применению названных видов параметризации кривой Безье в задаче отображения дорог на карте изложены в статье [9]. В работе [10] на примере сплайна Кэтмулла-Рома математически доказывается, что центростремительная параметризация имеет преимущество в части качества интерполяции. Авторы статьи [11] также считают, что одной из наиболее эффективных и, вероятно, наиболее часто используемой является центростремительная параметризация. Эксперимент, как правило, подтверждает этот вывод, например, в [12].

Параметрические расстояния между соседними опорными точками кривой в [10] описываются выражением

$$s_{i+1} = s_i + \|P_{i+1} - P_i\|^\alpha,\tag{2}$$

где в двойных прямых скобках – декартово расстояние между двумя последовательными точками  $P_i, P_{i+1}$

$S_i, S_{i+1}$  – их параметрические координаты, причем  $s_0 = 0$ ;

$\alpha$  – показатель степени, зависящий от вида параметризации.

Для равномерной параметризации  $\alpha=0$ , для хордовой –  $\alpha=1$ , для центростремительной –  $\alpha=1/2$ . Смысл центростремительной параметризации прост: для близко расположенных точек приращение параметрических координат увеличивается по сравнению с декартовым расстоянием, а для далеко разнесенных точек это приращение уменьшается. Действительно, для  $\|P_{i+1} - P_i\| < 1$  имеет место соотношение

$$\sqrt{\|P_{i+1} - P_i\|} > \|P_{i+1} - P_i\|,$$

а для  $\|P_{i+1} - P_i\| > 1$  имеет место

$$\sqrt{\|P_{i+1} - P_i\|} < \|P_{i+1} - P_i\|.$$

Если на единице параметрической системы координат организовать фиксированное число геометрических примитивов (для кривых это линейные отрезки), то их количество на участках сгущения опорных точек увеличивается, а на участках разрежения – падает. Это соответствует логике расстановки опорных точек: на участках рельефа с мелкими деталями опорных точек должно быть больше, на ровных участках – меньше. В [10] утверждается, что центростремительная параметризация не допускает образования петель и приближает кривую к ломаной, соединяющей опорные точки. Однако для интерполяции поверхности такой вид параметризации применить весьма затруднительно.

Параметризация поверхностей – одна из сложных задач геометрического моделирования. В принципе, есть две задачи: параметризация реального объекта (или его модели) и параметризация по множеству точек, принадлежащих поверхности объекта. В первом случае разработчик сам определяет размещение параметрической сетки на поверхности объекта. Поверхность, зачастую, уже задана чертежами или каркасной моделью. Например, в статье [13] описана хордовая параметризация в узловых точках каркаса. Сравнительный анализ применения равномерной, хордовой и центростремительной интерполяции на опорных точках B-сплайновой поверхности, заданной сеткой опорных точек, приведен в [14]. В работе [15] говорится о параметризации строительных форм, которые существуют в виде реального проекта. Процесс такой параметризации во многом формализован и реализован в виде программного обеспечения САПР, например, в популярном моделире Altair HyperMesh [16]. Существует целый спектр методов параметризации реальных объектов, и этим методом посвящена обширная библиография. Например, в статье 2005 года [17] авторы проанализировали 78 статей на эту тему и констатировали интенсивный рост числа публикаций в дальнейшем. Причина такого роста в том, что в зависимости от конкретных требований, предъявляемых практическими приложениями, для задания параметризации используются различные ограничения. Типичными примерами ограничений являются точечные ограничения, ограничения кривизны и топологические ограничения. Ряд алгоритмов параметризации поверхностей с учетом ограничений рассмотрен в диссертационной работе Hanxiao Shen [18].

Вторая задача – параметризация поверхности по множеству опорных точек – имеет множество решений, что равнозначно отсутствию универсального решения. Поэтому здесь тоже приходится учитывать ограничения и указания разработчика. В частности, в работе [19] специалистами предлагается параметризация вдоль линий сечения поверхности, что сводит задачу к параметризации кривых. В этом случае, как уже отмечалось, в качестве параметра следует использовать длину дуги между опорными точками. Однако, как справедливо утверждается в работе [20], интерполируемая кривая заранее не известна, поэтому следует выбирать хордовую параметризацию.

Как видно из приведенного обзора публикаций, авторы в зависимости от прикладной задачи рекомендуют и хордовую, и центростремительную параметризацию. У них есть общее свойство: последовательное вычисление параметрических координат по выражению (2) возможно только тогда, когда известен порядок размещения опорных точек на геометрической форме. В случае кривой он определяется достаточно просто: либо с помощью сортировки точек по их декартовым координатам, либо с помощью указаний разработчика. В случае поверхности неравномерность расстановки опорных точек приводит к тому, что результат сортировки дает упорядочение точек, непригодное для применения традиционной, например, сплайновой, интерполяции. В случае применения центростремительной и хордовой параметризации интервал между каждой парой опорных точек нужно вычислять отдельно и организовывать его разбиение на различное число участков для визуализации. Кроме того, выражение (2) дает параметрические координаты опорных точек в виде вещественных чисел. Вычисление значений интерполянта в этом случае замедляется, особенно если учесть, что в прикладных задачах визуализации опорные точки исчисляются сотнями и тысячами.

### Целочисленная параметризация на плоскости

Предлагается целочисленная параметризация поверхности на плоскости аргументов. Основой параметризации является сетка целочисленных координат  $u, v$ . Она не совпадает с исходной сеткой координат декартова пространства, а ее детальность выбирается, исходя из плотности расположения опорных точек. Организуется перебор опорных точек причем последовательность перебора не важна. Каждая точка «привязывается» к ближайшему узлу параметрической сетки и тем самым получает пару координат  $u, v$ , которые находятся по выражениям

$$u = \left[ \frac{x}{x_{\max}} U \right], v = \left[ \frac{y}{y_{\max}} V \right] \quad (3)$$

где квадратные скобки означают округление до ближайшего целого;

$U, V$  – максимальные количества отсчетов по координатам  $u$  и  $v$ ;

$x_{\max}, y_{\max}$  – границы области определения реконструируемой поверхности.

Процесс нахождения параметрических координат можно образно представить как изгибание исходных координатных линий  $u, v$  таким образом, чтобы опорные точки попадали в узлы параметрической сетки. Возникает криволинейная сетка на плоскости  $xu$ , эту сетку можно считать проекцией на плоскость криволинейной ортогональной пространственной системы параметрических координат.

В процессе нахождения параметрических координат по выражениям (3) возможна аномалия: две и более точек могут получить одинаковые целочисленные координаты. Аномалия устраняется одним из двух приемов. Во-первых, можно ввести более частую сетку параметрических координат, то есть увеличить  $U, V$ . Во-вторых, совпадающие точки можно заменить одной – с усредненной координатой высоты. Тем самым проводится редукция числа опорных точек и решается проблема излишне высокой детальности модели поверхности.

Теперь каждая  $i$ -я опорная точка получает пять координат: три декартовы  $x_i, y_i, z_i$  и две параметрические  $u_i, v_i$ , причем параметрические координаты являются целыми числами. Такая параметризация выполняется заранее, не в режиме реального времени. Полученные координаты являются исходными данными для реконструкции поверхности с

помощью интерполяции. Опорные точки на параметрической сетке расставлены в соответствии с их декартовыми координатами. Расстояния между соседними опорными точками находятся в плоскости аргументов  $x, y$ , то есть являются проекциями хорд, соединяющих соседние опорные точки в пространстве. Поэтому предложенную параметризацию можно назвать целочисленной хордовой параметризацией на плоскости. Описанный способ параметризации применим к однозначным поверхностям, у которых каждой паре значений аргументов может соответствовать не более одной пространственной точки. Это ограничение предлагаемой параметризации. Реальные поверхности могут быть многозначными. Их приходится разбивать на однозначные фрагменты и проводить их параметризацию раздельно. Вариант методики выделения фрагментов описан в работе [21].

Из-за различных расстояний между опорными точками не все узлы параметрической сетки оказываются занятыми. Чтобы можно было применить для реконструкции поверхности любой метод интерполяции, следует расставить дополнительные опорные точки в свободных узлах сетки. Для этого предлагается применить параметрическую интерполяцию на основе смешивающих функций ортогонального базиса (СФОБ) и табличных вычислений. СФОБ представляют собой комбинацию из двух смешивающих функций и отличаются тем, что действуют раздельно вдоль параметрических координат, благодаря чему каждый компонент СФОБ зависит только от одной параметрической координаты [22]. Табличные вычисления СФОБ могут быть применены, благодаря целочисленным отсчетам параметрических координат.

Интерполянт записывается в виде трех параметрических уравнений вида (1):

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \phi_{ui}(r_{ui}) \phi_{vi}(r_{vi}), \\ y &= \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \phi_{ui}(r_{ui}) \phi_{vi}(r_{vi}), \\ z &= \sum_{i=1}^N \lambda_{zi} \phi_{ui}(r_{ui}) \phi_{vi}(r_{vi}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\phi_{ui}(r_{ui}), \phi_{vi}(r_{vi})$  – СФОБ  $i$ -й опорной точки, действующие вдоль координат  $u$  и  $v$ , соответственно;

$r_{ui}, r_{vi}$  – аргументы СФОБ – расстояния между текущей точкой и  $i$ -й опорной точкой вдоль координатных линий  $u, v$ :

$$r_{ui} = |u - u_i|, r_{vi} = |v - v_i|$$

$u, v$  – параметрические координаты текущей точки поверхности;

$\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}$  – коэффициенты влияния  $i$ -й опорной точки на декартовы координаты текущей точки.

Значения коэффициентов  $\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}$  находятся из условия точного прохождения реконструируемой поверхности через опорные точки. Смысл условия таков: если в качестве текущей точки в систему (4) подставить параметрические координаты опорной точки, то вычисленные по (4) значения должны совпасть с декартовыми координатами этой опорной точки. Условие должно быть справедливым для всех опорных точек. Условие записывается в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \phi_{ui}(r_{u(i-j)}) \phi_{vi}(r_{v(i-j)}), \\ y_j &= \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \phi_{ui}(r_{u(i-j)}) \phi_{vi}(r_{v(i-j)}), \\ z_j &= \sum_{i=1}^N \lambda_{zi} \phi_{ui}(r_{u(i-j)}) \phi_{vi}(r_{v(i-j)}), j = 1..N, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $r_{u(i-j)}, r_{v(i-j)}$  – параметрические расстояния между  $i$ -й и  $j$ -й опорными точками.

Каждое уравнение системы (5) разворачивается в систему из  $N$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), неизвестными в которых являются коэффициенты  $\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}$  ( $i=1..N$ ). Решение СЛАУ одним из известных методов (Гаусса, Крамера, LU-разложения или другим) дает значения коэффициентов влияния исходных опорных точек. Для уменьшения числа слагаемых в уравнениях СЛАУ следует применять СФОБ, локализованные в пространстве, то есть такие, значения которых убывают с удалением от опорной точки и при каком-то удалении могут не учитываться (обнуляются). Примером такой СФОБ является биквадратная (расстояния  $r_u, r_v$  приведены к размеру зоны влияния опорной точки):

$$bf(u, v) = \begin{cases} (r_u^2 - 1)^2 \cdot (r_v^2 - 1)^2 & \text{при } (r_v \text{ и } r_u) < 1, \\ 0 & \text{при } (r_v \text{ или } r_u) \geq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Подстановка найденных коэффициентов влияния опорных точек в систему (4) дает интерполянт. Для заполнения узлов параметрической координатной сетки нужно организовать последовательный перебор этих узлов в диапазонах координат  $u = 0 .. U, v = 0 .. V$  и для каждого узла найти декартовы координаты из системы (4). Они принимаются за координаты новых опорных точек. Следует отметить, что все расстояния  $r_{ui}, r_{vi}$  в процессе интерполяции

получаются целочисленными. Это дает возможность применить быстрые табличные вычисления смешивающих функций. Их значения вычисляются заранее с некоторым шагом и заносятся в память компьютера. Целочисленные расстояния  $r_{ui}, r_{vi}$  после приведения к диапазону адресов памяти используются для считывания из нее значений смешивающих функций.

Получено множество новых, регулярно расставленных опорных точек. Они могут использоваться в качестве вершин полигональной сетки или служить опорными точками следующего этапа интерполяции. Следующий этап может быть направлен на интерполяцию в режиме реального времени. Например, сплайн-интерполяция на каждом шаге использует гораздо меньше вычислений, чем интерполяция с применением радиальных или ортогональных базисных функций. Выделение наборов опорных точек, необходимых для формирования сплайновых сегментов, на регулярной ортогональной сетке не представляет труда. Остается показать, что интерполяция с применением целочисленной параметризации на плоскости не уступает по точности другим видам интерполяции.

### Экспериментальное исследование возможностей целочисленной параметризации

Целочисленную параметризацию нужно сравнивать с лучшими известными методами. Например, высокое качество центростремительной параметризации, обоснованное в работе [10], делает целесообразным сравнение именно с ней. Поскольку описание центростремительной параметризации относится к плоской кривой, экспериментальное исследование целочисленной параметризации также проведено для плоской кривой. Это не влияет на применимость параметризации к поверхности, поскольку, как отмечалось выше, поверхность может строиться на основе криволинейных сечений. В этом случае в качестве аргумента интерполанта используется одна параметрическая координата. Для целочисленной параметризации ее ось совпадает с осью  $x$ .

Исследование параметризации проведено на примере тестовой кривой, имеющей следующее описание  $x(t) = 0.3t, y(t) = \sin(0.6(t + 2)) + \log_2(0.3(t + 2)) - 1, t = 0 \dots 11$ ,

где  $t$  – параметр построения кривой (параметр интерполяции будет обозначен буквой  $s$ ).

Такая кривая выбрана потому, что ее фрагменты имеют различные значения кривизны и крутизны. Для проведения интерполяции с применением разных методов параметризации на тестовой кривой задано шесть опорных точек. На участках с более быстрым изменением производной задано больше точек, на остальных участках – меньше. В итоге декартовы расстояния между соседними опорными точками оказались существенно различными. Точки обозначены  $P_0, \dots, P_5$  и показаны на рис. 1. Тестовая кривая на рисунке показана красным цветом. Декартовы координаты  $x, y$  опорных точек приведены в таблице 1. Параметрические координаты точек для центростремительной параметризации  $s_{cent}$  найдены по выражению (2) и также помещены в таблицу 1.

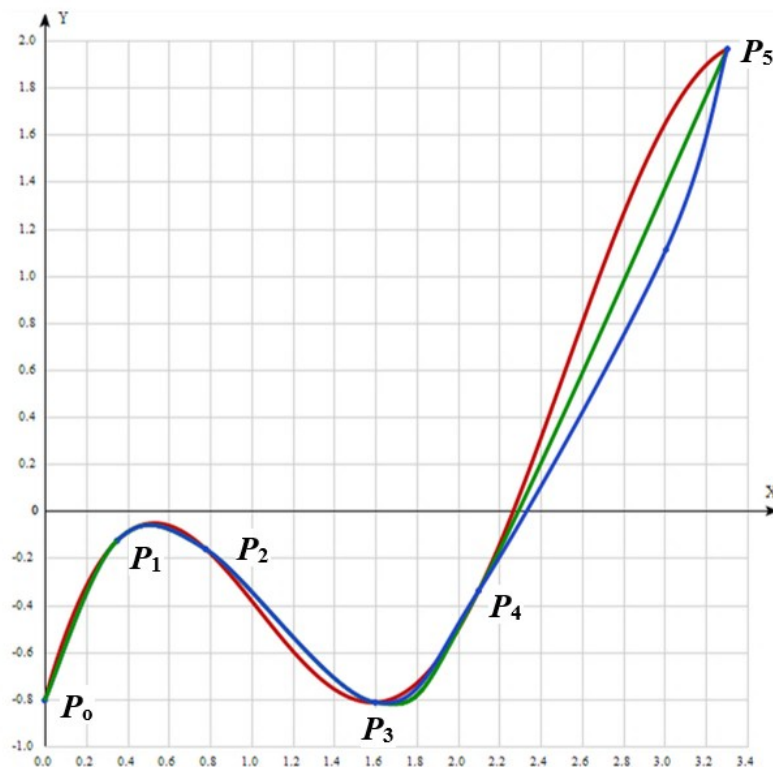


Рисунок 1 - Два вида интерполяции тестовой кривой по шести опорным точкам  
DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.138.15.1>

Таблица 1 - Декартовы и параметрические координаты опорных точек

DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.138.15.2>

	P <sub>0</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
t	0	1.17	2.60	5.33	7.00	11.01
x	0	0.35	0.78	1.60	2.10	3.30
y	-0.805	-0.127	-0.163	-0.814	-0.340	1.963
S <sub>i-cent</sub>	0	0.873	1.530	2.553	3.383	4.995
S <sub>i-int</sub>	0	1	2	5	6	10
λ <sub>xi</sub>	90.07	422.51	-1085.85	1961.12	-1468.85	70.41
λ <sub>yi</sub>	1447.91	-2188.62	-453.63	4862.33	-3911.64	195.72

Для интерполяции кривой с применением центростремительной параметризации, как и в работе [10], использован сплайн Кэтмулла-Рома. Сплайновая кривая строится по отрезкам. В рассматриваемом случае их должно быть пять. Каждый отрезок описывается четырьмя опорными точками. В матричной форме описание отрезка имеет вид:

$$x = S \cdot \text{MCR} \cdot X^T,$$

$$y = S \cdot \text{MCR} \cdot Y^T$$

где S – матрица-строка степеней параметра, в которой s<sub>min</sub> и s<sub>max</sub> – начальное и конечное значения параметра в пределах одного отрезка:

$$s = \left[ \left( \frac{s-s_{\min}}{s_{\max}-s_{\min}} \right)^3 \quad \left( \frac{s-s_{\min}}{s_{\max}-s_{\min}} \right)^2 \quad \left( \frac{s-s_{\min}}{s_{\max}-s_{\min}} \right) \quad 1 \right]$$

MCR – базисная матрица Кэтмулла-Рома:

$$\text{MCR} = 0.5 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

X, Y – матрицы-строки декартовых координат опорных точек отрезка:

$$X = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}, Y = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}.$$

Свойство сплайна Кэтмулла-Рома таково, что при «пробегании» аргументом диапазона от минимального до максимального значения рассчитывается участок кривой между двумя средними точками. Чтобы восстановить крайние отрезки тестовой кривой, нужно применить для сплайновой кривой кратные крайние опорные точки, то есть строить первый отрезок на опорных точках P<sub>0</sub>, P<sub>0</sub>, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, второй отрезок – на точках P<sub>0</sub>, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, третий – на точках P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, P<sub>4</sub>, четвертый – на точках P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, P<sub>4</sub>, P<sub>5</sub> и пятый – на точках P<sub>3</sub>, P<sub>4</sub>, P<sub>5</sub>, P<sub>5</sub>. В пределах каждого отрезка параметр s изменяется в своем диапазоне: для первого отрезка – в диапазоне [0, 0.873], для второго – в диапазоне [0.873, 1.530], далее – в диапазонах [1.530, 2.553], [2.553, 3.383], [3.383, 4.995], как это видно из таблицы 1. Кривая, полученная в результате интерполяции сплайном Кэтмулла-Рома, показана на рисунке 1 зеленой линией.

Для интерполяции с целочисленной параметризацией использована биквадратная СФОБ (6). В случае интерполяции плоской кривой используется один параметр s, и параметрическая запись интерполанта получается в результате упрощения системы уравнений (4):

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^5 \lambda_{xi} \left( 1 - \left( \frac{s - s_{i-int}}{s_{inf}} \right)^2 \right)^2, \\ y &= \sum_{i=0}^5 \lambda_{yi} \left( 1 - \left( \frac{s - s_{i-int}}{s_{inf}} \right)^2 \right)^2, s = 0..5, \end{aligned} \quad (7)$$

где s<sub>i-int</sub> – целочисленная параметрическая координата i-й опорной точки;

s<sub>i-inf</sub> – половина симметричной области влияния опорной точки вдоль оси параметра.

Целочисленные параметрические координаты s<sub>i-int</sub> опорных точек найдены по первому выражению (3) с учетом замены u на s и занесены в таблицу 1. Значения коэффициентов влияния λ<sub>xi</sub>, λ<sub>yi</sub> определены из условий точного прохождения реконструируемой кривой через опорные точки. Условия получены упрощением (5). Например, для координаты x эти условия выглядят так:

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_{xi} \left( 1 - \left( \frac{s-0}{12} \right)^2 \right)^2 = 0 \quad \text{– прохождение кривой через } P_0,$$

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_{xi} \left( 1 - \left( \frac{s-1}{12} \right)^2 \right)^2 = 0.35 \quad \text{– прохождение кривой через } P_1, \dots$$

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_{xi} \left( 1 - \left( \frac{s-10}{12} \right)^2 \right)^2 = 3.304 \quad \text{– прохождение кривой через } P_5,$$

при этом параметр принимает значения координат опорных точек:  $s=0, 1, 2, 5, 6, 10$ .

Значение  $s_{inf}$  принято равным 12 для того, чтобы на каждую текущую точку кривой влияли все опорные точки, поскольку их количество мало. Аналогично составлена СЛАУ для отыскания значений  $\lambda_{yi}$ . Системы уравнений решены методом Крамера, в результате получены значения коэффициентов влияния опорных точек, показанные в таблице 1. Они подставлены в математическое описание интерполянта (7), по которому найдены промежуточные точки кривой. Кривая, реконструированная с применением СФОБ и целочисленной параметризации, показана на рисунке 1 синим цветом.

### Обсуждение

Анализ полученных результатов показывает:

- форма кривой, полученной с применением целочисленной параметризации (ЦП-кривой), соответствует тестовой кривой и кривой, составленной из отрезков сплайна Кэтмулла-Рома (КР-кривой);

- на участках с небольшими расстояниями между опорными точками ( $P_0 - P_1, P_1 - P_2$ ) ЦП-кривая и составная КР-кривая практически совпадают. Для иллюстрации на рисунке 1 первый отсек КР-линии (зеленого цвета) наложен поверх ЦП-кривой, а второй отсек расположен под синей ЦП-линией;

- на участках с большими расстояниями между опорными точками ( $P_4 - P_5$ ) оба интерполянта дают значительную погрешность, причем погрешность интерполяции с целочисленной параметризацией превосходит погрешность сплайна Кэтмулла-Рома. Следует отметить, что и погрешность сплайна на указанном участке кривой слишком велика для практического применения в задачах проектирования и моделирования (приведенная погрешность около 7%). Это говорит о том, что расстояние между опорными точками  $P_4$  и  $P_5$  задано слишком большим для точной интерполяции.

### Заключение

Центростремительная параметризация обладает рядом особенностей, из-за которых при выборе имеет смысл отдать предпочтение целочисленной параметризации. К этим особенностям относятся вещественные значения параметрических координат опорных точек. Вещественные значения замедляют интерполяцию в случае большого количества опорных точек. Еще одна особенность – посегментная интерполяция в случае применения составных кривых, например, описываемых сплайнами. Напротив, применение СФОБ не требует отдельной интерполяции кривой по сегментам, а целочисленные приращения параметра при движении по координатной оси позволяют рассчитать значения СФОБ быстрым табличным методом. В то же время целочисленная параметризация не уступает центростремительной параметризации по точности интерполяции, но требует более частой расстановки опорных точек. При выполнении этого условия сочетание целочисленной параметризации и локализованных в пространстве СФОБ позволяет повысить производительность интерполяции без потери качества.

В статье проведено сравнение возможностей двух различных интерполянтов – составного сплайна Кэтмулла-Рома и полиномов на основе СФОБ. Очевидно, далее следует провести исследование интерполяционных возможностей СФОБ с различными видами параметризации как для кривых, так и для поверхностей.

### Конфликт интересов

Не указан.

### Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

### Conflict of Interest

None declared.

### Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

### Список литературы / References

1. Vuçini E. Efficient Reconstruction from Non-uniform Point Sets / E. Vuçini, T. Möller, E. Gröller // The Visual Computer. — 2008. — Vol. 24(7). — P. 555-563. — DOI: 10.1007/s00371-008-0236-x
2. Александрова Н.В. Смешивающие функции в геометрическом моделировании и визуализации поверхностей свободных форм / Н.В. Александрова, А.П. Зимин, Ю.Н. Косников [и др.] // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Научное периодическое издание. Серия: Технические науки. Информационные технологии. — Пенза: Изд-во ПГТУ. — 2015. — №03(25). — Т.1. — С. 51-60.
3. Li J. Image Scaling Based on the Catmull-Rom Spline Surfaces with Free Parameters / J. Li, L. Yang, Y. Zhong // Proceedings of the 2018 3rd International Conference on Modelling, Simulation and Applied Mathematics (MSAM 2018). — 2018. — P. 316-320. — DOI: 10.2991/msam-18.2018.66.
4. Qin S. Interpolation Technique for the Underwater DEM Generated by an Unmanned Surface Vessel / S. Qin, Z. Dai // Computer Modeling in Engineering and Sciences. — 2023. — Vol. 136. — Num.3. — P. 3157-3172. — URL: <http://www.techscience.com/CMES/v136n3/51847> (accessed: 12.10.2023)
5. Lee E.T.Y. Choosing Nodes in Parametric Curve Interpolation / E.T.Y. Lee // Computer-Aided Design. — 1989. — Vol. 21. — no. 6. — P. 363-370. — DOI: 10.1016/0010-4485(89)90003-1.
6. Якимович А.Ю. Наилучшая параметризация в задачах приближения кривых и поверхностей: дис.... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Якимович Анна Юрьевна. — М., 2005. — 110 с.
7. Гридчина Е.Е. Использование контрольных кластеров для корректирования деформации антропоморфных полигональных моделей / Е.Е. Гридчина, Д.А. Заставной, А.А. Букатов // 23-я Международная конференция по компьютерной графике и зрению (Россия, Владивосток, 16-20 сентября 2013 г.). — <https://gc2011.graphicon.ru/html/2013/papers/282-285.pdf> (дата обращения: 12.10.2023)

8. Juhász I. On Parametrization of Interpolating Curves / I. Juhász, M. Hoffmann // *July Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2008. — №216(2). — P.413-424. DOI: 10.1016/j.cam.2007.05.019.
9. Mohd S. Bezier Curve Interpolation on Road Map by Uniform, Chordal and Centripetal Parameterization / S. Mohd, A. Ramli // *Conference Paper in AIP Conference Proceedings*. — 2018. — Vol. 1974. — P. 020087. — DOI: 10.1063/1.5041618.
10. Yuksel C. Parameterization and Applications of Catmull—Rom Curves / C. Yuksel, S. Schaefer, J. Keyser // *Computer-Aided Design*. — 2011. — №43(7). — P. 747-755. — DOI: 10.1016/j.cad.2010.08.008.
11. Antonelli M. High Quality Local Interpolation by Composite Parametric Surfaces / M. Antonelli, C.V. Beccari, G. Casciola // *Computer Aided Geometric Design*. — 2016. — Vol. 46. — P. 103-124. — DOI: 10.1016/j.cagd.2016.06.005
12. Когда у функции есть натуральная параметризация // Сайт «ИНСТРУКЦИЯ». — 2022. — URL: <https://polaris.org.ua/obuchenie/88/kogda-u-funkcii-est-naturalnaja-parametrizacija> (дата обращения: 27.08.2023).
13. Кузнецов Е.Б. Параметризация поверхностей методом продолжения решения по параметру / Е.Б. Кузнецов, П. А. Филагов // *Материалы VIII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2010)*, 25-31 мая 2010 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ. — 2010. — с. 500 — 502. — <https://www.mathnet.ru/rus/svmo75> (дата обращения 27.08.2023).
14. Li X. Non-uniform Interpolatory Subdivision Surface / X. Li, Y. Chang // *Applied Mathematics and Computation*. — 2018. — Vol. 324. — P. 239-253. — DOI: 10.1016/j.amc.2017.11.035
15. Якупов С.Н. Параметризация поверхности сложной геометрии / С.Н. Якупов, Г.Х. Низамова // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. — 2022. — Т. 18. — № 5. — С. 467-474. — DOI: 10.22363/1815-5235-2022-18-5-467-474
16. HM-3120: 2D-сетка на изогнутых поверхностях // Сайт «Altair HyperMesh». — 2021. — URL: [https://2021.help.altair.com/2021/hwdesktop/hm/topics/tutorials/hm/hm\\_3120\\_2d\\_mesh\\_in\\_curved\\_surfaces\\_c.htm](https://2021.help.altair.com/2021/hwdesktop/hm/topics/tutorials/hm/hm_3120_2d_mesh_in_curved_surfaces_c.htm) (дата обращения 27.08.2023).
17. Floater M. Surface Parameterization: a Tutorial and Survey / M. Floater, K. Hormann // *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*. — 2005. — Vol. 1. — P. 157-186. — DOI: 10.1007/3-540-26808-1\_9
18. Shen H. Constrained Surface Parameterization Methods with Guarantees: A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy / H. Shen. — New York. — 2022. — 414 p.
19. Чекалин А.А. Моделирование архитектурной формы поверхностью зависимых сечений / А.А. Чекалин, М.К. Решетников, В.В. Шпилев [и др.] // *Строительство и техногенная безопасность*. — 2021. — №20(72). — С. 53-58.
20. Кузнецов Е.Б. Многомерная параметризация и численное решение систем нелинейных уравнений / Е.Б. Кузнецов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2010. — Том 50. — № 2. — С. 255—267. — URL: <https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf4825> (дата обращения: 27.08.2023).
21. Косников Ю.Н. Методика и технология компьютерного моделирования поверхностей свободных форм с применением радиальных базисных функций / Ю.Н. Косников // *XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс*. Научное периодическое издание. Серия: Технические науки. Информационные технологии. — Пенза: Изд-во ПГТУ. — 2014. — №03(19). — С. 176-183.
22. Kosnikov Y.N. Morphing of Spatial Objects in Real Time with Interpolation by Functions of Radial and Orthogonal Basis / Y.N. Kosnikov, A.V. Kuzmin, T.H. Hoang // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2018. — Volume 1015. — URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1015/3/032066/pdf> (accessed: 27.08.2023)

### Список литературы на английском языке / References in English

1. Vuçini E. Efficient Reconstruction from Non-uniform Point Sets / E. Vuçini, T. Möller, E. Gröller // *The Visual Computer*. — 2008. — Vol. 24(7). — P. 555-563. — DOI: 10.1007/s00371-008-0236-x
2. Aleksandrova N.V. Smeshivayushchie funkicii v geometricheskom modelirovanii i vizualizacii poverhnostej svobodnyh form [Mixing Functions in Geometric Modeling and Visualization of Free-form Surfaces] / N.V. Aleksandrova, A.P. Zimin, YU.N. Kosnikov [et al.] // *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego plyus*. Nauchnoe periodicheskoe izdanie. Seriya: Tekhnicheskie nauki. Informacionnye tekhnologii [XXI Century: the Results of the Past and the Problems of the Present Plus. A Scientific Periodical. Series: Technical Sciences. Information Technology]. — Пенза: PSTU Publishing House. — 2015. — №03(25). — V.1. — P. 51-60 [in Russian].
3. Li J. Image Scaling Based on the Catmull-Rom Spline Surfaces with Free Parameters / J. Li, L. Yang, Y. Zhong // *Proceedings of the 2018 3rd International Conference on Modelling, Simulation and Applied Mathematics (MSAM 2018)*. — 2018. — P. 316-320. — DOI: 10.2991/msam-18.2018.66.
4. Qin S. Interpolation Technique for the Underwater DEM Generated by an Unmanned Surface Vessel / S. Qin, Z. Dai // *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. — 2023. — Vol. 136. — Num.3. — P. 3157-3172. — URL: <http://www.techscience.com/CMES/v136n3/51847> (accessed: 12.10.2023)
5. Lee E.T.Y. Choosing Nodes in Parametric Curve Interpolation / E.T.Y. Lee // *Computer-Aided Design*. — 1989. — Vol. 21. — no. 6. — P. 363-370. — DOI: 10.1016/0010-4485(89)90003-1.
6. YAKimovich A.YU. Nailuchshaya parametrizatsiya v zadachah priblizheniya krivyh i poverhnostej: [The Best Parameterization in Problems of Approximation of Curves and Surfaces]: dis... candidate of Physical and Mathematical Sciences: 05.13.18 / YAKimovich Anna YUr'evna. — М., 2005. — 110 p. [in Russian]
7. Gridchina E.E. Ispol'zovanie kontrol'nyh klasterov dlya korekktirovaniya deformacii antropomorfnyh poligonal'nyh modelej [Using Control Clusters to Correct Deformations of Anthropomorphic Polygonal Models] / E.E. Gridchina, D.A. Zastavnoj, A.A. Bukatov // *23-ya Mezhdunarodnaya konferenciya po komp'yuternoj grafike i zreniyu (Rossiya, Vladivostok, 16-20 sentyabrya 2013 g.)* [The 23rd International Conference on Computer Graphics and Vision (Russia, Vladivostok, September 16-20, 2013)]. — <https://gc2011.graphicon.ru/html/2013/papers/282-285.pdf> (accessed: 12.10.2023) [in Russian]



8. Juhász I. On Parametrization of Interpolating Curves / I. Juhász, M. Hoffmann // *July Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2008. — №216(2). — P.413-424. DOI: 10.1016/j.cam.2007.05.019.
9. Mohd S. Bezier Curve Interpolation on Road Map by Uniform, Chordal and Centripetal Parameterization / S. Mohd, A. Ramli // *Conference Paper in AIP Conference Proceedings*. — 2018. — Vol. 1974. — P. 020087. — DOI: 10.1063/1.5041618.
10. Yuksel C. Parameterization and Applications of Catmull—Rom Curves / C. Yuksel, S. Schaefer, J. Keyser // *Computer-Aided Design*. — 2011. — №43(7). — P. 747-755. — DOI: 10.1016/j.cad.2010.08.008.
11. Antonelli M. High Quality Local Interpolation by Composite Parametric Surfaces / M. Antonelli, C.V. Beccari, G. Casciola // *Computer Aided Geometric Design*. — 2016. — Vol. 46. — P. 103-124. — DOI: 10.1016/j.cagd.2016.06.005
12. Kogda u funkcii est' natural'naya parametrizaciya [When a function has a natural parameterization] // Site «INSTRUKCIYA». — 2022. — URL: <https://polaris.org.ua/obuchenie/88/kogda-u-funczii-est-naturalnaja-parametrizaciya> (accessed: 27.08.2023) [in Russian].
13. Kuznecov E.B. Parametrizaciya poverhnostej metodom prodolzheniya resheniya po parametru [Parameterization of Surfaces by the Method of Continuation of the Solution by Parameter] / E.B. Kuznecov, P. A. Filatov // *Materialy VIII Mezhdunarodnoj konferencii po neravnovesnym processam v soplah i struyah (NPNJ'2010)*, 25-31 maya 2010 g., Alushta [Proceedings of the VIII International Conference on Uneven Processes in Nozzles and Jets (NPN'2010), May 25-31, 2010, Alushta]. — M.: MAI-PRINT Publishing House. — 2010. — p. 500 — 502. — <https://www.mathnet.ru/rus/svmo75> (accessed: 27.08.2023) [in Russian].
14. Li X. Non-uniform Interpolatory Subdivision Surface / X. Li, Y. Chang // *Applied Mathematics and Computation*. — 2018. — Vol. 324. — P. 239-253. — DOI: 10.1016/j.amc.2017.11.035
15. YAkupov S.N. Parametrizaciya poverhnosti slozhnoj geometrii [Parameterization of a Complex Geometry Surface] / S.N. YAkupov, G.H. Nizamova // *Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij [Construction Mechanics of Engineering Structures and Structures]*. — 2022. — V. 18. — № 5. — P. 467-474. — DOI: 10.22363/1815- 5235-2022-18-5-467-474 [in Russian]
16. HM-3120: 2D-setka na izognutyh poverhnostyah [HM-3120: 2D mesh on curved surfaces] // Site «Altair HyperMesh». — 2021. — URL: [https://2021.help.altair.com/2021/hwdesktop/hm/topics/tutorials/hm/hm\\_3120\\_2d\\_mesh\\_in\\_curved\\_surfaces\\_c.htm](https://2021.help.altair.com/2021/hwdesktop/hm/topics/tutorials/hm/hm_3120_2d_mesh_in_curved_surfaces_c.htm) (accessed: 27.08.2023) [in Russian].
17. Floater M. Surface Parameterization: a Tutorial and Survey / M. Floater, K. Hormann // *Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*. — 2005. — Vol. 1. — P. 157-186. — DOI: 10.1007/3-540-26808-1\_9
18. Shen H. Constrained Surface Parameterization Methods with Guarantees: A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy / H. Shen. — New York. — 2022. — 414 p.
19. CHekalin A.A. Modelirovanie arhitekturnoj formy poverhnost'yu zavisimyh sechenij [Modeling of the Architectural Shape of the Surface of Dependent Sections] / A.A. CHekalin, M.K. Reshetnikov, V.V. SHpilev [et al.] // *Stroitel'stvo i tekhnogennaya bezopasnost' [Construction and Technogenic Safety]*. — 2021. — №20(72). — P. 53-58 [in Russian].
20. Kuznecov E.B. Mnogomernaya parametrizaciya i chislennoe reshenie sistem nelinejnyh uravnenij [Multidimensional Parameterization and Numerical Solution of Systems of Nonlinear Equations] / E.B. Kuznecov // *ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics]*. — 2010. — V. 50. — № 2. — P. 255—267. — URL: <https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf4825> (accessed: 27.08.2023) [in Russian].
21. Kosnikov YU.N. Metodika i tekhnologiya komp'yuternogo modelirovaniya poverhnostej svobodnyh form s primeneniem radial'nyh bazisnyh funkcij [Methodology and Technology of Computer Modeling of Free-form Surfaces Using Radial Basic Functions] / YU.N. Kosnikov // *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego plyus. Nauchnoe periodicheskoe izdanie. Seriya: Tekhnicheskie nauki. Informacionnye tekhnologii [XXI Century: the Results of the Past and the Problems of the Present Plus. A scientific periodical. Series: Technical Sciences. Information technology]*. — Penza: PSTU Publishing House. — 2014. — №03(19). — P. 176-183 [in Russian].
22. Kosnikov Y.N. Morphing of Spatial Objects in Real Time with Interpolation by Functions of Radial and Orthogonal Basis / Y.N. Kosnikov, A.V. Kuzmin, T.H. Hoang // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2018. — Volume 1015. — URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1015/3/032066/pdf> (accessed: 27.08.2023)